గణితం - 10వ తరగతి

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి, ప్రచురణ కమిటి

ప్రధాన నిర్వహణాధికారి	:	**శ్రీ జి. గోపాల్‌రెడ్డి,** సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాదు
ప్రధాన వ్యవహార నిర్వాహకులు	:	**శ్రీ బి. సుధాకర్,** సంచాలకులు, ప్రభుత్వ పాఠ్యపుస్తక ముద్రణాలయం, ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాదు
కార్యనిర్వాహకులు	:	**డా.ఎన్. ఉపేందర్‌రెడ్డి,** ప్రొఫెసర్, పాఠ్యప్రణాళిక & పాఠ్య పుస్తక విభాగం రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ

చైర్మన్, గణిత ఆధారపత్రం, గణిత పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

ప్రొఫెసర్. వి.కన్నన్

గణితం - సాంఖ్యక శాస్త్ర విభాగం హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాదు.

ముఖ్యసలహాదారులు

శ్రీ చుక్కా రామయ్య
విద్యావేత్త
హైదరాబాదు, ఆంధ్రప్రదేశ్.

డా. హెచ్.కె.దివాన్
విద్యాసలహాదారు, విద్యాభవన్ సొసైటీ రిసోర్సు సెంటర్
ఉదయ్‌పూర్, రాజస్థాన్

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వ ప్రచురణ, హైదరాబాదు

© Government of Andhra Pradesh, Hyderabad.

New Edition

First Published 2014

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Andhra Pradesh.

This Book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

Printed in India
at the Andhra Pradesh Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Andhra Pradesh.

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటి

రచయితలు

శ్రీ తాతా వెంకట రామకుమార్
ప్ర.ఉ., జి.ప.ఉ.పా., ములుమూడి, ఎస్.పి.ఎస్.నెల్లూరు

శ్రీ సోమ ప్రసాద బాబు
పి.జి.టి.ఎపి.టి.డబ్ల్యు.ఆర్.ఎస్., చంద్రశేఖరపురం, ఎస్.పి.ఎస్.నెల్లూరు

శ్రీ గడ్డమీది అనంతరెడ్డి
విశ్రాంత ప్ర.ఉ., రంగారెడ్డి

డా. పూండ్ల రమేష్
లెక్చరర్, ప్రభుత్వ ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ, ఎస్.పి.ఎస్.నెల్లూరు

శ్రీ కొమాండూరు శ్రీధరాచార్యులు
ఎస్,ఎ, జి.ప.ఉ.పా. రంగాయపల్లి, మెదక్

శ్రీ కందాల రామయ్య
ఎస్.ఎ, జి.ప.ఉ.పా. కాసీందేవిపేట్, వరంగల్

శ్రీ గొట్టుముక్కల వి.బి.ఎస్.ఎన్.రాజు
ఎస్.ఎ. పురపాలక ఉన్నత పాఠశాల, కస్పా, విజయనగరం

శ్రీ పదాల సురేష్ కుమార్
ఎస్.ఎ., ప్ర.ఉ.పా.,విజయనగర్‌కాలనీ, హైదరాబాదు

శ్రీ పెద్దాడ డి.ఎల్.గణపతి శర్మ
ఎస్.ఎ., ప్ర.ఉ.పా.జమిస్తాన్‌పూర్,మాణికేశ్వర్ నగర్, హైదరాబాదు

శ్రీ సర్దార్ ధర్మేంద్ర సింగ్
ఎస్.ఎ.,జి.ప.ఉ.పా, దన్నూరు(బుర్జు) ఆదిలాబాదు

శ్రీ నాగుల రవి
ఎస్.ఎ, జి.ప.ఉ.పా, లోకేశ్వరం, ఆదిలాబాదు

శ్రీ కాకుళవరం రాజేందర్ రెడ్డి
కో-ఆర్డినేటర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు

ముఖ్యసంపాదకులు

డా. హెచ్.కె.దివాన్
విద్యాసలహాదారు, విద్యాభవన్ సొసైటీ రిసోర్సు సెంటర్
ఉదయ్‌పూర్, రాజస్థాన్

సంపాదకులు

ప్రొఫెసర్ వి. శివరామప్రసాదు
విశ్రాంతాచార్యులు, గణిత విభాగం
ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ, హైదరాబాదు

ప్రొఫెసర్ ఎన్.సి.హెచ్. పట్టాభిరామాచార్యులు
విశ్రాంతాచార్యులు, ఎన్.ఐ.టి., వరంగల్

శ్రీ ఎ. పద్మనాభం
విశ్రాంత గణిత విభాగఅధిపతి,
మహారాణి కాలేజ్, పెద్దాపురం, తూర్పుగోదావరి

డా.జి.సూర్యనారాయణ మూర్తి
విశ్రాంత రీడర్, రాజా.ఆర్.ఎస్.ఆర్.కె.రంగారావు కాలేజ్
బొబ్బిలి, విజయనగరం.

సమన్వయకర్తలు

శ్రీ కాకుళవరం రాజేందర్‌రెడ్డి
కో-ఆర్డినేటర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు

శ్రీ కంకంటి నారాయణరెడ్డి
లెక్చరర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు

విద్యావిషయక సహకారం అందించిన వారు

శ్రీ హనీష్ పాలివల్,
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

కుమారి ప్రీతి మిశ్రా
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీమతి స్నేహబాలజోషి
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

కుమారి తాన్యసక్సేనా
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

కుమారి ఎమ్. అర్చన
గణితం సాంఖ్యకశాస్త్ర విభాగం, హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం

బొమ్మలు, డిజైనింగ్ సభ్యులు

శ్రీ ప్రశాంత్ సోనీ
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీ ఎస్.ఎమ్. ఇక్రం
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీ భవాని శంకర్
విద్యాభవన్ ఎడ్యుకేషన్ రిసోర్సు సెంటర్, ఉదయ్‌పూర్.

శ్రీ సుంకర కోటేశ్వరరావు
పవన్ గ్రాఫిక్స్, విజ్ఞాన్‌పురికాలని, విద్యానగర్, హైదరాబాద్.

శ్రీమతి సుంకర సునీత
పవన్ గ్రాఫిక్స్, విజ్ఞాన్‌పురికాలని, విద్యానగర్, హైదరాబాద్.

ముందుమాట

మానవ వికాసానికి, సాధికారతకు, స్వయం సిద్ధమైన అభివృద్ధికి 'విద్య' ఒక మూలాధారం. విద్యకు గల ఈ అద్భుతమైన శక్తిని గుర్తించి అభివృద్ధి పథంలో ముందుకు సాగే అన్ని సమాజాలు 'సార్వజనీన ప్రాథమిక విద్య'కు అత్యంత ప్రాధాన్యత నిచ్చి, ప్రతీ ఒక్కరికీ గుణాత్మక విద్యను అందించాలనే స్పష్టమైన గమ్యాన్ని నిర్దేశించుకున్నాయి. దీనికి కొనసాగింపుగా మాధ్యమిక విద్యను కూడా సార్వజనీనం చేయాల్సిన ఆవశ్యకత ఏర్పడింది.

విద్యార్థి ప్రాథమిక స్థాయి వరకు నేర్చుకున్న కృత్యాత్మక గణితము క్రమంగా నియమబద్ధ గణితంగా మారేందుకు మాధ్యమిక స్థాయి దోహదపడుతుంది. గణితాంశాలను హేతుబద్ధంగా నేర్చుకోవడం, సమస్యలు విశ్లేషించి సాధించడం, సిద్ధాంతాల తార్కిక నిరూపణ వంటివి ఈ స్థాయిలో ప్రవేశపెట్టారు. ఈ దశలో గణితం ఒక ప్రత్యేక బోధనా విషయంగా కాక, ఇతర విషయాలతో అవినాభావ సంబంధము కలిగి, కార్యకారణ సంబంధాలు విశ్లేషించే సహజ విధానాలు పొందుపరచబడ్డాయి. ఈ విధానాల ద్వారా ప్రతి విద్యార్థి కావలసిన మానసిక స్థైర్యాన్ని పొంది, నేర్చుకొన్న అంశాలను వారి జీవితానుభవాలతో జోడించి జ్ఞాన నిర్మాణానికి, ఉన్నత తరగతుల కొనసాగింపునకు ప్రేరణ పొంది ఉన్నత విద్యావంతులై మంచి పౌరులుగా మారేందుకు కృషి చేయాలి.

మన రాష్ట్రంలో చదువుతున్న విద్యార్థులందరూ గణితాభ్యసనాన్ని ఇష్టంతో కొనసాగించడానికి, వారి జీవితానుభవాలను జోడించి గణిత సమస్యల రూపకల్పనకు, వాటిని సాధించడానికి ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని మౌలిక భావనలు తోడ్పడతాయని ప్రగాఢంగా విశ్వసిస్తున్నాము.

విద్యార్థులు గణితాన్ని కేవలం మార్కులు సంపాదించుకొనుటకు మాత్రమేకాక, గణిత పాఠ్యప్రణాళికలో యిమిడి వున్న అమూర్త కీలక భావనలు నేర్చుకునే విధంగా ఉపాధ్యాయులు ప్రోత్సహించవలసి ఉంది. గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వివిధ స్థాయిల విద్యార్థులను భాగస్వాములను చేయడం, వారికి గణిత పఠనం పట్ల సానుకూల దృక్పథం కలిగించడం, వారి వైయుక్తిక విభేదాలను, జీవన విధానాలలోని భేదాలను దృష్టిలో వుంచుకొని, వారికి విశ్వాసం కలిగించేటట్లు బోధన కొనసాగితే అది వారి జీవన గమ్యాల సాఫల్యానికి దోహదపడుతుంది. ఈ విధమైన జ్ఞాన నిర్మాణానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం చేసిన ప్రయత్నం మీ కృషితో ఫలవంతమవుతుందని ఆశిస్తున్నాము.

ఆంధ్రప్రదేశ్ విద్యాప్రణాళిక పరిధి పత్రం 2011(APSCF 2011) కు అనుగుణంగా విస్తృతంగా రూపొందించబడిన గణిత ఆధారపత్రంలోని అంశాల ఆధారంగా నిర్ధారించిన విద్యాప్రమాణాలను ప్రతీస్థాయిలో సాధించాల్సి ఉంది.

గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఆకర్షణీయంగా, ప్రమాణాలకు అనుగుణంగా తీర్చిదిద్దడంలో అవిరళ కృషి చేసిన పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులను, పుస్తక రూపకల్పనలో పాలు పంచుకున్న ఉపాధ్యాయులను, అధ్యాపకులను రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ అభినందిస్తుంది. ఇదేవిధంగా పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పనకు పరిపాలనా పరంగా సహకరించిన జిల్లా విద్యాశాఖాధికారులు, మండల విద్యాశాఖాధికారులు, పాఠశాలల ప్రధానోపాధ్యాయులకు ప్రత్యేక ధన్యవాదాలు. పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధిలో మమ్ములను ముందుండి ప్రోత్సహించిన కమీషనర్ మరియు డైరెక్టర్, పాఠశాల విద్య, ఆంధ్రప్రదేశ్ గారికి, విద్యాభవన్ సొసైటీ, ఉదయపూర్, రాజస్థాన్‌కు కృతజ్ఞతలు. రాబోయే కాలంలో పాఠ్యపుస్తకం మరింత గుణాత్మకంగా అభివృద్ధి చెందడానికి మీ అందరి నుండి సలహాలు, సూచనలు ఆహ్వానిస్తున్నాము.

స్థలం : హైదరాబాదు

తేది : 17 అక్టోబర్, 2013

సంచాలకులు

రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
హైదరాబాద్, ఆంధ్రప్రదేశ్

పీఠిక

విద్యార్థులు మూడు సంవత్సరములు ప్రాథమిక (ఎలిమెంటరీ) (6, 7, 8), ఒక సంవత్సరము మాధ్యమిక స్థాయి (9) అభ్యసనమును పూర్తి చేసి ఈ పాఠ్యపుస్తకమును అభ్యసించబోనున్నారు. విద్యార్థులు ఈ సంవత్సరముతో తమ పాఠశాల విద్యను పూర్తి చేయబోనున్నారు. కనుక ప్రతీ విద్యార్థి కావలసిన మానసిక స్థైర్యము, నేర్చుకొన్న అంశాలను వారి జీవిత అనుభవాలతో జోడించి, జ్ఞాన నిర్మాణమునకు దాని కొనసాగింపుకు కృషి చేయాలి.

గణితము ప్రతివ్యక్తికి ఆవశ్యకమైన అంశము. అందుచే పాఠశాల విద్యలో మాధ్యమికస్థాయి వరకు గణితమును ఒక బోధనాంశముగా చేర్చడమైనది. ప్రస్తుత కాలములో కూడా గణిత అభ్యసమును క్లిష్టముగా, ఇతర విషయాలతో పోల్చితే కష్టమైన అంశముగా పిల్లలు, పెద్దలు కూడా భావిస్తున్నారు. పిల్లలకు, ఉపాధ్యాయులకు మాత్రమే కాక సమాజమునకు కూడా గణిత అభ్యసనము కష్టసాధ్యం అన్న అంశము సర్వవ్యాపితమయినది. ఈ దశలో గణితం ఒక ప్రత్యేక బోధనా విషయంగానే కాకుండా ఇతర విషయాలతో అవినాభవ సంబంధము కలిగి ఉండే, నిత్యపురోగామి అయ్యే జ్ఞాన విభాగముగా గుర్తించవలసిన ఆవశ్యకత యున్నది. గణిత అభ్యసనము కేవలము మార్కులు సంపాదించుట కొరకు మాత్రమే కాదు, పాఠశాల బయట జీవితం (నిజజీవితం)లో ఎన్నో సందర్భాలలో ఉపయోగించి కార్యసిద్ధులయ్యే విధముగా తీర్చదిద్దగల్గి గణిత అభ్యసనము పట్ల భయం పోయి ఆసక్తి పెరుగుతుంది.

గణితబోధనలో మనము ఎదుర్కొనే సమస్యలలో ప్రధానమైనది గణిత భావనలను వ్యక్తపరిచే విధానము. గణిత బోధన కేవలం సంఖ్యలు, క్లిష్టతరమైన గణనలు, నిర్వచనములు, జ్ఞాపకముపై ఆధారపడే సత్యములు, క్రమయుత విధానములు, సులువు పద్ధతులు (short cuts) మరియు ఉపపత్తులతో కూడిన సాధనలు కేంద్రీకృతము అయి ఉన్నది. అన్వేషణ, అవగాహన, నూతన ఆలోచనలు, భావనల సృష్టిలను ప్రోత్సహిస్తూ గణిత సమస్యల సాధన ఒకే పద్ధతి ఉంటుందన్న అపోహను పారద్రోలి సమస్యా సాధనను భిన్న మార్గాలలో చేయవచ్చుననే భరోసా కల్పించాలి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా విద్యార్థులు సమస్యాసాధనకు పలు మార్గాలు, పద్ధతులను ఎన్నుకొని గణిత భావనలను అర్థము చేసుకునేందుకు కావలసిన అమరికల అన్వేషణ భావనల మధ్య సంబంధమును గుర్తించి ఏర్పరచుట మరియు తార్కిక చింతన పొందుతారు. ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు ఈ పాఠ్యపుస్తక అధ్యయనం ద్వారా భావనల అవగాహన. సూత్రీకరణ మరియు వివిధ సమస్యలకు భిన్నమైన సాధనా విధానములు కనుగొనే నైపుణ్యమును పొందే విధముగా తర్ఫీదునివ్వాలి. విద్యార్థి సమస్యాసాధనలో స్వతంత్రముగా, గ్రూపులుగా మారి చర్చించి, విశ్లేషించి తార్కికతతో కూడి సులభమైన విధానమును కనుగొనాలి. విద్యార్థులు భావనలను చర్చించి నూతన గణిత సమస్యలను కనుగొనే విధముగా తయారు కావాలని ఆశిస్తున్నాము. విద్యార్థులు గణితము అనగా కేవలం సమస్యా సాధనయే కాదు, ఇతర విద్యార్థులు కనుగొన్న, ఉపయోగించిన వివిధ పద్ధతులను చర్చావిధానములను విశ్లేషణ చేసే స్థాయిని పెంపొందించేదిగా గుర్తించాలి. కష్టపడి గణిత అభ్యసనము చేయుట కంటే ఇష్టపడి గణిత అభ్యసనము సాగేలా కృషి చేయాలి.

పదవతరగతి, విద్యార్థుల యొక్క సెకండరీస్థాయిలో చివరి సంవత్సరం. విద్యార్థులు నేర్చుకొన్న గణిత భావనలను నిజజీవితములోని సంఘటనలతో అన్వయించగల్గుతాడు. కాని నిజజీవిత సంఘటనలన్నింటికి గణిత భావనలను అన్వయించలేము. ఈ స్థాయి పూర్తి చేసిన విద్యార్థులు ఒక అనుషంగికమును (Conditional Statement) ఏ విధముగా ఋజువు చేస్తారో, ఆ తార్మికక్రమమును రాసే విధానమును నేర్చుకొంటారు.

గణిత అభ్యసనము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము, పీఠిక మరియు 10వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకములో చెప్పిన విధముగా విద్యార్థులు తమ యొక్క గణితానుభవాలను, అన్వేషణలను గణితీకరణము చేయాలి. తరగతి గదిలో నేర్చుకొన్న అమూర్త భావనలను అవగాహన చేసుకొని, తమ అనుభవాలను క్రమబద్దీకరించి, నిర్మాణాత్మక కృషి ద్వారా పరిపుష్టి చేయాలి. గణితభావనలను గణిత పరిభాషలో వ్యక్తి కంటే సామర్థ్యమును విద్యార్థులు కల్గి యుండాలి. ఈ పాఠ్యపుస్తకము ఎందరో విషయనిపుణులతో చర్చించి వారి అమూల్య సలహాలను క్రోడీకరించి ఆధారపత్రం, విద్యాప్రమాణాలు ఆధారముగా చేసుకొని తయారుచేయబడింది. విశేష అనుభవజ్ఞులయిన రచయితలు మేలు కలయికల కృషి ఫలితము ఈ పాఠ్యపుస్తకం. సద్విమర్శలతో, సూచనలతో ఈ పుస్తకమును మరింత పరిపుష్టి చేసే అందరికి మా హృదయపూర్వక అభివందనాలు.

ఇట్లు

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటి

గణితం 10వ తరగతి

అధ్యాయము సంఖ్య	విషయసూచిక	పీరియడ్ల సంఖ్య	సిలబస్ పూర్తి చేయు నెలలు	పేజీ సంఖ్య
01	వాస్తవసంఖ్యలు	15	జూన్	1 - 24
02	సమితులు	08	జూలై	25 - 46
03	బహుపదులు	08	జూలై	47 - 72
04	రెండుచరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత	15	జూలై, ఆగష్టు	73 - 100
05	వర్గ సమీకరణాలు	12	అక్టోబర్	101 - 124
06	శ్రేఢులు	11	నవంబర్	125 - 158
07	నిరూపక జ్యామితి	12	డిశంబర్	159 - 190
08	సరూప త్రిభుజాలు	18	ఆగష్టు	191 - 224
09	వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖలు	15	నవంబర్	225 - 244
10	క్షేత్రమితి	10	డిశంబర్	245 - 268
11	త్రికోణమితి	15	సెప్టెంబర్	269 - 293
12	త్రికోణమితి అనువర్తనాలు	08	జనవరి	294 - 304
13	సంభావ్యత	10	ఫిబ్రవరి	305 - 322
14	సాంఖ్యక శాస్త్రం	15	సెప్టెంబర్	323 - 352
అనుబంధం	గణిత నమూనా విధానాలు	08	ఫిబ్రవరి	353 - 365
	జవాబులు			366 - 384

జాతీయ గీతం

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ,సింధ్, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగ!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగ!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగ!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాంగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి, భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను, సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశపు
వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను.
ప్రతి వారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను. జంతువుల పట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశం పట్ల, నా ప్రజల పట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

అధ్యాయము

1 వాస్తవ సంఖ్యలు

(Real Numbers)

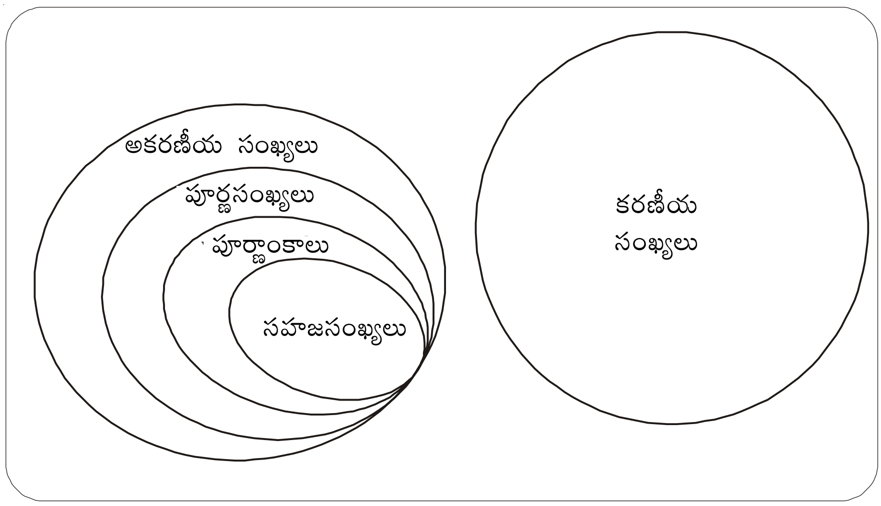
1.1 పరిచయం

మనం ముందు తరగతుల్లో వివిధ రకాలైన సంఖ్యలను గూర్చి తెలుసుకున్నాము. అంటే సహజసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలు, అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలను గూర్చి నేర్చుకున్నాం. అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలను గురించి మరికొన్ని విషయాలు జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలైయుండి, $q \neq 0$ అయిన సందర్భంలో $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలంటారు. ఈ సంఖ్యలు పూర్ణసంఖ్యల కన్నా పెద్ద సమూహంగా వుంటాయి. అదేవిధంగా ఏ రెండు పూర్ణసంఖ్యల మధ్యనైనా అనేక అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయి. అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను అంతమయ్యే దశాంశాలుగానూ లేదా అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా గాని రాయవచ్చును.

$\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనటువంటి సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలంటారు. వీటిలో $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మొదలగు సంఖ్యలు, అదేవిధంగా గణిత ప్రమాణాలైన π మొ॥నవి కూడా ఉంటాయి. వీటిని దశాంశాలుగా రాసేటప్పుడు అవి అంతం కాని మరియు ఆవర్తనం కాని దశాంశాలుగా వస్తాయి. ఉదాహరణకు $\sqrt{2} = 1.41421356...$ మరియు $\pi = 3.14159...$ ఈ సంఖ్యలను కూడా మనం సంఖ్యారేఖపై గుర్తించగలము.

అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలు కలిసి ఉన్న సమూహాన్ని మనం వాస్తవ సంఖ్యలు అంటాము. కింది పటంలో వీటిని మనం చూడవచ్చు.



వాస్తవ సంఖ్యలు

ఈ అధ్యాయములో మనం కొన్ని సిద్ధాంతాలను విభిన్న పద్ధతులలో నిరూపించడం తెలుసుకుంటాము. ఇదేవిధంగా కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను రాబట్టడానికి ఈ సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించుకుంటాము. చివరగా మనం సంవర్గమానాలు (logarithms) అనే ఒక రకమైన ప్రమేయాలను తెలుసుకొని వాటిని శాస్త్రవిజ్ఞానంలోనూ, నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలోనూ ఏవిధంగా వినియోగించుకోవచ్చునో తెలుసుకుంటాము.

వాస్తవ సంఖ్యల అధ్యయనానికి ముందుగా మనము కొన్ని సమస్యలను సాధించి చూద్దాము.

అభ్యాసం - 1.1

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏది అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{17}{18}$ (iii) $\frac{15}{16}$ (iv) $\frac{7}{40}$ (v) $\frac{9}{11}$

2. కింది జతల సంఖ్యల మధ్యన గల ఏదేని ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

(i) $\frac{1}{2}$ మరియు $\sqrt{1}$ (ii) $3\frac{1}{3}$ మరియు $3\frac{2}{3}$ (iii) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ మరియు $\sqrt{2}$

3. కింది సంఖ్యలలో ఏవి అకరణీయాలు? ఏవి కరణీయాలు?

(i) $2\frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{24}$ (iii) $\sqrt{16}$ (iv) $7.\bar{7}$ (v) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (vi) $-\sqrt{30}$ (vii) $-\sqrt{81}$

4. కింది వాస్తవ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించండి. అవసరమైతే ప్రతి సంఖ్యకు ఒక ప్రత్యేకమైన సంఖ్యారేఖను గీయండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-9}{10}$ (iii) $\frac{27}{3}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $-\sqrt{16}$

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలను వాస్తవ సంఖ్యలలో చేర్చవచ్చునా? ఎందుకు?

1.2 వాస్తవ సంఖ్యల అన్వేషణ

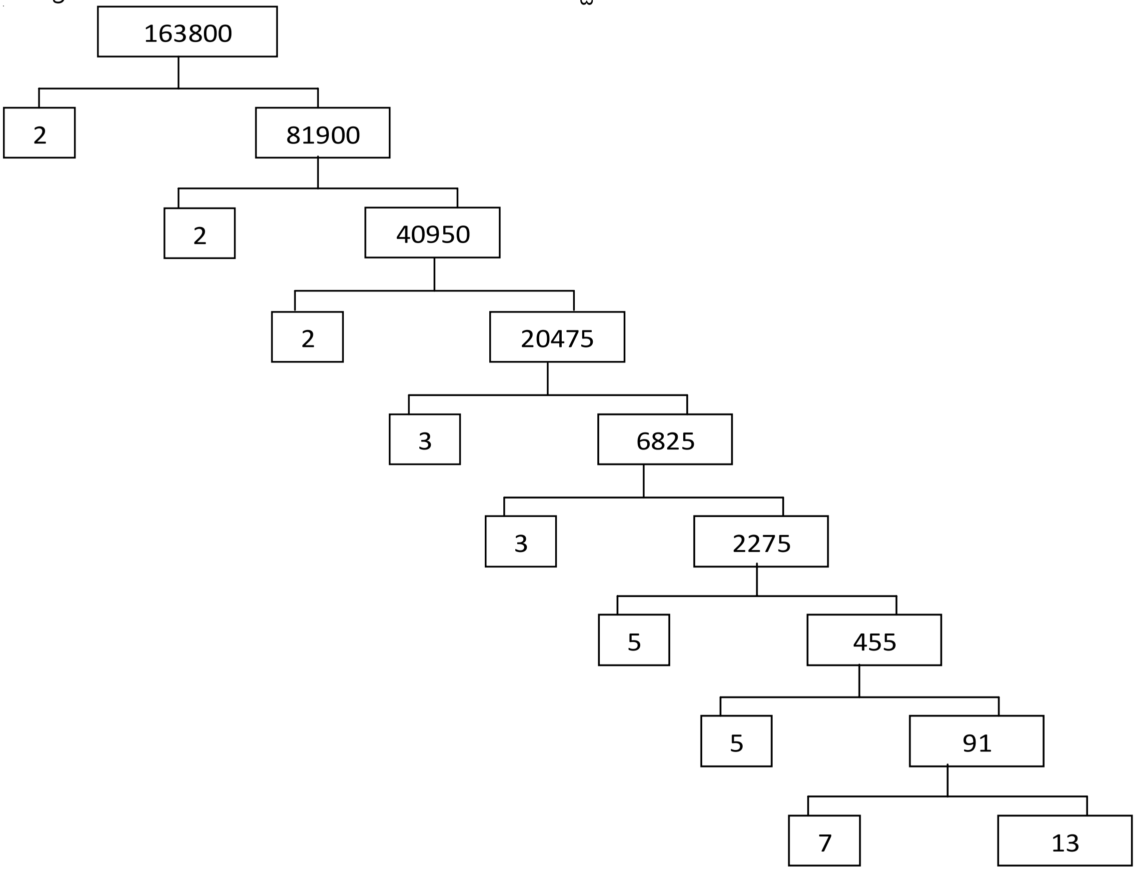
వాస్తవ సంఖ్యలను గురించి మరిన్ని అంశాలను ఈ విభాగములో అన్వేషిద్దాము. సహజసంఖ్యలు అన్నియూ వాస్తవ సంఖ్యలలో ఇమిడివున్నాయని మనకు తెలుసు. అందుచే వాటితోనే ప్రారంభిద్దాము.

1.2.1 అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము

1 తప్ప, మిగిలిన అన్ని సహజసంఖ్యలను వాటి ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చునని కింది తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్నారు. ఉదాహరణకు $3 = 3$, $6 = 2 \times 3$ మరియు $253 = 11 \times 23$ గా వ్రాయవచ్చు. (ప్రధానసంఖ్య, సంయుక్త సంఖ్య కానిది '1' అని గుర్తుకుతెచ్చుకొండి)

ప్రధానాంకాల ఘాతాల లబ్దంగా రాయలేని ఏదైనా సంయుక్తసంఖ్య కలిగి వుంటుందని మీరు భావిస్తున్నారా? మనము ఒక సహజసంఖ్యను తీసుకొని కారణాంకాల లబ్దంగా రాసి, దీనికి సమాధానము పరిశీలిద్దాం.

ఇప్పుడు మనం కారణాంకాల లబ్దంగా రాసే వృక్షచిత్రాన్ని వాడుకుందాము. దీనికొరకు ఒక పెద్ద సంఖ్య 163800 ను తీసుకొని, కారణాంకాలుగా విభజిద్దాము.



దీని నుండి 163800 ను $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13$ గా రాయవచ్చు. ఇదేవిధంగా ఈ సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల ఘాతాల లబ్దంగా $163800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 13$ గా రాస్తాము.

మరొక సంఖ్య 123456789 ను తీసుకొని ప్రయత్నిద్దాము. దీనిని $3^2 \times 3803 \times 3607$ గా రాయవచ్చు. అయితే మీరు 3803 మరియు 3607 సంఖ్యలు ప్రధానాంకాలుగా సరిచూడవల్సి వుంది! (ఇదే విధంగా మీరు మరిన్ని సంఖ్యలను తీసుకొని ప్రయత్నించండి). ఈ ఫలితాల ఆధారంగా మనం ఒక ప్రాథమిక పరికల్పన (conjecture)ను ప్రతిపాదించవచ్చు. పరికల్పనను ఒకే సందిగ్ధ ప్రతిపాదన అని కూడా అంటారు. అదేమంటే "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను దాని ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతాల లబ్దంగా రాయవచ్చు".

ఈ ఫలితాన్ని సహజ సంఖ్యలతో మరొక విధంగా పరిశీలిద్దాము. కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు 2, 3, 7, 11 మరియు 23 లను తీసుకుందాము. వీటిలో కొన్నింటిని లేదా అన్నింటిని, ఏ సంఖ్య ఎన్నిసార్లు అయిననూ తీసుకొని గుణిస్తే మనకు అతిపెద్ద పూర్ణసంఖ్యలను అపరిమితంగా రాబట్టవచ్చు. వీటిలో మనము కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాము.

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $\qquad$ $7 \times 11 = 77$

$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\qquad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\qquad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

ఇప్పుడు, మీరు తీసుకున్న ఒక ప్రధాన సంఖ్యల సమూహములో అవకాశం గల అన్ని ప్రధానసంఖ్యలు వున్నాయనుకుందాం. అటువంటి సమూహాన్ని మీరు ఊహించగలరా? ఈ సమూహంలో సంయుక్త సంఖ్యలు పరిమిత సంఖ్యలో వుంటాయా? లేదా అపరిమితంగా వుంటాయా? కాని సాధారణంగా మనకు అపరిమితంగా ప్రధానసంఖ్యలు వుంటాయి. అందుచే మనం అన్ని ప్రధానసంఖ్యలను విభిన్న రీతులలో గుణిస్తే, మనకు అపరిమితంగా సంయుక్త సంఖ్యలు కూడా వస్తాయి.

ఈ చర్చ ద్వారా మనము అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానకారణాంకముల లబ్ధంగా" గా నిర్వచింపవచ్చును. దీనిని మరింత స్పష్టంగా చెప్పాలంటే ప్రధాన సంఖ్యల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధంగా ఏకైకము (**unique**) గా రాయవచ్చును. ఉదాహరణకు మనము 210 సంఖ్యను కారణాంకములుగా రాసేటప్పుడు ప్రధానాంకాల క్రమము ఏదైనప్పటికీ దీనిని $2 \times 3 \times 5 \times 7$ లేదా $3 \times 5 \times 7 \times 2$ లేదా మరేవిధంగా నైననూ లబ్ధముగా రాయవచ్చును. అందుచే ఏ సంయుక్త సంఖ్యను అయిననూ ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా ఒకేఒక విధంగా రాయవచ్చును. దీనిని మనం సిద్ధాంత పరంగా ఇప్పుడు నిర్వచిద్దాము.

సిద్ధాంతము-1.1 : (అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము) : ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చును మరియు ప్రధాన కారణాంకాల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఈ కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకము

దీనిని, సాధారణంగా ఒక సంయుక్త సంఖ్య x ను $x = p_1p_2...p_n$ అని రాయవచ్చు. దీనిలో p_1, p_2..., p_n అనేవి ఆరోహణ క్రమంలో రాయబడిన ప్రధానాంకాలు, అంటే $p_1 \le p_2 \le ... \le p_n$. ఈ సందర్భంలో ఒకే రకమైన ప్రధానాంకములు వాడినచో వాటిని ప్రధానాంకాల ఘాతాలుగా రాస్తాము. ఒకసారి మనం ఈ సంఖ్యలు ఆరోహణక్రమంలో వున్నాయని భావిస్తే, అప్పుడు ఈ లబ్ధం ఏకైకం అవుతుంది.

ఉదాహరణకు $163800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 13$

ప్రయత్నించండి

2310 ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి. ఈ సంఖ్యను నీ స్నేహితులు ఏవిధంగా కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసారో చూడండి. నీవు చేసినట్లుగానే వారు కూడా చేసారా ? చివరి ఫలితాన్ని, నీ స్నేహితుల ఫలితంతో సరిచూడుము. దీని కొరకు 3 లేదా 4 సంఖ్యలను తీసుకొని ప్రయత్నించుము. నీవు ఏమి గమనిస్తావు?

మీరు తెలుసుకున్న ఫలితం చాలా సులభంగా అవగాహన అయివుండి నిర్వచింపబడి వుండవచ్చును. దీని యొక్క అనువర్తనం గణితంలో అనేక విధాలుగా ఉంది. దీనికొరకు రెండు ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

మీరు ఇది వరకు రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు గ.సా.కా (గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకం) మరియు క.సా.గు (కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం) ను అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి కనుగొనడం, సంపూర్ణ అవగాహన లేకుండానే నేర్చుకున్నారు.

ఈ పద్ధతినే మనము ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధపద్ధతి అంటాము. కింది ఉదాహరణ ద్వారా మనము ఈ పద్ధతిని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాము.

ఉదాహరణ-1. 12 మరియు 18 ల యొక్క గ.సా.కా మరియు క.సా.గులను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిలో కనుగొనుము

సాధన : మనకు $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$ అగును

12, 18 ల గ.సా.కా $= 2^1 \times 3^1 = 6$ = **సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకముల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.**

12, 18 ల క.సా.గు $= 2^2 \times 3^2 = 36$ = **సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకముల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం**

పై ఉదాహరణ నుండి, మీరు ఒక సంబంధము అంటే(12, 18) ల గ.సా.కా $\times$ (12, 18) ల క.సా.గు $= 12 \times 18$ లబ్ధం అయినదని మీరు గమనించే వుంటారు. అనగా రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b, లు అయినచో వాటి గ.సా.కా(a,b) $\times$ క.సా.గు(a, b) = a $\times$ b అవుతుందని సరిచూడవచ్చును. దీనిని బట్టి రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు, వాటి గ.సా.కా తెలిసినప్పుడు ఆ సంఖ్యల క.సా.గును ఈ ఫలితం ఆధారంగా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ- 2. n ఒక సహజసంఖ్య గా గల సంఖ్య 4^n తీసుకొండి. *n* యొక్క ఏ విలువకైనా 4^n సంఖ్య 'సున్న' అంకెతో అంతమౌతుందో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : n సహజసంఖ్యగా గల సంఖ్య 4^n సున్నతో అంతం కావాలంటే అది '5' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి. అంటే 4^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంలో 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా వుండాలి. కాని ఇది సాధ్యం కాదు. ఎందువలన అనగా $4^n = (2)^{2n}$. అందుచే 4^n యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దంలో లేనందున, n ఏ సహజ సంఖ్య విలువకైననూ 4^n అనే సంఖ్య 'సున్న'తో అంతము కానేరదు.

ప్రయత్నించండి

ఏ సహజసంఖ్య "n"కు అయినా 12^n అను సంఖ్య 0 లేదా 5 తో అంతము కాదని నిరూపించండి.

అభ్యాసము - 1.2

1. కింది వానిలో ప్రతిసంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయండి.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. కింది పూర్ణసంఖ్యల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.కా లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిలో కనుగొనండి.

   (i) 12, 15 మరియు 21 (ii) 17, 23 మరియు 29 (iii) 8, 9 మరియు 25

   (iv) 72 మరియు 108 (v) 306 మరియు 657

3. n ఒక సహజ సంఖ్య అయిన 6^n సంఖ్య 'సున్న'తో అంతమగునో, కాదో సరిచూడండి.
4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ మరియు $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ఏవిధంగా సంయుక్త సంఖ్యలగునో వివరించండి.
5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ అనేది ఒక సంయుక్త సంఖ్య అని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు? వివరించండి.

వాస్తవ సంఖ్యలను గురించి మరింతగా పరిశోధించడానికి అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను వినియోగిద్దాం. మొదట అకరణీయ సంఖ్యలను అంతంగల దశాంశాలుగాను, అంతం లేని ఆవర్తన దశాంశ రూపంలో రాయునపుడు ఈ సిద్ధాంతం ఏవిధంగా ఉపయోగపడుతుందో తెలుసుకుందాం. ఇదేవిధంగా $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{5}$ మొదలగు సంఖ్యలు కరణీయ సంఖ్యలుగా ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చునో పరిశీలిద్దాం.

1.2.2 అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు

అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో మార్చునపుడు ఏఏసందర్భాలలో ఇవి అంతం గల దశాంశాలో లేదా అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలో ఈ విభాగంలో పరిశీలిద్దాము.

కింది కొన్ని అకరణీయసంఖ్యలకు అంతమయ్యే దశాంశ రూపాలను పరిశీలిద్దాం.

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5 (v) 0.00025

ఇప్పుడు సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాద్దాం.

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

(v) $0.00025 = \frac{25}{100000} = \frac{25}{10^5}$

మనం తీసుకున్న అంతం గల దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయునపుడు హారంలోని ఘాతాలన్నీ 10 భూమిగా వ్యక్తం చేయబడ్డాయి. ఇప్పుడు లవ, హారాలను ప్రధాన కారాణాంకముల లబ్దంగా రాసి, అకరణీయ సంఖ్యలను సూక్ష్మరూపంలో రాద్దాం.

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2}$

(v) $0.00025 = \frac{25}{10^5} = \frac{5^2}{2^5 \times 5^5} = \frac{1}{2^5 \times 5^3} = \frac{1}{4000}$

ఈ అకరణీయ సంఖ్యల హారాలలో ఏదైనా అమరికను మీరు గమనించారా? ఒక దశాంశ సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్యగా సూక్ష్మరూపంలో వ్యక్తపరచునపుడు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు మరియు హారం (అనగా q) యొక్క కారణాంకాలు 2 లేదా 5 లేదా రెండింటి యొక్క ఘాతాలలో రాయునపుడు ఈ అమరికను పరిశీలించవచ్చును. ఎందువలన అనగా 10 ఘాతంగా గల సంఖ్య యొక్క ప్రధానకారణాంకాలు 2 లేదా 5 మరియు రెండింటి ఘాతాలుగా మాత్రమే ఉంటాయి.

ఇవి చేయండి

కింది అంతమొందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా ($\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ మరియు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు) రాయండి.

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

ఈ ప్రక్రియలో అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను గురించి ఏమి చెప్పగలరు ?

మనం దీనిని కింది విధంగా ముగిద్దాం.

మనం దీనికి సంబంధించి కొన్ని ఉదాహరణలను మాత్రమే పరిశీలించినప్పటికీ ఏ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపమైనా అంతమొందే దశాంశం అయినపుడు ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారాన్ని 10 యొక్క ఘాతంగా గల సంఖ్యగా రాయవచ్చును. 10 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములు 2 మరియు 5 మాత్రమే. కావున ఒక అకరణీయ సంఖ్యను సూక్ష్మీకరించునపుడు ఆ సంఖ్య $\frac{p}{q}$ రూపంలో వుంటూ q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో వుంటుంది, ఇందులో n మరియు m లు ఏవైనా రెండు ఋణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు.

ఈ ఫలితాన్ని మనం సిద్ధాంత రూపంలో కింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

సిద్ధాంతం-1.2 : x అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశము, అయినప్పుడు x ను p, qలు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అయివున్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు. మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m అగును. ఇందులో n, m లు అనేవి ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.

మరి దీని యొక్క విపర్యయము మనం పరిశీలిస్తే మనకు ఒకింత ఆశ్చర్యం కలుగక మానదు. అంటే $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఒక అకరణీయ సంఖ్యయుండి, q యొక్క రూపం 2^n5^m (ఇందు n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు) కలిగివున్న $\frac{p}{q}$ ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అవుతుందా?

దీని నుండి మనం $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఒక అకరణీయ సంఖ్య వుండి, q అనేది 2^n5^m రూపంలో వుంటే దానికి తుల్యమైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ అవుతుంది. ఇందులో b అనేది 10 యొక్క ఘాత సంఖ్యగా భావించండి.

దీనిని పరిశీలించడానికి మనం ముందు ఉదాహరణను తిరిగి మరొకసారి పరిశీలించి, విపర్యయంను అవగాహన చేసుకుందాం.

(i) $\frac{25}{2}=\frac{5^3}{2\times5}=\frac{125}{10}=12.5$

(ii) $\frac{26}{25}=\frac{26}{5^2}=\frac{13\times2^3}{2^2\times5^2}=\frac{104}{10^2}=1.04$

(iii) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$

(iv) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times5}=\frac{7\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(v) $\frac{1}{4000}=\frac{1}{2^5\times5^3}=\frac{5^2}{2^5\times5^5}=\frac{25}{10^5}=0.00025$

పై ఉదాహరణలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వుండి దీనిలో q యొక్క రూపం 2^n5^m కలిగిన అకరణీయ సంఖ్యకు ఒక తుల్యమైన అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ గా రాయవచ్చు. మరియు ఇందులో b అనేది 10 యొక్క ఒక ఘాత సంఖ్య. అందువలన ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యలు అంతంగల దశాంశాలుగా రూపొందుతాయి. అంటే q అనేది 10 యొక్క ఘాతసంఖ్య అయి వుండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగే ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

అందుచే, సిద్ధాంతం 1.2 యొక్క విపర్యయం కూడా సత్యమే. మరి దీనిని మనం క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

సిద్ధాంతము 1.3 : n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ద రూపం 2^n5^m కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x=\frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

ఇది చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వున్నాయి. ఇందులో q యొక్క రూపం 2^n5^m మరియు ఇందులో n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు అయిన వీటిని దశాంశ రూపాలలోనికి మార్చండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{23}$ (v) $\frac{80}{81}$

1.2.3 అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయుట

మనం ఇప్పుడు అంతం కాని, ఆవర్తనం చెందే కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను, వాటి దశాంశ రూపాలను పరిశీలిద్దాం. దీని కొరకు మనం ఒక ఉదాహరణను పరిశీలలించి, ఏవిధంగా దశాంశరూపం ఏర్పడిందో చూద్దాం.

$\frac{1}{7}$ యొక్క దశాంశరూపాన్ని చూడండి.

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... ఇది ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం.

భాగఫలంలో '142857' అంకెల సమూహం ఆవర్తనం చెందుట గమనించండి.

ఈఅకరణీయ సంఖ్యలో హారం 7 కావున, ఇది 2^n5^m రూపంలో లేదని పరిశీలించవచ్చు.

```
      0.1428571
  7 ) 1.0000000
      7
      ---
      30
      28
      ---
       20
       14
       ---
        60
        56
        ---
         40
         35
         ---
          50
          49
          ---
           10
            7
           ---
            30
```

ఇది చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా రాయండి. భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహాన్ని కనుగొనండి.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

పైన మీరు చేసిన 'ఇది చేయండి' అభ్యాసం మరియు పైన చూపిన ఉదాహరణ ద్వారా మనం కింది సిద్ధాంతంను నిర్వచించవచ్చు.

సిద్ధాంతము-1.4 : n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకముల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందే దశాంశం అగును.

పై చర్చ ద్వారా మనం "ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక అంతమయ్యే దశాంశం" లేదా "అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం" గాని అగునని నిర్ధారించవచ్చును.

ఉదాహరణ-3. నిర్వచింపబడిన సిద్ధాంతాల ఆధారంగా, భాగహారం చేయకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలో, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

సాధన : (i) $\frac{16}{125}=\frac{16}{5\times5\times5}=\frac{16}{5^3}$ = అంతమయ్యే దశాంశం

(ii) $\frac{25}{32}=\frac{25}{2\times2\times2\times2\times2}=\frac{25}{2^5}$ = అంతమయ్యే దశాంశం

(iii) $\frac{100}{81}=\frac{100}{3\times3\times3\times3}=\frac{10}{3^4}$ = అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం

(iv) $\frac{41}{75}=\frac{41}{3\times5\times5}=\frac{41}{3\times5^2}$ = అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం

ఉదాహరణ-4. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశరూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

సాధన : (i) $\frac{35}{50}=\frac{7\times5}{2\times5\times5}=\frac{7}{2\times5}=\frac{7}{10^1}=0.7$

(ii) $\frac{21}{25}=\frac{21}{5\times5}=\frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2}=\frac{21\times4}{5^2\times2^2}=\frac{84}{10^2}=0.84$

(iii) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2\times2\times2}=\frac{7}{2^3}=\frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)}=\frac{7\times25}{(2\times5)^3}=\frac{875}{(10)^3}=0.875$

అభ్యాసం- 1.3

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాయండి. ఇందులో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

   (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. భాగహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో వేటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగలమో? వేటిని అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలపండి.

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. సిద్ధాంతం 1.1ను అనుసరించి కింది అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క దశాంశ రూపాన్ని తెలపండి

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. కింది కొన్ని వాస్తవసంఖ్యల దశాంశరూపాలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఇవ్వబడిన సంఖ్య అకరణీయమో కాదో తెలపండి. ఆ సంఖ్య అకరణీయమై వుండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగితే q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను గూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000… (iii) $43.\overline{123456789}$

1.3 కరణీయ సంఖ్యలు – మరిన్ని అంశాలు

p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయిన $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనటువంటి వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు (Q' లేదా S) అంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్న కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలను కింద ఉదహరిద్దాం.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots,$$ మొ॥నవి.

ఈ విభాగంలో మనం అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలుగా నిరూపిద్దాం. అంటే $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మొ॥నవి. మనం సాధారణంగా p ఒక ప్రధాన సంఖ్య అయిన $\sqrt{p}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చు.

$\sqrt{2}$ ను మనం కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించుటకు ముందుగా దీనిని అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఆధారంగా నిరూపించబడిన ప్రవచనాన్ని తెలుసుకుందాం.

ప్రవచనం-1 : p అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయితే "a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే a ను p నిశ్శేషంగా" భాగిస్తుంది.

నిరూపణ: 'a' అనేది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే 'a' యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంను కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$a = p_1p_2 \dots p_n$, ఇందులో $p_1, p_2, \dots, p_n$ లు ప్రధానాంకాలు మరియు వేర్వేరుగా ఉండనవసరం లేదు.

అందుచే $a^2 = (p_1p_2 \dots p_n)(p_1p_2 \dots p_n) = p^2_1p^2_2 \dots p^2_n$ అగును.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి a^2 ను p నిశ్శేషంగా భాగించునని ఇవ్వబడినందున, అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి a^2 యొక్క ఒక ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $p_1\, p_2 \dots p_n$ అగును. కావున p అనేది $p_1, p_2, \dots p_n$ లలో ఒకటిగా వుంటుంది.

ఇప్పుడు p అనేది $p_1p_2 \dots p_n$, లలో ఒకటిగా నున్నందున, ఇది 'a' ను కూడా నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

ఇది చేయండి

p= 2 , p = 5 మరియు a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64 మరియు 81 అయిన పైన నిరూపించిన ప్రవచనంను ఈ విలువలకు సరిచూడండి.

మనం ఇప్పుడు $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుటకు ప్రయత్నిద్దాం. ఇటువంటి నిరూపణ విధానాన్ని మనం 'విరోదాభాసం' (contradiction) అంటాం.

ఉదాహరణ-5. $\sqrt{2}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ఈ నిరూపణ 'విరోదాభాసం' ద్వారా చేయుచున్నందున మనం నిరూపించవలసిన ఫలితానికి విరుద్ధంగా $\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని భావిద్దాం.

ఇది అకరణీయం అయితే, r మరియు s అనే రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు $(s \neq 0)$ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

ఒకవేళ r మరియు s లకు 1 కాకుండా ఏదైనా సామాన్య కారణాంకం ఉంటే, ఆ సామాన్య కారణాంకం చేత భాగిస్తే మనకు $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ఇందులో a మరియు b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు గా వస్తుంది.

దీని నుండి $b\sqrt{2} = a$ అవుతుంది.

ఇరువైపులా వర్గం చేసి, క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $2b^2 = a^2$ వస్తుంది. అంటే a^2 ను 2 భాగిస్తుంది.

ఇప్పుడు ప్రవచనం-1ను బట్టి a^2 ను 2 భాగించినందున a ను కూడా ఇది భాగిస్తుంది.

అందుచే మనం తిరిగి $a = 2c$, c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్యగా రాయవచ్చు.

ఇందులో 'a' విలువను ప్రతిక్షేపించగా, మనకు $2b^2 = 4c^2$ అంటే $b^2 = 2c^2$ వస్తుంది.

అంటే b^2 ను 2 భాగిస్తుంది మరియు bని 2 భాగిస్తుంది. (ప్రవచనం-1లో p= 2).

అందువలన a మరియు b లకు 2 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది.

a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు 1 తప్ప వీటికి ఎటువంటి ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేనందున మనం ప్రతిపాదించిన $\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయం అనే భావన విరుద్ధతకు దారి తీస్తుంది. అందుచే $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించవచ్చును.

సాధారణంగా 'd' అనేది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అయి వుండి, ఏ ఇతర పూర్ణసంఖ్యకు వర్గం కానిచో $\sqrt{d}$ ని మనం ఒక కరణీయ సంఖ్యగా భావిస్తాము. ఈ సందర్భంలో $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ $\sqrt{24}$ మొ॥లగు వాటిని కరణీయ సంఖ్యలుగా చెప్పవచ్చును.

కింది తరగతులలో మనం తెలుసుకున్న విధంగా

- ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం మరొక కరణీయ సంఖ్య మరియు
- ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్దం మరియు భాగఫలం కూడా మరొక కరణీయ సంఖ్య అగును.

మనం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో వీటిని నిరూపిద్దాం.

ఉదాహరణ-6. $5-\sqrt{3}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: మనం నిరూపించాల్సిన భావనకు విరుద్ధంగా, $5-\sqrt{3}$ ని ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా ఊహించండి.

అంటే $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ఇందులో a , b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు $b \neq 0$.

కావున $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

సమీకరణంను తారుమారు చేస్తే, మనకు $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}=\frac{5b-a}{b}$ అని వస్తుంది.

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున మనకు $5-\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కావున $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

ఈ భావన ఏర్పడడానికి, మనం ఊహించిన ప్రతిపాదన $5-\sqrt{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనే భావన తప్పు. అంటే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున $5-\sqrt{3}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని మనం చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ-7. $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన : మనం నిరూపించవలసిన భావనకు విరుద్ధంగా $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్యగా ఊహించండి.

a, bలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అయ్యేటట్లు $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ అవుతుంది.

క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ అని వస్తుంది.

ఇందులో 3, a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a}{3b}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అందుచే $\sqrt{2}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన అందుచే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున మనం $3\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ-8. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, ఇందు a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అని తీసుకొండి.

కావున, $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \sqrt{3}$ అగును.

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, మనకు

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2\frac{a}{b}\sqrt{3}$$ వచ్చును

క్రమంగా అమర్చగా

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$

$$= \frac{a^2}{b^2} + 1$$

అంటే $\sqrt{3} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$

a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున, $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య ఇదేవిధంగా $\sqrt{3}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం. ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన. ఇది ఒక విరోధాభాసం. కావున $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య అగును.

గమనిక :

1. రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ కరణీయసంఖ్య కాకపోవచ్చును.

   a, b లు రెండునూ కరణీయ సంఖ్యలుగా $a = \sqrt{2}$ మరియు $b = -\sqrt{2}$ గా తీసుకుంటే $a + b = 0$ అగును. ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

2. రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్దం ఎల్లప్పుడూ కరణీయం కాకపోవచ్చును.
ఉదాహరణకు, a, b లు రెండు కరణీయ సంఖ్యలుగా $a = \sqrt{2}$ మరియు $b = \sqrt{8}$ గా తీసుకుంటే
$ab = \sqrt{16} = 4$, ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య

అభ్యాసం - 1.4

1. క్రింది వానిని కరణీయసంఖ్యలుగా నిరూపించండి.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3 + 2\sqrt{5}$

2. p, q లు ప్రధానాంకాలు అయితే $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

ప్రయత్నించండి

ఒక సంఖ్య అకరణీయమో, కరణీయమో తెలుసుకొనుటకు ఈ అధ్యాయంలో అనేక ఉదాహరణలు, సందర్భాలు తెలుసుకున్నారు. a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలై యున్నప్పుడు మీ యొక్క నూతన జ్ఞానాన్ని వినియోగించి దిగువ పట్టికలో ఇవ్వబడిన ధర్మాలు వాస్తవసంఖ్యలకు వర్తిస్తాయో, లేదో పరిశీలించండి. ఇవి వ్యవకలనం మరియు భాగహారానికి కూడా వర్తిస్తాయా? దీని కొరకు మీరు కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను తీసుకొని పరిశోధించండి.

	ధర్మం	సంకలనం	గుణకారం
1.	సంవృతధర్మం	a + b = c	a . b = c
2.	స్థిత్యంతర ధర్మం	a + b = b + a	a . b = b.a
3.	సహచరధర్మం	a + (b + c) = (a + b) + c	a(bc) = (ab).c
4.	తత్సమాంశం	a + 0 = 0 + a = a	a.1 = 1.a = a
5.	విలోమం	a + (-a) = 0	$a.\frac{1}{a} = 1, (a \neq 0)$
6.	విభాగన్యాయం	a (b + c) = ab + ac	

1.5 సంవర్గమానాలు – ఒక అవగాహన

కింది విభాగంలో మనం సంవర్గమానాలను గురించి అవగాహన చేసుకుందాం. సంవర్గమానాలను అన్ని రకాల గణన ప్రక్రియలలో ముఖ్యంగా ఇంజనీరింగ్, సైన్సు, వ్యాపారం, అర్థశాస్త్రం లలో విరివిగా వినియోగిస్తారు. చక్రవడ్డీని గణించడానికి, ఘాతాలలో వుండే వృద్ధి రేటును, క్షీణతను తెలుసుకోవడానికి, రసాయనశాస్త్రం pH విలువ కనుగొనడానికి మరియు భూకంపాల తీవ్రత వంటి వాటిని లెక్కించడానికి వాడతారు.

అయితే సంవర్గమానాలను గూర్చి తెలుసుకోవడానికి ముందుగా మనం ఒకసారి ఘాతాంక న్యాయాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోవలసి వున్నది. ఎందువలన అంటే సంవర్గమానాలు, ఘాతాంక న్యాయాలు ఒకదానితో ఒకటి అవినాభావ సంబంధం కలిగి వున్నాయి.

1.5.1 ఘాతాల పునర్విమర్శ

మనం 81 సంఖ్యను 3^4 అని సూచిస్తే దీనిని ఘాతాంక రూపంలో రాయబడినదని అంటాం. అంటే $81 = 3^4$. ఇందులో 4 ను 'ఘాతాంకం' అనియూ 3ను 'భూమి' లేదా 'ఆధారం' అంటారు. అందుచే మనం

81 ను భూమి 3 యొక్క 4వ ఘాతం లేదా 3 యొక్క 4 వ ఘాతం అంటాం. ఇదేవిధంగా $27 = 3^3$.

ఇప్పుడు, మనం 27 ను 81 చే గుణించాలి అనుకొందాం. మనం దీనిని సాధారణపద్ధతిలో గుణించి, లబ్దం కనుగొనుట ఒక పద్ధతి. అయితే సంఖ్యలు 27 మరియు 81 ల కన్నా పెద్ద సంఖ్యలైనప్పుడు ఈ గుణకారం కష్టతరం అవుతుంది. మరి ఇటువంటి సందర్భాలలో ఘాతాంకాల ధర్మాలను వుపయోగించి గుణిస్తే గుణకారం సులభతరం అవుతుందా ?

మనకు $81 = 3^4$ మరియు $27 = 3^3$ అని తెలుసు.

ఘాతాంక న్యాయం $a^m \times a^n = a^{m+n}$, ఉపయోగించి, మనం దీనిని

$27 \times 81 = 3^3 \times 3^4 = 3^7$ అని రాయవచ్చు.

ఇప్పుడు మనకు 3 యొక్క ఘాతాల విలువల పట్టిక అందుబాటులో వుంటే మనం 3^7 యొక్క విలువను వెంటనే చెప్పగలం. దీని ద్వారా $81 \times 27 = 2187$ అగును.

ఇదేవిధంగా, 81ను 27చే భాగించాలంటే మనం ఘాతాంక న్యాయం $a^m \div a^n = a^{m-n}$, (ఇందులో $m > n$) ఉపయోగిస్తే, అప్పుడు $81 \div 27 = 3^4 \div 3^3 = 3^1$ లేదా 3 అగును.

ఇచ్చట మనం ఘాతాలనుపయోగించుటలో, గుణకార సమస్యలలో ఘాతాంకాల సంకలనం గానూ, భాగహార సమస్యలో ఘాతాంకాల వ్యవకలనం గానూ మార్చడమైనది. అంటే ఘాతాంకాలు 4 మరియు 3ల సంకలనం మరియు ఘాతాంకాలు 4, 3 ల వ్యవకలనం.

ఇది చేయండి

10, 100, 1000, 10000 మరియు 100000 సంఖ్యలను ఘాతాంకాల రూపంలో రాయండి. ప్రతిసందర్భంలోనూ భూమి మరియు ఘాతాంకాన్ని కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి

(i) గుణకారం చేయకుండా, ఘాతాంకాలనుపయోగించి 16×64 లబ్దం కనుగొనుము.

(ii) గుణకారం చేయకుండా, ఘాతాంకాలనుపయోగించి 25×125 లబ్దం కనుగొనుము.

(iii) 128 మరియు 32 లను 2 యొక్క ఘాతాలుగా రాసి, $128 \div 32$ భాగఫలంను కనుగొనండి.

1.5.2 ఘాతాంకాలను సంవర్గమానాలుగా రాయుట

మనకు $10000 = 10^4$ అని తెలుసు. ఇచ్చట 10 ని భూమి, 4 ను ఘాతాంకం అంటాం. ఒక సంఖ్యను, ఒక భూమిగా గల సంఖ్యకు హెచ్చించి రాయడాన్ని ఘాతాంక రూపం అంటారు. దీనిని మరొక రూపంలో రాస్తే వాటిని సంవర్గమానాలు అంటారు.

ఉదాహరణకు, మనం $\log_{10} 10000 = 4$. అని రాస్తాము.

దీనిని 10 భూమి గా గల 10000 యొక్క సంవర్గమానం 4" అని నిర్వచించవచ్చును.

ఇచ్చట ఘాతాంక రూపంలో గల సంఖ్య యొక్క భూమి, సంవర్గమానంలో కూడా అదే భూమి అయినట్లు గమనించవచ్చును.

అందుచే, $10000=10^4$ అనేది $\log_{10}10000 = 4$ కు సమానమౌతుంది.

మనం సాధారణంగా సంవర్గమానాన్ని దిగువ విధంగా నిర్వచిస్తాము

a మరియు x లు ధనపూర్ణసంఖ్యలై $a \neq 1$ అయివుండి $a^n = x$ అయిన $\log_a x = n$ అగును.

ఈ సంవర్గమానాలను మరింతగా అవగాహన చేసుకొనుటకు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-9. i) $64 = 8^2$ ii) $64 = 4^3$ లను సంవర్గమానరూపంలో రాయండి.

సాధన : (i) $64 = 8^2$ యొక్క సంవర్గమానరూపం $\log_8 64 = 2$.

(ii) $64 = 4^3$ యొక్క సంవర్గమానరూపం $\log_4 64 = 3$.

ఈ ఉదాహరణలో, మనం 8 భూమిగా గల 64 యొక్క సంవర్గమానం 2 మరియు 4 భూమిగా గల 64 యొక్క సంవర్గమానం 3. కావున వేర్వేరు భూములు (ఆధారాలు) కలిగిన ఒక సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానాలు విభిన్నంగా ఉంటాయి.

ఇది చేయండి

$16 = 2^4$ ను సంవర్గమానం తెలపండి. ఇది $\log_2 16$ కు సమానం అవుతుందా?

ఉదాహరణ-10. కింది వానిని ఘాతాంక రూపాలలో రాయండి.

(i) $\log_{10}100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$ (iv) $\log_{10}10 = 1$

సాధన : (i) $\log_{10}100=2$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $10^2 = 100$.

(ii) $\log_5 25=2$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $5^2 = 25$.

(iii) $\log_2 2=1$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $2^1 = 2$.

(iv) $\log_{10}10=1$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $10^1 = 10$.

(iii) మరియు (iv) సందర్భాలలో మనం $\log_{10}10 =1$ మరియు $\log_2 2=1$ అని గమనించాము. దీని నుండి మనం సాధారణంగా, ఏ భూమి 'a' అయిననూ $a^1 = a$, కావున $\log_a a = 1$ అగును.

ప్రయత్నించండి.

$a^0 = 1$ అయిన $\log_a 1=0$ అని నిరూపించండి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది వానిని సంవర్గమానరూపంలో రాయండి.

   (i) $11^2 = 121$ (ii) $(0.1)^2 = 0.01$ (iii) $a^x = b$

2. క్రింది వానిని ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

   (i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_4 64 = 3$ (iii) $\log_a x = b$ (iv) $\log_2 2 = 1$

ఉదాహరణ-11. కింది సంవర్గమానాల విలువలను గణించండి.

(i) $\log_3 9$ (ii) $\log_8 2$ (iii) $\log_c \sqrt{c}$

సాధన : (i) $\log_3 9 = x$ అయిన దీని ఘాతాంక రూపం $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x=2$

(ii) $\log_8 2=y$ అయిన దీని ఘాతాంక రూపం $8^y=2 \Rightarrow (2^3)^y=2 \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

(iii) $\log_c \sqrt{c}=z$ అయిన దీని ఘాతాంక రూపం $c^z = \sqrt{c} \Rightarrow c^z = c^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

1.5.3 సంవర్గమాన మొదటి న్యాయము

మనం ఘాతాంక న్యాయాలు తెలుసుకున్నట్లే, సంవర్గమానాలలో ప్రధానంగా మూడు ధర్మాలున్నాయి. క్రింద మనం ఈ సంవర్గమాన న్యాయాలను నిరూపించుటను తెలుసుకుందాం.

1.5.3a సంవర్గమాన మొదటి న్యాయము

$x = a^n$ మరియు $y = a^m$, ఇందులో $a>0$ మరియు $a \neq 1$ అయిన సంవర్గమానాలను క్రింది విధంగా రాయవచ్చును.

$\log_a x = n$ మరియు $\log_a y = m$ .... (1)

ఘాతాంక న్యాయాలలో మొదటి న్యాయం $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ను వినియోగిస్తే

మనకు $xy = a^n \times a^m = a^{n+m}$ i.e. $xy = a^{n+m}$ వస్తుంది.

దీనిని సంవర్గమాన రూపంలో రాయగా, మనకు

$\log_a xy = n+m$ .... (2)

కాని (1) నుండి $n = \log_a x$ మరియు $m=\log_a y$ తీసుకుంటే

మనకు $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

కావున, దీని నుండి రెండు సంఖ్యలను గుణించాలంటే, ఆ లబ్ధం యొక్క సంవర్గమానం కనుగొంటాం. దీనికొరకు ప్రతిసంఖ్య సంవర్గమానంను సంకలనం చేస్తాము. దీనినే సంవర్గమాన మొదటి న్యాయం అంటాము.

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

1.5.3b సంవర్గమాన రెండవ న్యాయాన్ని మనం $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ గా నిర్వచిస్తాము

ప్రయత్నించండి

ఘాతాంక న్యాయం $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ఉపయోగించి సంవర్గమాన రెండవ న్యాయాన్ని నిరూపించండి.

1.5.3c సంవర్గమాన మూడవ న్యాయము

$x = a^n$ అయిన $\log_a x = n$ అగును.

m యొక్క ఘాతానికి $x = a^n$ ను ఇరువైపులా హెచ్చింపగా,

$$x^m = (a^n)^m$$

ఘాతాంక న్యాయాలనుపయోగించి

$$x^m = a^{nm}$$ అగును.

మనం x^m ను ఒకే ప్రమాణం గల పదం అనుకుంటే, సంవర్గమాన రూపం

$$\log_a x^m = nm$$ అవుతుంది.

అంటే $\log_a x^m = m \log_a x$ ($a^n = x$ కావున $\log_a x = n$)

దీనిని మనం మూడవన్యాయం అంటాము. ఒక ఘాత సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానంను ఆఘాత సంఖ్య ఘాతాంకంను, ఆ సంవర్గమానంతో గుణించగా వచ్చు లబ్దానికి సమానమగును అని నిర్వచించవచ్చు.

$$\mathbf{\log_a x^m = m \log_a x}$$

ఉదాహరణ-12. log15 ను విస్తరించండి.

సాధన : $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $\log 15 = \log (3 \times 5)$

$= \log 3 + \log 5$

ఉదాహరణ-13. $\log \frac{343}{125}$ ను విస్తరించండి.

సాధన : $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

$\log_a x^m = m \log_a x$ కావున

$= 3\log 7 - 3\log 5$

కావున $\log \frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$.

ఉదాహరణ-14. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ ను ఒకే సంవర్గమానంగా రాయండి.

సాధన : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ ($m \log_a x = \log_a x^m$ కావున)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ ($\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ కావున)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \frac{1125}{32}$ ($\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ కావున)

ఇవి చేయండి

1. క్రింది లబ్దాలను $\log_a x + \log_a y$ రూపంలో రాయండి

 (i) 8×32 (ii) 49×343 (iii) 81×729

2. కింది భాగఫలాలను $\log_a x - \log_a y$ రూపంలో రాయండి.

 (i) $8 \div 64$ (ii) $81 \div 27$

3. కింది ఘాతాంక రూపాలను సంవర్గమాన రూపాలలో రాయండి

 (i) $4^3 = (2^2)^3$ (ii) $36^2 = (6^2)^2$

అభ్యాసం - 1.5

1. కింది వానిని సంవర్గమాన రూపంలో రాయండి.

 (i) $3^5 = 243$ (ii) $2^{10} = 1024$ (iii) $10^6 = 1000000$

 (iv) $10^{-3} = 0.001$ (v) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ (vi) $6^0 = 1$

 (vii) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ (viii) $\sqrt{49} = 7$ (ix) $27^{\frac{2}{3}} = 9$ (x) $32^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$

2. కింది వానిని ఘాతరూపంలో రాయండి.

(i) $\log_{18}324 = 2$ (ii) $\log_{10}10000 = 4$ (iii) $\log_a \sqrt{x} = b$

(iv) $\log_4{}^8 = x$ (v) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = y$

3. కింది వాని విలువలను గణించండి.

(i) $\log_{25}5$ (ii) $\log_{81}3$ (iii) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

(iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x \sqrt{x}$ (vi) $\log_2 512$

(vii) $\log_{10}0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$

4. కింది వానిని log N రూపంలోనికి సూక్ష్మీకరించి N విలువను కనుగొనండి. (మీరు సంవర్గమానభూమిగా 10 ని తీసుకోవచ్చు. కాని ఏ భూమికైననూ ఫలితాలు తుల్యమవుతాయి)

(i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log 16 - \log 2$ (iii) $3 \log 4$

(iv) $2 \log 3 - 3 \log 2$ (v) $\log 243 + \log 1$ (vi) $\log 10 + 2 \log 3 - \log 2$

5. కింది వానిని విస్తరించి రాయండి.

(i) $\log 1000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$

(iv) $\log \frac{p^2q^3}{r}$ (v) $\log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

1.5.4 సంవర్గమానాలకు ప్రామాణిక భూములు (ఆధారం) (పరీక్షలకొరకు ఉద్దేశించబడినవి కావు)

సంవర్గమానాలకు మనం సాధారణంగా రెండు ఆధారాలతో (భూములు) నిర్వచిస్తాము. ఇవి **భూమి 10 మరియు భూమి e**

సంవర్గమానాలకు మనం ఒక సమాసం $\log x$ అని వ్రాస్తే దానిని భూమి 10గా వ్రాసామని అర్థం. క్యాలిక్యులేటర్లలో ముందుగానే సంవర్గమానాలకు తగిన ప్రోగ్రాం చేయబడి 'log' అనే 'కీ' ఉంటుంది. ఇది నొక్కితే ఒక సంఖ్యకు 10 భూమిగా గల సంవర్గమానవిలువ తెలుస్తుంది.

ఉదాహరణకు

$\log 2 = 0.301029995664\ldots$

$\log 3 = 0.4771212547197\ldots$

log 2 మరియు log 3 కరణీయసంఖ్యలేనా?

ఇక రెండవ సంవర్గమాన భూమి 'e'. ఈ గుర్తును మనం ఘాతాంక స్థిరాంకం అంటాము. ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య. ఇది అనంతంగా వుండి అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందని దశాంశంగా వుంటుంది. దీని విలువ సుమారుగా 2.718 గా తీసుకుంటారు. భూమి 'e' ని మనం ఎక్కువగా శాస్త్ర, గణిత అనువర్తనాలలో వినియోగిస్తారు. భూమి 'e' గా గల సంవర్గమానాలు అంటే $\log_e$ ను మనం సూక్ష్మంగా 'ln' అని సూచిస్తాము. కావున "$\ln x$" భూమి 'e'గా కలిగిన సంవర్గమానం అని అర్థము. ఇటువంటి సంవర్గమానాలను "సహజ సంవర్గమానాలు" అంటారు. క్యాలిక్యులేటర్లలో 'ln' అనే 'కీ' సహజ సంవర్గమాన విలువలు తెలుపుతుంది.

ఉదాహరణకు

$\ln(2) = 0.6931471805599\ldots$

$\ln(3) = 1.0986122886681\ldots$

ln(2) మరియు ln(3) కరణీయాలేనా?

1.5.5 సంవర్గమానాల అనువర్తనాలు (పరీక్షలకొరకు ఉద్దేశించబడినవి కావు)

సంవర్గమానాల అనువర్తనాలను క్రింది కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా అవగాహన చేసుకుందాం.

ఉదాహరణ-15. భూకంప తీవ్రతను $M=\log\frac{I}{S}$ అనే సమీకరణ ద్వారా కనుగొనవచ్చునని 1935 సం॥లో చార్లెస్ రిక్టర్ నిర్వచించాడు. ఇందులో 'I' అనేది భూకంప తీవ్రత యొక్క కుదుపు మరియు 'S' అనేది "భూకంప కేంద్రం వద్ద తీవ్రత" ను తెలుపుతాయి.

(a) భూ కంప కేంద్రం వద్ద తీవ్రత కన్నా, భూకంప తీవ్రత యొక్క కుదుపు 10 రెట్లు వున్నచో తీవ్రతను కనుగొనండి.

(b) భూకంప తీవ్రత రిక్టర్ స్కేలుపై 10 గా నమోదైతే కేంద్రం వద్ద తీవ్రతకు ఎన్నిరెట్లు కుదుపుగా వున్నట్లు చెప్పవచ్చును?

సాధన :

(a) భూకంపతీవ్రత కుదుపును 'I' గా తీసుకుంటే

$I = 10\,S$ అగును

భూకంప తీవ్రత కనుగొనుటకు

$M = \log\frac{I}{S}$ సూత్రం ఉపయోగిస్తే

$\therefore$ భూకంప తీవ్రత

$$M = \log\frac{I}{S}$$

$$= \log 10$$

$$= 1$$

(b) సాధారణ భూకంప తీవ్రత (కేంద్రం వద్ద ఏర్పడినది) కన్నా భూకంప తీవ్రత యొక్క కుదుపు x రెట్లు వున్నదనుకుంటే

భూకంప కుదుపు తీవ్రత $\mathrm{I} = xS$ అగును

మనకు

$$\mathrm{M} = \log \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{S}}$$ అని తెలుసు

కావున భూకంప తీవ్రత

$$\mathrm{M} = \log \frac{xs}{s}$$

లేదా $\mathrm{M} = \log x$

మనకు $\mathrm{M} = 10$ అని ఇవ్వబడింది.

కావున $\log x = 10$ అందువలన $x = 10^{10}$ అగును.

ప్రయత్నించండి

ఒక ద్రావణం యొక్క pH విలువను కనుగొనుటకు మనం $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}+]$ అని వాడతాము. ఇందులలో pH అనేది ద్రావణం యొక్క ఆమ్ల స్వభావంను మరియు H^+ అనేది హైడ్రోజన్ అయాన్ గాఢతను తెలియజేస్తుంది.

(i) శంకర్ అమ్మమ్మ వాడే లక్స్‌సబ్బులలో హైడ్రోజన్ అయాన్ గాఢత $9.2 \times 10^{(-12)}$ అయితే దాని pH విలువ ఎంత?

(ii) టమాట పండు యొక్క pH విలువ 4.2 అయితే దానిలో హైడ్రోజన్ అయాన్ గాఢత ఎంత ఉంటుంది?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[పరీక్షల కొరకు నిర్దేశించడినది కాదు]

1. n ఒక సహజ సంఖ్యగా కలిగిన సంఖ్య 6^n యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉంటుందా? కారణాలు తెలపండి.
2. $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ అనేది సంయుక్త సంఖ్య అగునా? నీ జవాబును సమర్థించండి.
3. ఏ సహజ సంఖ్య 'n' కైననూ 12^n యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో '0' అంకె వుంటుందో, లేదో సరిచూడండి.
4. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య n గా కలిగిన సంఖ్యలు $n, n+2$ లేదా $n+4$ లలో ఏదో ఒక సంఖ్య3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడునని నిరూపించండి.
5. $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి. ఇదేవిధంగా $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ అకరణీయమగునో, కరణీయమగునో సరిచూడండి.

6. భాగహారం చేయకుండానే, కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాయునపుడు ఎన్ని అంకెల తర్వాత అంతమొందే దశాంశాలుగా ఏర్పడతాయో తెలపండి. తర్వాత భాగహారం చేసి సరిచూడండి. ఏమి గమనిస్తారు?

(i) $\frac{5}{16}$ (ii) $\frac{13}{2^2}$ (iii) $\frac{17}{125}$ (iv) $\frac{13}{80}$ (v) $\frac{15}{32}$ (vi) $\frac{33}{2^2 \times 5}$

7. $x^2 + y^2 = 6xy$ అయిన $2 \log (x + y) = \log x + \log y + 3 \log 2$ అని చూపండి.

8. $\log_{10} 2 = 0.3010$ అయిన 4^{2013} సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలుంటాయో తెలపండి.

గమనిక : ఒక సంఖ్య సంవర్గమానంలో పూర్ణాంక భాగం గురించి, దశాంశ భాగం గురించి మీ ఉపాధ్యాయునిని అడిగి తీసుకొండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు ప్రధానకారణాంకాల వరుసక్రమం ఏదైనప్పటికీ ఇది ఏకైకం" అని నిర్వచింపవచ్చును

2. p ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయి వుండి a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే అప్పుడు a ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

3. x ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతమైదే దశాంశం అయినపుడు x ను p, q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అయివున్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు p మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m అగును ఇందులో n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.

4. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధ రూపం 2^n5^m కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

5. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం అగును.

6. a, x లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$ అయివుండి $a^n = x$ అయిన మనం $\log_a x = n$ అని నిర్వచిస్తాం.

7. సంవర్గమాన న్యాయాలు

(i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(iii) $\log_a x^m = m \log_a x$

8. సంవర్గమానాలను అన్ని రకాల గణిత ప్రక్రియలలో ముఖ్యంగా ఇంజనీరింగ్, సైన్సు, వ్యాపారం, అర్థశాస్త్రంలలో విరివిగా వినియోగిస్తారు.

అధ్యాయము

2 సమితులు

(Sets)

2.1 పరిచయం

క్రింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

1. యూక్లిడ్, పైథాగరస్, గాస్, లైబ్నిట్జ్, ఆర్యభట్ట, భాస్కరాచార్య
2. a,e,i,o,u
3. సంతోషం, దుఃఖం, కోపం, ఆతృత, ఆనందం, తికమకపడటం.
4. క్రికెట్, ఫుట్‌బాల్, ఖో-ఖో, కబడ్డీ, బాస్కెట్‌బాల్
5. 1, 3, 5, 7, 9.....

ఏం గమనించారు? ఉదాహరణ 1లో కొంతమంది గణిత శాస్త్రజ్ఞుల పేర్లు ఉన్నాయి. ఉదాహరణ 2లో ఆంగ్లభాషలోని అచ్చులున్నాయి. ఉదాహరణ 3లో కొన్ని ఉద్వేగాలు ఉన్నాయి. ప్రతి ఉదాహరణలో ఉన్న పేర్లు/అంశాలు/ వస్తువులు ఏదో ఒక విషయంలో పోలికను కలిగి వున్నాయని మనం గమనించవచ్చు. అనగా అవి అన్నీ ఒక సముదాయంగా ఏర్పడినాయి. ఉదాహరణ 4, 5 లలోని సముదాయాలను ఏమనవచ్చు?

గణితంలో కూడా మనం ఇలాంటి సముదాయాలను గమనించవచ్చు. ఉదాహరణకి సహజసంఖ్యలు, ప్రధాన సంఖ్యలు, ఒక తలంలోని చతుర్భుజములు మొదలగునవి. మనం ఇప్పటి వరకు చూసిన ఉదాహరణలన్ని సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాలు లేదా భావనలే. "సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్నే" సమితి అని అంటారు. గణితశాస్త్రంలో సమితి వాదాన్నే ఒక కొత్త భావనగా చెప్పవచ్చు. ఈ సమితి వాదాన్ని 'జార్జి కాంటర్' (1845-1918) అభివృద్ధి పరిచారు. ఈ అధ్యాయంలో మనం సమితులు, వాటి ధర్మాలు మరియు సునిర్వచిత వస్తువులు, సమితుల మూలకాలు, సమితుల రకాల గురించి నేర్చుకొంటాము.

2.2 సునిర్వచిత సమితులు

సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్నే 'సమితి' అంటామని మనం తెలుసుకున్నాం. సునిర్వచితం అనగా

1. సమితిలోని వస్తువులన్నింటికి ఒకే విధమైన సామాన్య పోలిక లేదా ధర్మం కల్గి ఉండాలి. మరియు
2. ఏదైనా ఒక వస్తువు సమితికి చెందినది, లేనిదీ నిర్ధారించేటట్లు ఉండాలి.

'సునిర్వచితం' గురించి మనం కొన్ని ఉదాహరణలతో అవగాహన చేసుకుందాం. క్రింది వాక్యాన్ని పరిశీలించండి. నీ తరగతిలో ఉన్న పొడవైన విద్యార్థులందరి సముదాయం.

పై వాక్యంలో వున్న ఇబ్బంది ఏమిటి? ఇక్కడ ఎవరు పొడుగు అనేది స్పష్టంగా నిర్వచించలేము. 'రిచా' తనకంటే పొడుగ్గా ఉన్న వారందరినీ పొడుగు వాళ్ళుగా నిర్ధారించింది. రిచా సమూహంలో 5 మంది విద్యార్థులున్నారు. 'యశోధర' కూడా తనకంటే పొడవైన వాళ్ళందరిని పొడుగు వాళ్ళుగా నిర్ధారించింది. ఆదే సమూహంలో 10మంది విద్యార్థులున్నారు. 'గణపతి' పొడుగు వాళ్ళంటే 5 అడుగుల కంటే ఎక్కువ ఎత్తు వున్న వాళ్ళని నిర్ధారించాడు. అతని సమూహంలో ముగ్గురు విద్యార్థులున్నారు. వివిధ రకాల వ్యక్తులు వివిధ రకాల సమూహాలని సూచించుకున్నట్లుగా మనం గమనించవచ్చు. అందువలన ఈ సమూహాలు సునిర్వచితం కాదు. అనగా సరిగా నిర్వచింపబడలేదు.

ఇపుడు ఈ క్రింది వాక్యాన్ని పరిశీలిద్దాం :

నీ తరగతిలో ఉన్న మొత్తం విద్యార్థులలో 5 అడుగుల 6 అంగుళాలు కంటే ఎత్తైన వారు లేదా ఎత్తైన వారి సమూహం.

ఈ సందర్భంలో రిచా, యశోధర మరియు గణపతి అందరూ ఒకే సముదాయాన్ని సూచిస్తారు. ఇలాంటి సముదాయాలు ఒక సునిర్వచిత సమితిని ఏర్పరుస్తాయి.

ఇవి చేయండి

1. నీ నిజ జీవితంలోని 'సమితులు'కు 3 ఉదాహరణలు రాయండి.
2. క్రింద కొన్ని సమూహాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిలో సునిర్వచిత సమితులును గుర్తించి (✓) తో సూచించండి.
   (i) నీ తరగతిలోని అందరిలో మంచి విద్యార్థుల సముదాయం
   (ii) ఎరుపు, నీలం, ఆకుపచ్చ, పసుపు, నలుపు
   (iii) 1,2,3,4,5,6,7,....
   (iv) 1, 8, 27, 64, 125, ...

ప్రయత్నించండి

క్రింది సమూహలలో ఏవి సమితులు అవుతాయో సూచించండి.
(i) అన్ని సరిసంఖ్యలు
(ii) ఆకాశంలోని నక్షత్రాలు
(iii) 1, 3, 5, ….. బేసి ధన పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయం

2.3 సమితులు మరియు సమితిలోని మూలకాలని సూచించడం

సాధారణంగా మనం సమితులను ఆంగ్ల భాషలోని పెద్ద అక్షరాలు A, B, C, X, Y, Z తో సూచిస్తాం. సమితులకు సంబంధించి కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

- అన్ని సహజసంఖ్యల సమితిని, Nతో సూచిస్తాం.
- పూర్ణ సంఖ్యల సమితిని, Zతో సూచిస్తాం.
- అకరణీయ సంఖ్యల సమితిని, Qతో సూచిస్తాం.
- వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని, Rతో సూచిస్తాం.

పైన సూచించిన సమితులన్నీ సునిర్వచిత సముదాయాలే. ఎందుకంటే ఏదైన ఇచ్చిన సంఖ్యను దత్తసమితికి చెందుతుందా లేదా మనం నిర్ధారించవచ్చు. మూలకాలకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

T అనే అక్షరంతో ప్రారంభం అయ్యే వారంలోని అన్ని రోజులను సూచించే సమితిలోకి తీసుకున్నామనుకొందాం. అపుడు మనం 'Tuesday' మరియు 'Thursday' మాత్రమే పై సమితిలో ఉంటాయని, సోమవారం కాదని తెలుసు. అపుడు Tuesday మరియు Thursday ని T అక్షరంతో ప్రారంభం అయ్యే వారంలోని అన్ని రోజుల సమితికి "మూలకాలు" అంటాం.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) సాధారణంగా N అనేది సహజ సంఖ్యాసమితిని సూచిస్తుందని మనకు తెలుసు. అప్పుడు 1,2, 3... సహజ సంఖ్యాసమితికి మూలకాలు అవుతాయి. కాని 0 (సున్న) Nకు మూలకం కాదు.

(ii) సమితి 'B' అనేది చతుర్భుజాల సమితి అనుకుంటే

B = {చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, రాంబస్, సమాంతరచతుర్భుజం, ...}

పై సమితి(B)లో మనం త్రిభుజం, ట్రెపీజియం మరియు శంఖువును చేర్చవచ్చా ? చేర్చలేము ఎందుకంటే త్రిభుజం మరియు శంఖువు ' B' సమితికి చెందవు. కాని ట్రెపీజియంను 'B' సమితిలో చేర్చవచ్చు.

దీన్నిబట్టి మనం ఏదైన ఒక వస్తువు ఒక సమితికి చెందితే దాన్ని వస్తువులు / మూలకాలు అంటారని చెప్పవచ్చు. చెందినది (belonging to) అని తెలుపటాన్ని మనం $\in$ గుర్తును సూచిస్తాం.

కావున $1 \in N$ అనగా మూలకం 1 సమితి N కు చెందుతుందని అర్థం అదేవిధంగా $0 \notin N$ అంటే మూలకం 0(సున్న) సమితి Nకు చెందదు అని అర్థం.

'సమితుల్ని' మనం అనేక విధాలుగా సూచించవచ్చు మరియు రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి మనం ఆంగ్లభాషలోని అన్ని అచ్చుల సమితిని తీసికొంటే, దాన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చు.

(i) V = {a, e, i, o, u}. ఇక్కడ మనం మూలకాలన్నింటినీ వరుసగా, ఒక జాబితాగా (curly) ఫ్లవర్ బ్రాకెట్లలో సూచించాం. దీన్ని సమితులను 'రోస్టర్ రూపంలో' రాయడం అంటాం. రోస్టర్ రూపంలో సమితికి చెందిన మూలకాలన్నింటిని రాసి, 'కామా' (,)లలో వేరుచేసి ఫ్లవర్ బ్రాకెట్లలో ఉంచుతాము.

(ii) V = {x : x అనేది ఆంగ్లభాషలోని ఒక అచ్చులు}

లేక V = {x | x అనేది ఆంగ్ల భాషలోని ఒక అచ్చు}

పై విధంగా సమితులని రాయటాన్ని 'సమితి నిర్మాణ రూపం' అని అంటాం. ఇక్కడ సమితిలోని మూలకాన్ని x (లేక y, z మొదలగు ఏవైన గుర్తులు)గా సూచిస్తాం. x ప్రక్కన ఒక (:) colon ఉంచి ఆ సమితికి చెందిన మూలకాల యొక్క లక్షణాలు లేదా ధర్మాలను రాస్తాం. మొత్తాన్నే ఫ్లవర్ { } బ్రాకెట్లలో ఉంచుతాం.

C = {2, 3, 5, 7, 11}, 13 కంటే తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్యల సమితి అనుకొందాం.

పై సమితిని ఈ క్రింది విధంగా కూడా రాయవచ్చు.

C = {x | x, అనేది13 కంటే తక్కువైన ఒక ప్రధానసంఖ్య } లేదా

C = {x: x, అనేది 13 కంటే తక్కువైన ఒక ప్రదానసంఖ్య}.

ఉదాహరణ-1. ఈ క్రింది వాటిని రోస్టర్ మరియు సమితి నిర్మాణరూపంలో రాయండి.

(i) 42 ను భాగించగల అన్ని సహజసంఖ్యల సమితి.

(ii) 10 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యల సమితి.

సాధన :

(i) B అనేది 42ను భాగించగల అన్ని సహజసంఖ్యల సమితి అనుకొంటే

$B = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ (రోస్టర్ రూపం)

$B = \{x : x$ అనేది 42ను భాగించగల సహజసంఖ్యల సమితి$\}$ (సమితి నిర్మాణరూపం)

(ii) A అనేది 10 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యల సమితి అనుకొంటే

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (రోస్టర్ రూపం)

$B = \{x : x$ అనేది 10 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యల సమితి$\}$ (సమితి నిర్మాణరూపం)

గమనిక : (i) రోస్టర్ రూపంలో మూలకాలను ఏ క్రమంలలో రాశాము అనేదానికి ప్రాధాన్యత లేదు. ఎలాగైనా రాయచ్చు. పై ఉదాహరణ 1లో మనం $\{1, 3, 7, 21, 2, 6, 4, 42\}$ అని కూడా రాయచ్చు.

(ii) సమితి యొక్క మూలకాలను రోస్టర్ రూపంలో రాసేటపుడు ఒకే మూలకాన్ని మరలా మరలా రాయకూడదు. ఉదాహరణకి "SCHOOL" అనే అక్షరాలతో ఏర్పడే సమితిని {S, C, H, O, L} అని సూచించాలి. {S, C, H, O, O, L} అని కాదు.

ఉదాహరణ-2. సమితి $B = \{x : x$ ఒక సహజ సంఖ్య మరియు $x^2 < 40\}$ ని రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.

సాధన : 1 నుంచి ప్రారంభమయ్యే సహజసంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాలును చూద్దాం. 7 దగ్గరకి వచ్చేసరికి 7 యొక్క వర్గం 49 అవుతుంది. మరియు 40 కంటే ఎక్కువ. కావున కావల్సిన సహజసంఖ్యలు 1, 2, 3, 4, 5, 6.

రోస్టర్ రూపంలో రాయబడిన సమితి $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సమితులలోని మూలకాల జాబితాను రాయండి.
   (i) G అనేది 20 కు రాయగల కారణాంకాలన్నింటి కలిగిన సమితి.
   (ii) F అనేది 17 మరియు 61 మధ్యగల 4 యొక్క గుణిజాలు మరియు 7 చే భాగించబడే మూలకాల సమితి
   (iii) $S = \{x : x$ అనేది 'MADAM' అనే పదంలో గల అక్షరాల సమితి$\}$
   (iv) $P = \{x : x$ అనేది 3.5 మరియు 6.7 మధ్యగల పూర్ణాంకాల సమితి$\}$
2. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.
   (i) B అనేది ఒక సంవత్సరంలో ఒక నెలకి 30 రోజులుగా గల అన్ని నెలల సమితి.
   (ii) P అనేది 10 కంటే తక్కువైన అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.
   (iii) X అనేది ఇంద్రధనస్సులో గల అన్ని రంగుల సమితి
3. A అనేది 12కు కారణాలుగా గల సమితి. ఈ క్రింది వానిలో ఏది 'A' సమితికి చెందదు.
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

ప్రయత్నించండి

1. బీజగణిత మరియు రేఖాగణిత భావనలతో కొన్ని సమితులను మీరే ఎన్నుకొని ఏర్పరచండి.
2. రోస్టర్ రూపంతో, సమితి నిర్మాణ రూపంను జతపరచండి.

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a) $\{x : x$ ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు 18ను భాగించునది$\}$
(ii)	{0}	(b) $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x^2 - 9 = 0\}$
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c) $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x + 1 = 1\}$
(iv)	{3, -3}	(d) $\{x : x$ అనేది PRINCIPAL అనే పదంలో ఉన్న అక్షరం$\}$

అభ్యాసం - 2.1

1. క్రింది వాటిలో ఏవి సమితులు? మీ సమాధానాన్ని సహేతుకంగా సమర్థించండి.
   (i) "J" అనే అక్షరంతో ప్రారంభమయ్యే ఒక సంవత్సరంలో గల అన్ని నెలల సమూహాలు.
   (ii) భారతదేశంలో గల అత్యంత ప్రతిభావంతులైన 10 మంది రచయితల సమూహం.
   (iii) ప్రపంచంలో గల 11 మంది బాగా క్రికెట్ ఆడేటటువంటి "బ్యాట్స్‌మెన్"ల టీమ్.
   (iv) నీ తరగతిలో గల అందరు బాలుర సముదాయం
   (v) అన్ని సరి పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయం
2. A={0, 2, 4, 6}, B = {3, 5, 7}, C = {p, q, r} అయిన క్రింది ఖాళీలలో $\in$ లేదా $\notin$ సరైన గుర్తును పూరించండి.
   (i) 0 ….. A (ii) 3 ….. C (iii) 4 ….. B
   (iv) 8 ….. A (v) p ….. C (vi) 7 ….. B
3. క్రింది వాక్యాలను గుర్తులనుపయోగించి వ్యక్తపరచండి.
   (i) 'x' అనే మూలకం 'A'కు చెందదు.
   (ii) 'd' అనేది 'B' సమితి యొక్క ఒక మూలకం.
   (iii) '1' అనేది సహజ సంఖ్యాసమితి 'N' కు చెందుతుంది.
   (iv) '8' అనేది P అనే ప్రధాన సంఖ్యల సమితికి చెందదు.
4. క్రింది వాక్యాలు సత్యమా? అసత్యమా? తెలపండి.
   (i) 5 $\notin$ {ప్రధానసంఖ్యలు}
   (ii) S = {5, 6, 7} $\Rightarrow$ 8 $\in$ S.
   (iii) -5 $\notin$ W ,'W' సమితి పూర్ణాంకాల సమితి.
   (iv) $\frac{8}{11} \in$ Z , 'Z' అనేది పూర్ణసంఖ్యల సమితి.

5. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.

(i) B = {x : x అనేది 6 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య}

(ii) C = {x : x అనేది ఒక రెండంకెల సహజసంఖ్య మరియు రెండంకెల మొత్తం 8}.

(iii) D = {x : x అనేది 60ని భాగించగల ఒక ప్రధానసంఖ్య}.

(iv) E = {BETTER అనే పదంలోని మొత్తం అక్షరాలు}.

6. క్రింది సమితులను సమితి నిర్మాణ రూపంలో రాయండి.

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32}

(iii) {5, 25, 125, 625} (iv) {1, 4, 9, 25, ... 100}

7. క్రింది సమితుల లోని మూలకాలన్నింటిని రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.

(i) A = {x : x అనేది 50 కంటే ఎక్కువ, 100 కంటే తక్కువ అయిన సహజసంఖ్య}

(ii) B = {x : x ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x^2 = 4$}

(iii) D = {x : x అనేది "LOYAL" అనే పదంలోని ఒక అక్షరం}

8. రోస్టర్ రూపం నుండి సమితినిర్మాణరూపానికి జతపరచండి.

(i)	{1, 2, 3, 6}	(a)	{x : x అనేది ప్రధానసంఖ్య మరియు 6ని భాగిస్తుంది}
(ii)	{2, 3}	(b)	{x : x అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సహజ సంఖ్య}
(iii)	{M, A, T, H, E, I, C, S}	(c)	{x : x అనేది సహజ సంఖ్య మరియు 6ని భాగిస్తుంది}
(iv)	{1, 3, 5, 7, 9}	(d)	{x : x అనేది MATHEMATICS అనే పదంలో ఒక అక్షరం}

2.4 సమితులు - రకాలు

క్రింది సమితులకు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) A = {x : x అనేది 1 కంటే తక్కువైన ఒక సహజసంఖ్య}

(ii) D = {x : x అనేది 2 చే భాగించబడే బేసి ప్రధానసంఖ్య}

సమితి A, D లలో ఎన్ని మూలకాలున్నాయి? 1 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య. ఏదీ ఉండదని మనకు తెలుసు. కావున సమితి A లో ఎలాంటి మూలకాలుండవు. ఇటువంటి సమితులను శూన్యసమితి అంటాం. A శూన్య సమితి.

అదేవిధంగా 2 చే భాగించగల బేసి ప్రధానసంఖ్యలుండవు. కావున D కూడ శూన్య సమితే

ఒక సమితిలో ఎలాంటి మూలకాలు లేకుంటే అటువంటి సమితులను శూన్య సమితులంటాము. శూన్యసమితిని ϕ లేదా { } తో సూచిస్తాం.

క్రింద మరికొన్ని శూన్య సమితులకు ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి.

(i) A = $\{x : 1 < x < 2$, x ఒక సహజసంఖ్య$\}$

(ii) B = $\{x : x^2 - 2 = 0$ మరియు x ఒక అకరణీయసంఖ్య$\}$

(iii) D = $\{x : x^2 = 4$, x ఒక బేసి సంఖ్య$\}$

గమనిక : ϕ మరియు $\{0\}$ రెండు కూడా వేర్వేరు సమితులు. సమితి $\{0\}$ లో ఒకే ఒక మూలకం 0 (సున్న) ఉంది. $\{\}$ శూన్యసమితి.

పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులు :

క్రింది సమితులను పరిశీలిద్దాం.

(i) A = {నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులు} (ii) L = {p,q,r,s}

(iii) B = $\{x : x$ ఒక సరిసంఖ్య$\}$ (iv) J = $\{x : x$, 7 యొక్క గుణిజం$\}$

పైన సూచించిన ప్రతి సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యల జాబితాను నీవు రాయగలవా? (i) లో మూలకాల సంఖ్య నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరూ అవుతారు. (ii)లో సమితి L లో ఉన్న మూలకాల సంఖ్య 4. దీన్ని బట్టి సమితి A మరియు L లోని మూలకాల సంఖ్యను మనం లెక్కించవచ్చు గదా! ఎందుకంటే A , L సమితులలో పరిమిత సంఖ్యలో మూలకాలున్నాయి. ఇలాంటి సమితులను 'పరిమిత సమితులు" అంటాం.

ఇపుడు సమితి Bలో పరిశీలించినట్లయితే అన్ని సరిసంఖ్యలు మూలకాలుగా ఉన్నాయి. మనం వీటిని లెక్కించలేము. అంటే సమితి 'B'లోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితంగా లేదు. అదేవిధంగా సమితి 'J' లోని మూలకాలను కూడా లెక్కించలేము. దీన్నిబట్టి సమితి B మరియు J లోని మూలకాల సంఖ్య అపరిమితం అని కనుగొన్నాము. ఇలాంటి సమితులను 'అపరిమిత సమితులు' అని అంటారు.

ఇచ్చిన బిందువు నుంచి మనం ఎన్ని సరళరేఖలైనా గీయవచ్చు. అందువలన ఇది అపరిమిత సమితి అవుతుంది. అదేవిధంగా అన్ని పూర్ణసంఖ్యల సమూహాలలో చివర సరిసంఖ్య మరియు బేసిసంఖ్యలను మనం కనుగొనడం సాధ్యంకాదు. అందువలన ఒక సమితి పరిమిత సమితి కాకపోతే అది అపరిమిత సమితి అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) వారంలోని రోజుల సమితిని 'W' అనుకుంటే 'W' పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(ii) $x^2 - 16 = 0$ సమీకరణం యొక్క సాధన సమితి 'S' అనుకుంటే 'S' పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(iii) ఒక సరళరేఖపై ఉన్న బిందువుల సమితిని 'G' అనుకుంటే 'G' అపరిమిత సమితి అవుతుంది.

ఉదాహరణ-3. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో, లేక అపరిమిత సమితులో పేర్కొనండి.

(i) $\{x : x \in N$ మరియు $(x - 1)(x - 2) = 0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ మరియు $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ మరియు $2x - 2 = 0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ మరియు x ప్రధానసంఖ్య$\}$

(v) $\{x : x \in N$ మరియు x బేసిసంఖ్య$\}$

సాధన :

(i) ఈ సందర్భంలో xకి 1 లేదా 2 విలువలుగా తీసికోవచ్చు. కావున $\{1,2\}$ పరిమితసమితి అవుతుంది. ఇది పరిమిత సమితి.

(ii) $x^2 = 4$ అనగా $x = +2$ లేక -2 కాని $x \in N$ లేదా x ఒక సహజ సంఖ్య కాబట్టి $\{2\}$గా తీసికోవాలి. ఇది కూడా పరిమిత సమితే.

(iii) దత్తసమితి $x = 1$ కాని $1 \in N$ కావున ఇది కూడా పరిమిత సమితి.

(iv) దత్తసమితిలో అన్ని ప్రధానసంఖ్యల సమితిగా ఉన్నాయి. ప్రధానసంఖ్యలు అనంతము కావున ఈ సమితి అపరిమిత సమితి

(v) దత్త సమితిలో అనంతమైన బేసి సంఖ్యలున్నాయి. కావున ఈ సమితి కూడా అపరిమిత సమితియే.

క్రింది పరిమిత సమితులను పరిశీలిద్దాం.

A = {1, 2, 4}; B = {6, 7, 8, 9, 10}; C = {x : x అనేది INDIA అనే పదంలోని అక్షరం}

ఇక్కడ,

సమితి A లోని మూలకాల సంఖ్య = 3.

సమితి B లోని మూలకాల సంఖ్య = 5.

సమితి Cలోని మూలకాల సంఖ్య = 4 (సమితి Cలో 'I' మూలకం రెండుసార్లు వస్తుంది. ఒక సమితిలో ఉన్న మూలకాలు వేర్వేరుగా ఉండాలని మనకు తెలుసుకదా. కావున సమితి C లోని మూలకాల సంఖ్య 4 అవుతుంది).

ఒక సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యను తెలిపే దానిని ఆ సమితికి 'కార్డినల్ సంఖ్య' అని అంటాం. సమితి A యొక్క కార్డినల్ సంఖ్యకు n(A) = 3 అని సూచిస్తాం.

అదేవిధంగా, n(B) = 5, n(C) = 4.

గమనిక : శూన్యసమితిలో మూలకాలు ఉండవు. శూన్యసమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య '0'(సున్న) అవుతుంది.

$$\therefore n(\phi) = 0$$

ఉదాహరణ-4. A = {1, 2, 3}; B = {a, b, c} అయిన n(A) మరియు n(B) కనుగొనండి.

సాధన : సమితి A లో 3 వేర్వేరు మూలకాలున్నాయి $\therefore$ n(A) = 3

మరియు సమితి B లో 3 వేర్వేరు మూలకాలున్నాయి $\therefore$ n(B) = 3

ఇవి చేయండి

1. క్రింది వానిలో శూన్యసమితులు ఏవి? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
   (i) 2 మరియు 3 ల మధ్యనున్న పూర్ణసంఖ్యల సమితి.
   (ii) 1 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యా సమితి.
   (iii) 2 చే భాగించినపుడు శేషం సున్న వచ్చే బేసిసంఖ్యా సమితి.

2. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో ఏవి అపరిమిత సమితులో తెలపండి. నీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు ఇవ్వండి.

(i) $A = \{x : x \in N$ మరియు $x < 100\}$ (ii) $B = \{x : x \in N$ మరియు $x \leq 5\}$

(iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(v) $\{x : x$ వారంలో ఒక రోజు$\}$.

3. క్రింది సమితులలో అపరిమిత సమితిని ✓ చేయండి.

(A) 10 కంటే తక్కువైన పూర్ణాంకాల సమితి (B) 10 కంటే తక్కువైన ప్రధానసంఖ్యల సమితి

(C) 10 కంటే తక్కువైన పూర్ణసంఖ్యల సమితి (D) 10 యొక్క కారణాంకాల సమితి

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సమితులలో ఏవి శూన్యసమితులు ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(i) $A = \{x : x^2 = 4$ మరియు $3x = 9\}$.

(ii) ఒక తలంలోని మొత్తం త్రిభుజాలలో మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 కంటే తక్కువైన త్రిభుజాల సమితి.

2. $B = \{x : x + 5 = 5\}$ శూన్యసమితి కాదు. ఎందువలన ?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

శూన్య సమితి పరిమిత సమితి అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా? లేదా అసత్యమా? ఎందుకు ?

అభ్యాసం - 2.2

1. క్రింది సమితులలో ఏవి శూన్యసమితులో, ఏవి కావో తెల్పండి.

(i) ఒక బిందువు గుండా వెళ్ళే సరళరేఖల సమితి

(ii) 2 చే భాగించబడే బేసి సహజ సంఖ్యల సమితి.

(iii) $\{x : x$ ఒక సహజసంఖ్య, $x < 5$ మరియు $x > 7\}$

(iv) $\{x : x$ ఏవేని రెండు సమాంతర రేఖల ఉమ్మడి బిందువు$\}$

(v) సరి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

2. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో ఏవి అపరిమిత సమితిలో తెలపండి.

(i) ఒక సంవత్సరంలోని నెలల సమితి (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

(iii) 99 కంటే తక్కువగా గల ప్రధానసంఖ్యల సమితి.

3. క్రింది సమితులలో ప్రతి సమితిని, పరిమిత సమితో లేదో అపరిమిత సమితో తెల్పండి.

(i) ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాల సమితి

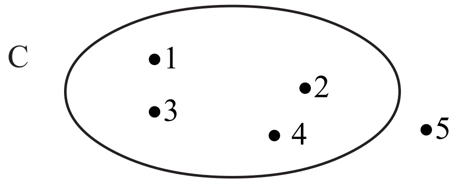
(ii) X- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే రేఖల సమితి

(iii) 5 యొక్క గుణిజాల సమితి.

(iv) (0, 0) మూలబిందువు గుండా వేళ్ళే వృత్తాల సమితి.

2.5 సమితులను సూచించడానికి ఉపయోగించే చిత్రాలు

S అనేది ఒక సమితి 'x' ఒక వస్తువు అయితే $x \in S$ లేక $x \notin S$ కావాలి. ప్రతి సమితిని ఒక సంవృత వక్రం C గీసి సూచించవచ్చు. C లోని మూలకాలను వక్రం లోపల బిందువులుగా చూపిస్తూ C కి చెందని మూలకాలను వక్రం బయట సూచించాలి. ఉదాహరణకి ప్రక్క పటంలో సమితి C = {1, 2, 3, 4}.



2.6 విశ్వసమితి మరియు ఉపసమితి

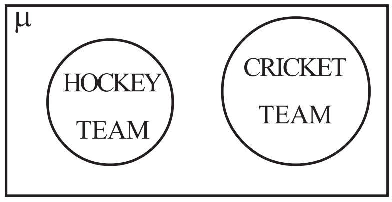
నీ పాఠశాల నుండి ఒక క్రికెట్ జట్టును ఎంపిక చేయాలనుకోండి. జట్టు ఎంపిక చేయాలంటే ఎలాంటి సమితిని తీసికోవాలి ? నీ పాఠశాలలోని అందరు విద్యార్థుల సమితిని తీసికోవాలి. హాకీజట్టును ఎంపిక చేయాలనుకోండి. మరలా నీ పాఠశాల లోని విద్యార్థులందరిలోనే హాకీజట్టు ఏర్పాటు చేసుకోవాలి. కాబట్టి నీ పాఠశాల నుంచి ఏ జట్టును ఎంపిక చేయాలన్న పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరి సమితిలో నుండే ఎంపిక చేసుకోవాలి. అందువలన నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరినీ విశ్వసమితిగా అనుకోవచ్చు.

విశ్వసమితికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

(i) మన రాష్ట్రంలో వివిధ రకాలైన, ప్రజాసమూహాలను అధ్యయనం చేయాలంటే, ఆంధ్రప్రదేశ్ లోని ప్రజలందరూ విశ్వసమితి లోకి వస్తారు.

(ii) మన దేశంలో వివిధ రకాలైన ప్రజా సమూహాలను అధ్యయనం చేయాలంటే భారతదేశంలో నివసించే ప్రజలందరూ విశ్వసమితి అవుతారు.

విశ్వసమితిని '$\bigcup$' లేదా 'μ' తో సూచిస్తాం. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రంలో μ చే సూచిస్తాము.



ఒకవేళ వాస్తవ సంఖ్యా సమితి R ని విశ్వసమితిగా తీసుకుంటే మరి కరణీయ మరియు అకరణీయ సంఖ్యా సమితుల గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చు ?

అకరణీయ సంఖ్యా సమితి

$$Q = \{x : x = \frac{p}{q}, p, q \in z \text{ మరియు } q \neq 0\}$$

పై అకరణీయ సంఖ్య సమితిని ఈ క్రింది విధంగా చదువుతాము. 'Q' అనేది అన్ని సంఖ్యలు $x, x = \frac{p}{q}$ మరియు p, qలు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

లేక Q అనేది $x = \frac{p}{q}$ $p, q \in z$ and $q \neq 0\}$

అంటే Q లోని ప్రతి మూలకం Rలో కూడా మూలకం అవుతుంది. అందువలన Qని Rకి ఉపసమితి అంటాం. Q, Rకి ఉపసమితి అయితే దానిని $Q \subset R$ అని రాస్తాం.

గమనిక : మన సౌకర్యార్థం '⇒' గుర్తును (Implies) తరచుగా వాడచ్చు. ఈ గుర్తును ఉపయోగించి, ఉపసమితి యొక్క నిర్వచనాన్ని క్రింది విధంగా రాయచ్చు.

$a \in A$ అయితే $A \subset B \Rightarrow a \in B$, A, B లు రెండు సమితులు

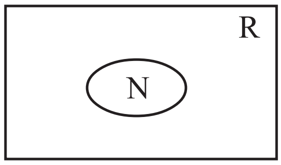
a, A కి ఒకే మూలకమైతే A, Bకి ఉపసమితి అవుతుంది ⇒ 'a' అనేది B కి కూడా మూలకం అవుతుంది.

వాస్తవ సంఖ్యాసమితి Rకి చాలా ఉపసమితులు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి,

సహజ సంఖ్యా సమితి N = {1, 2, 3, 4, 5, ……}

పూర్ణాంకాల సమితి W = {0, 1, 2, 3, ...}

పూర్ణ సంఖ్యల సమితి Z = {…., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …..}



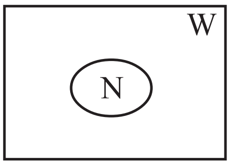
అకరణీయ సంఖ్యలు కాని వాస్తవ సంఖ్యలన్ని కరణీయ సంఖ్యసమితి Q^1 అవుతాయి.

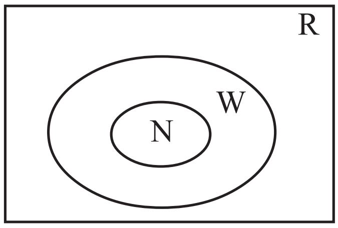
అందువలన $Q^1 = \{x : x \in R$ మరియు $x \notin Q\}$. అంటే అకరణీయ సంఖ్యలు కాని అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు. ఉదా: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ మరియు π.

అదేవిధంగా సహజ సంఖ్య సమితి, N అనేది పూర్ణాంకాల సమితి W కి ఉపసమితి అవుతుంది. దీన్ని $N \subset W$ అని రాస్తాం. మరియు W, Rకి ఉపసమితి.

i.e., $N \subset W$ మరియు $W \subset R$

$\Rightarrow N \subset W \subset R$





కొన్ని ఉపసమితులకు సంబంధించిన ముఖ్యమైన సంబంధాలు చూస్తే

$N \subset Z \subset Q, Q \subset R, Q^1 \subset R$, మరియు $N \not\subset Q^1$.

ఉదాహరణ-5. ఆంగ్ల భాషలో అచ్చుల సమితి తీసుకున్నట్లయితే V = {a, e, i, o, u}.

ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాలన్నీ ఒక సమితిగా తీసుకున్నట్లయితే A = {a, b, c, d, ….., z}. ఈ ఉదాహరణలో విశ్వసమితి మరియు ఉపసమితిని గుర్తించండి.

సాధన : సమితి V లో ఉన్న ప్రతిమూలకం Aకి కూడా మూలకంగా ఉంది. కాని సమితి Aలో ఉన్న ప్రతిమూలకం సమితి Vలో లేదు. అందువలన సమితి V, సమితి A కు ఉపసమితి మరియు $V \subset A$, అనగా $a \in V$ అయినపుడు $a \in A$ అవుతుంది.

గమనిక : శూన్యసమితి ϕ లో మూలకాలు ఏవీ ఉండవు కాబట్టి, ϕ ప్రతి సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి కాదు అంటే $(A \not\subset B)$ సమితి A లోని కనీసం ఒక మూలకమైనా సమితి Bలో ఉండదు.

ఉపసమితులకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

- సమితి $C = \{1, 3, 5\}$, సమితి Dకి ఉపసమితి, $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ అనగా సమితి C కి చెందిన ప్రతి మూలకం 1, 3, 5 సమితి D కు కూడా చెందుతుంది.
- $A = \{a, e, i, o, u\}$ మరియు $B = \{a, b, c, d\}$ అయిన సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి కాదు. ఇంకా సమితి B కూడా A సమితికి ఉపసమితి కాదు.

2.6.1 సమసమితులు

క్రింది సమితులను గమనిద్దాం.

A = {సచిన్, ద్రావిడ్, కోహ్లి}

B = {ద్రావిడ్, సచిన్, ధోని}

C = {కొహ్లి, ద్రావిడ్, సచిన్}

సమితులు, A, B, C లలో మీరు ఏమి పరిశీలించారు ? సమితి Aలో ఉన్న ఆటగాళ్ళందరూ సమితి C లో ఉన్నారు. కాని సమితి Bలో కాదు, అంటే సమితి A మరియు Cలలో ఒకే రకమైన మూలకాలున్నాయి కాని సమితులు A, Bలలో మూలకాలు వేర్వేరుగా ఉన్నాయి. కాబట్టి సమితులు A మరియు C లు సమసమితులు. కాని సమితులు A, B లు సమానం కావు.

రెండు సమితులు A మరియు Cలు సమానం కావాలంటే A లోని ప్రతి మూలకం Cలో ఉండాలి. అలాగే Cలోని ప్రతి మూలకం Aకి చెందాలి.

A మరియు C లు సమసమితులైతే $A = C$ అని రాస్తాం.

ఉదాహరణ-6. క్రింది సమితులను తీసికుందాం.

$$A = \{p, q, r\} \qquad B = \{q, p, r\}$$

పై సమితులలో A లోని ప్రతి మూలకం Bలో కూడా ఉంది. $\therefore A \subset B$.

అదేవిధంగా సమితి Bలోని ప్రతి మూలకం Aలో కూడా ఉంది. $\therefore B \subset A$.

దీన్నిబట్టి మనం $B \subset A$ మరియు $A \subset B \Leftrightarrow A = B$ అని కూడా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $\Leftrightarrow$ గుర్తు రెండు వైపులా వర్తిస్తుంది మరియు దీనిని **if and only if** ("iff") అని చదువుతాం.

ఉదాహరణ-7. $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ మరియు 'N ' సహజసంఖ్యా సమితి. అయిన A మరియు N లు సమానమవుతాయేమో సరిచూడండి?

సాధన : రెండు సమితులలో మూలకాలు ఒకటే. కావున A మరియు N సమితులు రెండు కూడా సహజసంఖ్యా సమితులే. అందువలన సమితి A మరియు సమితి N లు సమానం. $A = N$.

ఉదాహరణ-8. సమితులు A = {p, q, r, s} మరియు B = {1, 2, 3, 4}లు సమానమా?

సాధన : సమితి A మరియు సమితి Bలలో ఒకే మూలకాలు లేవు. కాబట్టి $A \neq B$.

ఉదాహరణ-9. 6 కంటే తక్కువైన ప్రధానాంకాల సమితిని A అనుకోండి. మరియు 30కి ప్రధాన కారణాంకాలు గల సమితిని P అనుకోండి. A మరియు P సమానమా ? సరిచూడండి.

సాధన: 6 కంటే తక్కువైన, ప్రధానాంకాల సమితి A = { 2,3,5}

30కి ప్రధాన కారణాంకాలు 2, 3 మరియు 5. కావున P = { 2,3,5}

సమితి A మరియు P లలో ఒకే రకమైన మూలకాలున్నాయి కాబట్టి A మరియు P సమానం.

ఉదాహరణ-10. A = {x : x అనేది 'ASSASSINATION' అనే పదంలోని అక్షరం}

B = {x : x అనేది STATION అనే పదంలోని అక్షరం}

అయిన A మరియు B సమితులు సమానం అని చూపండి.

సాధన : A = {x : x అనేది 'ASSASSINATION' అనే పదంలోని అక్షరం} అని ఇవ్వబడినది.

సమితి Aని ఈ విధంగా కూడా రాయచ్చు. A = {A,S,I,N,T,O} . ఎందుకంటే సమితిలోని మూలకాలు మరలా మరలా రాయకూడదు.

B = {x : x అనేది STATION అనే పదంలోని అక్షరం} అని ఇవ్వబడింది.

B = {A,S,I,N,T,O} అని కూడా రాయచ్చు.

కావున A మరియు B లోని మూలకాలు సమానం A = B

అభ్యాసం - 2.3

1. క్రింది వాటిలో సమసమితులు ఏవి?

   (i) A = {x : x అనేది 'FOLLOW' అనే పదంలో ఒక అక్షరం}

   (ii) B = {x : x అనేది 'FLOW' అనే పదంలో ఒక అక్షరం}

   (iii) C = {x : x అనేది 'WOLF' అనే పదంలోని ఒక అక్షరం}

2. క్రింది సమితులను పరిశీలించి, క్రింద ఇచ్చిన వాక్యాలు సరియగునట్లు = లేదా ≠ తో ఖాళీలను పూరించండి.

   A = {1, 2, 3}; B = {మొదటి మూడు సహజసంఖ్యలు}

   C = {a, b, c, d}; D = {d, c, a, b}

   E = {a, e, i, o, u}; F = {ఆంగ్లభాషలోని అచ్చులసమితి}

(i) A ...... B (ii) A......E (iii) C ...... D

(iv) D ...... F (v) F...... A (vi) D ...... E

(vii) F ...... B

3. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి సమితిలో $A = B$ అవుతుందో లేదో తెలపండి.

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, a, b\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{x : x$ ఒక ధన సరిపూర్ణ సంఖ్య మరియు $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x,$ 10 యొక్క గుణిజం$\}$ $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\ldots\}$

$E = \{2, 4, 6\}$ మరియు $F = \{6, 2, 4\}$ అనే సమితులను తీసుకున్నట్లయితే $E = F$ అని గమనించవచ్చు. ఎందుకంటే E లోని ప్రతి మూలకం Fకు చెందుతుంది కాబట్టి 'E', 'F'కి ఉపసమితి అవుతుంది. అలాగే F లోని ప్రతి మూలకం E కు చెందుతుంది. కావున F, Eకి ఉపసమితి అవుతుంది. ఈ విధంగా ప్రతి సమితి దానికదే ఉపసమితి అవుతుందని మనం చూపవచ్చు.

A మరియు B లలో ఒకే మూలకాలున్నట్లయితే, అవి సమానం. అనగా $A = B$. ఈ పరిశీలన వల్ల మనం ప్రతి సమితి దాని కదే ఉపసమితి అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-11. $\phi, A = \{1, 3\}, B = \{1, 5, 9\}, C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ సమితులను తీసికొందాం. క్రింది ప్రతి సమితుల జతలలో $\subset$ లేదా $\not\subset$ గుర్తును ఉంచండి.

(i) ϕ ..... B (ii) A ..... B (iii) A ..... C (iv) B C

సాధన : (i) $\phi \subset B$ ఎందుకంటే శూన్య సమితి ప్రతిసమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

(ii) $A \not\subset B$, ఎందుకంటే $3 \in A$ కాని $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$, ఎందుకంటే $1, 3 \in A$ మరియు C.

(iv) $B \subset C$, ఎందుకనగా B లో ఉన్న ప్రతి మూలకం Cలో కూడా ఉన్నది.

ఇవి చేయండి

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{ \}$.

అయిన క్రింది ఖాళీలను $\subset$ లేదా $\not\subset$ లతో పూరించండి.

(i) A ..... B (ii) C ..... A (iii) B ..... A

(iv) A ..... C (v) B ..... C (vi) ϕ ..... B

2. క్రింది వాక్యాలలో 'సత్యమైన' వాటిని పేర్కొనండి.

(i) $\{ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{ 0 \}$

ప్రయత్నించండి

1. A = {చతుర్భుజాలు}, B = {చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, ట్రెపీజియం, రాంబస్}. $A \subset B$ లేక $B \subset A$ అవుతుందేమో పేర్కొనండి. నీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
2. A = {a, b, c, d} అయిన A కి ఎన్ని ఉపసమితులున్నాయి? (శూన్యసమితి మరియు సమసమితులను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.)
   (A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 65
3. P అనేది 5 యొక్క కారణాంకాల సమితి. Q అనేది 25 యొక్క కారణాంకాల సమితి. R అనేది 125 యొక్క కారణాంకాల సమితి క్రింది వానిలో ఏది అసత్యం.
   (A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$
4. A అనేది 10 కంటే తక్కువైన, ప్రధానాంకాల సమితి B అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సంఖ్యల సమితి. C అనేది 10 కంటే తక్కువైన సరిసంఖ్యల సమితి. క్రింది వానిలో 'సత్యమైన' వాక్యాలేవి?
   (i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$
   (iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $X \subset A$

క్రింది సమితులను తీసికొందాం.

A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {1, 2, 3, 4, 5}

A లో ఉన్న మూలకాన్ని B లో ఉన్నాయి $\therefore A \subset B$.

B లో ఉన్న మూలకాలన్ని C లో ఉన్నాయి $\therefore B \subset C$.

Aలో ఉన్న మూలకాలన్నీ Cలో ఉన్నాయి $\therefore A \subset C$.

కాబట్టి, $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

అభ్యాసం - 2.4

1. A = {1, 2, 3, 4} అయిన క్రింది వాక్యాలలో 'సత్యమైన' వాటిని తెలుపండి.
   (i) $2 \in A$ (ii) $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$
   (iii) $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ (iv) $\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
2. క్రింది వాక్యాలకు తగు కారణాలు పేర్కొనండి.
   (i) $\{1, 2, 3, ..., 10\} \neq \{x : x \in N$ మరియు $1 < x < 10\}$
   (ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1$ మరియు $x \in N\}$

(iii) {5, 15, 30, 45} $\neq$ {x : x, 15 యొక్క గుణిజం}

(iv) {2, 3, 5, 7, 9} $\neq$ {x : x ఒక ప్రధాన సంఖ్య}

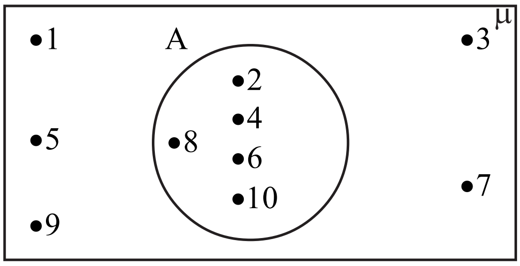
3. క్రింది సమితులకు గల ఉపసమితులన్నింటి జాబితాను రాయండి.
(i) B = {p, q} (ii) C = { x, y, z} (iii) D = {a, b, c, d}
(iv) E = [1, 4, 9, 16] (v) F = {10, 100, 1000}

2.7 వెన్ చిత్రాలు

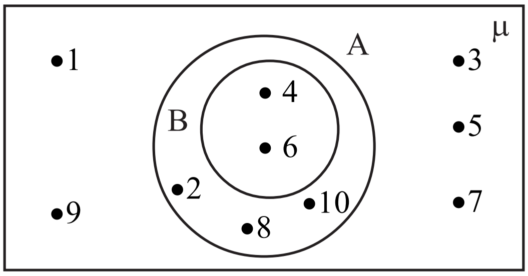
ఇప్పటికే మనం సమితులను సూచించే కొన్ని విధములైన చిత్రాలను చూశాం. ఇపుడు ఇంకా వివరంగా వాటి గురించి అధ్యయనం చేద్దాం. సమితుల మధ్య సంబంధాలను సూచించటానికి ఆయిలర్ లేదా వెన్ చిత్రాలను మనం ఉపయోగిస్తాం. ఈ చిత్రాలలో దీర్ఘచతురస్రాలు మరియు సంవృత వక్రాలు సాధారణంగా వృత్తాలు ఉంటాయి.

ఈ అధ్యాయంలో ఇంతకు ముందే సూచించిన విధంగా, విశ్వసమితి సాధారణంగా దీర్ఘ చతురస్రంలో సూచిస్తాం.

(i) μ={1, 2, 3, …., 10} విశ్వసమితి అని అంతకంటే A = {2, 4, 6, 8, 10} సమితి విశ్వసమితికి ఉపసమితులు అవుతుంది. దీన్ని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.

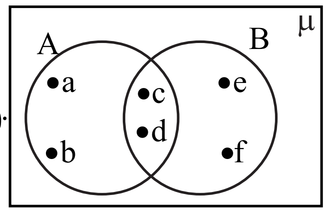


(ii) μ = {1, 2, 3, …., 10} విశ్వసమితి, A = {2, 4, 6, 8, 10} మరియు B = {4, 6} లు ఉపసమితులు మరియు B ⊂ A. అయిన మనం క్రింది వెన్ చిత్రం ద్వారా పై వవాటిని సూచించవచ్చు.



(iii) A = {a, b, c, d} మరియు B = {c, d, e, f}.

మనం ఈ సమితులని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా సూచించవచ్చు.



2.8 సమితులలో ప్రాథమిక పరిక్రియలు

అంకగణితంలో కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహారం లాంటి పరిక్రియలు ఉంటాయని మనకు తెలుసుగదా! అదేవిధంగా సమితులలో గూడా మనం సమ్మేళనాన్ని, ఛేదనాన్ని మరియు భేదాల పరిక్రియలను నిర్వచిద్దాం.

2.8.1 సమితుల సమ్మేళనం

ఉదాహరణ-12. నీ తరగతి విద్యార్థులలో మంగళవారం పాఠశాలకు హాజరుకాని వారిని సమితి A అని, బుధవారం హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి B అనుకొందాం.

అపుడు A = {రోజా, రాము. రవి} మరియు

B = {రాము, ప్రీతి, హనీఫ్}

ఇపుడు మనం మంగళవారం లేక బుధవారం పాఠశాలకు హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి K, అనుకుంటే అపుడు రోజా ∈ K అవుతుందా? రాము ∈ K అవుతుందా? రవి ∈ K అవుతుందా? హనీఫ్ ∈ K అవుతుందా? ప్రీతి ∈ K అవుతుందా? అఖిల ∈ K అవుతుందా?

రోజా, రాము, రవి, హనీఫ్ మరియు ప్రీతి అందరూ K సమితికి చెందుతారు. కాని అఖిల K సమితికి చెందదు.

అందువలన, K = {రోజా, రాము, రహీం, పృథ్వి}

ఇక్కడ మనం Kని A, B సమితుల సమ్మేళనం అంటారు. A, B సమితుల సమ్మేళనమనగా A మరియు B సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకాలను ఒకే సారి తీసికొని రెండింటిలోని మూలకాలన్నింటిని కలిగి వున్న సమితి అని అర్థం, సమితుల సమ్మేళనంను 'μ' గుర్తులో సూచిస్తాం.

సంకేతంగా $A \cup B$ అని రాస్తూ A యూనియన్ B అని చదువుతాం.

$A \cup B = \{x : x \in A$ లేదా $x \in B\}$

ఉదాహరణ-13. $A = \{2, 5, 6, 8\}$ మరియు $B = \{5, 7, 9, 1\}$ అయిన $A \cup B$ కనుగొనుము.

సాధన : $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A \cup B$ రాసేటపుడు A .B సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకమైన 5ని ఒకేసారి తీసికొన్నామని గమనించవచ్చు.

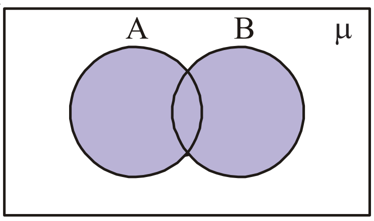
ఉదాహరణ-14. $A = \{a, e, i, o, u\}$ మరియు $B = \{a, i, u\}$ అయిన $A \cup B = A$ అని చూపండి.

సాధన : $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$ అవుతుంది.

ఈ ఉదాహరణ ద్వారా సమితి A మరియు దాని ఉపసమితి B ల సమ్మేళనం సమితి A అవుతుందని తెలుస్తుంది.

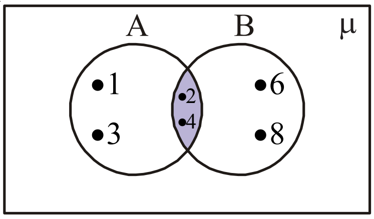
అంటే $B \subset A$ అయితే $A \cup B = A$.

సమితుల సమ్మేళనం వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా గుర్తించబడింది. (షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం)



ఉదాహరణ-15. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{2, 4, 6, 8\}$ అయిన $A \cup B$ ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి.

సాధన :



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

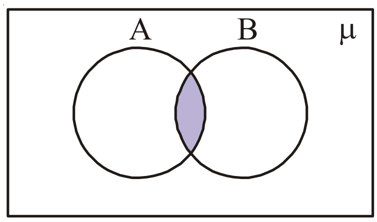
2.8.2 సమితుల ఛేదనం

మరొకసారి తరగతికి హాజరుకాని విద్యార్థుల ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ఈ సారి మనం మంగళవారం మరియు బుధవారం కూడా హాజరు కాని విద్యార్థుల సమితిని L అనుకుందాం.

L = {రాము} అని కనుగొన్నాం.

ఇక్కడ, 'L' ని A, B సమితుల ఛేదనం అని అంటాం.

సాధారణంగా, సమితి A మరియు సమితి B లలో ఉన్న ఉమ్మడి మూలకాలను A, B సమితుల ఛేదనం అంటాం. అనగా సమితి A మరియు సమితి B కి రెండింటికి చెందిన మూలకాలు. సమితుల ఛేదనాన్ని మనం $A \cap B$. (A ఇంటర్‌సెక్షన్ B అని చదువుతాం) అని సూచిస్తాం.



$A \cap B$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ మరియు } x \in B\}$$

ప్రక్కపటంలో, A, B సమితుల ఛేదనాన్ని వెన్ చిత్రాలలోని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతంలో మనం చూపవచ్చు.

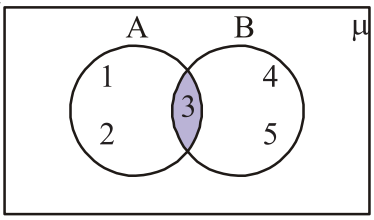
ఉదాహరణ-16. $A = \{5, 6, 7, 8\}$ మరియు $B = \{7, 8, 9, 10\}$ అయిన $A \cap B$ కనుగొనుము.

సాధన : సమితుల A, B లలోకి ఉమ్మడి మూలకాలు 7, 8.

$\therefore A \cap B = \{7, 8\}$.

ఉదాహరణ-17. $A = \{1, 2, 3\}$ మరియు $B = \{3, 4, 5\}$ అయిన $A \cap B$ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి.

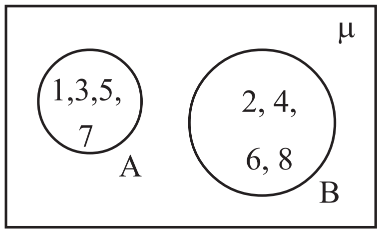
సాధన : A, B సమితుల ఛేదనాన్ని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంలో చూపవచ్చు.



$A \cap B = \{3\}$

2.8.3 వియుక్త సమితులు

A = {1, 3, 5, 7} మరియు B = {2, 4, 6, 8} అనుకోండి. సమితి A మరియు సమితి Bలలో ఉమ్మడి మూలకాలు లేవని మనం చూడచ్చు. అలాంటి సమితులను వియుక్త సమితులు అని అంటాం. వియుక్త సమితులను వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.



$A \cap B = \phi$

ఇవి చేయండి

1. $A = \{1, 3, 7, 8\}$ మరియు $B = \{2, 4, 7, 9\}$ అయిన $A \cap B$ కనుక్కోండి.
2. $A = \{6, 9, 11\}; B = \{\ \}$ అయిన $A \cup \phi$ కనుక్కోండి.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; B = \{2, 3, 5, 7\}$. $A \cap B$ని కనుగొని $A \cap B = B$ అని చూపండి.
4. $A = \{4, 5, 6\}; B = \{7, 8\}$ అయిన $A \cup B = B \cup A$ అని చూపండి.

ప్రయత్నించండి.

1. A మరియు B వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లుగా కొన్ని సమితులు A మరియు Bలు, వాని మూలకాలు ఎన్నుకొని జాబితా తయారుచేయండి.
2. $A = \{2, 3, 5\}$, అయిన $A \cup \phi$ మరియు $\phi \cup A$ కనుగొని పోల్చండి.
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ అయిన $A \cup B$, $A \cap B$ కనుగొనండి. ఫలితం నుండి మీరు ఏమి గమనించారు ?
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. గా ఇవ్వబడినవి. A, Bల ఛేదనాన్ని కనుగొనండి.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఏవైనా రెండు వియుక్త సమితుల ఛేదనం శూన్యసమితి అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా ? అసత్యమా?

2.8.4 సమితుల భేదం

మూలకాలు సమితి A కు మాత్రం చెంది, B సమితికి చెందకుండా ఉండే మూలకాలని A, B సమితుల భేదం అని అంటారు.

$A - B = \{x : x \in A$ మరియు $x \notin B\}$.

ఉదాహరణ-18. A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = {4, 5, 6, 7} అనుకొనుము. A – Bని కనుగొనుము.

సాధన : A = {1, 2, 3, 4, 5} మరియు B = {4, 5, 6, 7} అని ఇవ్వబడినవి. 'A' సమితికి మాత్రమే చెంది, సమితి 'B' కి చెందని మూలకాలను మాత్రం తీసికొనాలి.

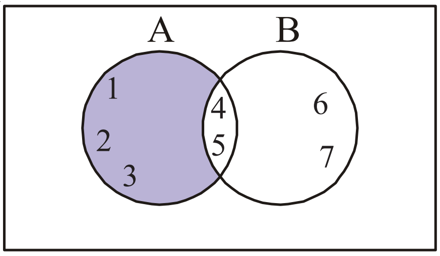
$\therefore$ A – B = {1, 2, 3}. $\because$ 4, 5 మూలకాలు B లో ఉన్నాయి. కాబట్టి తీసికోలేదు.

అదేవిధంగా B – A అంటే, B సమితిలో ఉన్న మూలకాలను మాత్రమే తీసికోవాలి.

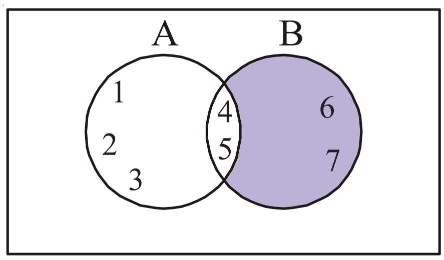
$\therefore$ B – A = {6, 7} (4, 5 మూలకాలు A లో ఉన్నాయి).

A – B $\neq$ B – A అని గమనించండి.

A-B ల వెన్ చిత్రం క్రింద చూపబడింది.

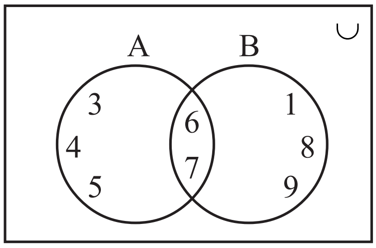


A – B = {1, 2, 3}



B – A = {6, 7}

ఉదాహరణ-19. క్రింది సమితులను పరిశీలించండి.



A = {3, 4, 5, 6, 7} $\therefore$ n(A) = 5

B = {1, 6, 7, 8, 9} $\therefore$ n(B) = 5

$A \cup B$ = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} $\therefore n(A \cup B) = 8$

$A \cap B$ = {6, 7} $\therefore n(A \cap B) = 2$

$\therefore n(A \cup B) = 5 + 5 - 2 = 8$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ అని మనం పరిశీలించవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

1. A = {1, 2, 3, 4 ,5}; B = {4, 5, 6, 7}అయిన A – B మరియు B – A కనుగొనండి. A – B, B – A లు రెండు సమానమా?
2. V = {a, e, i, o, u} మరియు B = {a, i,k, u} అయిన V – B మరియు B – V.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

సమితులు A – B, B – A మరియు $A \cap B$ పరస్పరం వియుక్త సమితులు అవుతాయి. కొన్ని ఉదాహరణల సహాయంతో ఈ సత్యాన్ని పరిశీలించండి

అభ్యాసం - 2.5

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ అయిన $A \cap B$ మరియు $B \cap A$ కనుగొనండి. రెండు సమానమా?

2. $A = \{0, 2, 4\}$, $A \cap \phi$ మరియు $A \cap A$ కనుగొనుము. వ్యాఖ్యానించండి.

3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ మరియు $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ అయిన $A - B$ మరియు $B - A$లను కనుగొనుము.

4. A మరియు B లు రెండు సమితులు, $A \subset B$ అయిన $A \cup B$ ఎంత?

5. $A = \{x : x$ ఒక సరి సహజసంఖ్య$\}$

   $B = \{x : x$ ఒక బేసి సహజ సంఖ్య$\}$

   $C = \{x : x$ ఒక బేసి సహజ సంఖ్య$\}$

   $D = \{x : x$ ఒక ప్రధానసంఖ్య$\}$ అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

   $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$.

6. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

   $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $D = \{5, 10, 15, 20\}$ అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

   (i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$ (v) $C - A$

   (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$ (ix) $C - B$ (x) $D - B$

7. క్రింద ఇవ్వబడిన వాక్యాలు సత్యమా లేక అసత్యమా? తెలుపండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

   (i) $\{2, 3, 4, 5\}$ మరియు $\{3, 6\}$ లు వియుక్త సమితులు

   (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ మరియు $\{a, b, c, d\}$ వియుక్త సమితులు

   (iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ మరియు $\{3, 7, 11, 15\}$ లు వియుక్త సమితులు

   (iv) $\{2, 6, 10\}$ మరియు $\{3, 7, 11\}$ లు వియుక్త సమితులు.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్ని సమితి అంటారు. సునిర్వచిత మనగా

   (i) సమితిలో ఉన్న వస్తువులన్నీ ఒకే లక్షణం లేదా ధర్మాన్నే కల్గి వుంటాయి. మరియు

   (ii) ఏదైనా ఒక వస్తువు సమితికి చెందుతుందో లేదా అని నిర్ధారించవచ్చు.

2. సమితిలోని వస్తువులను మూలకాలు అని అంటాం. 'చెందుతుంది' అని సూచించటానికి $\in$ అనే గుర్తుని ఉపయోగిస్తాం.

3. సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయవచ్చు. సమితిలోని మూలకాలన్నింటిని రాసి కామా (commas)లతో వేరేచేసి, { } (ఫ్లవర్) బ్రాకెట్లలో ఉంచాలి.
4. సమితులను సమితి నిర్మాణరూపంలో కూడా రాయచ్చు.
5. ఒక సమితిలో మూలకాలు లేకుండా ఉంటే ఆ సమితిని శూన్య సమితి అంటాం.
6. ఒక సమితిలోని మూలకాలను లెక్కించగలిగితే ఆ సమితిని పరిమిత సమితి అంటాం.
7. పరిమిత సమితి కానటువంటి సమితులను అపరిమిత సమితులు అని అంటారు.
8. ఒక సమితిలో గల మూలకాల సంఖ్యను ఆ సమితి యొక్క 'కార్డినల్' సంఖ్య అని అంటాం.
9. విశ్వసమితిని 'μ'తో సూచిస్తాం. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రాలలో సూచిస్తాము.
10. సమితి A, Bసమితికి ఉపసమితి ఎపుడవుతుందంటే 'a', సమితి A లో మూలకం అయివుండి, సమితి Bలో గూడా మూలకం అయితే సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది. దీన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాస్తాం. $a \in A \Rightarrow a \in B$ అయితే $A \subset B$ (A, B లు రెండు సమితులు)
11. రెండు సమితులు A మరియు B సమానం కావాలంటే A లోని ప్రతి మూలకం Bలో ఉండాలి మరియు Bలోనే ప్రతి మూలకం కూడా Aలో ఉండాలి.
12. A, B సమితుల సమ్మేళనాన్ని $A \cup B$ అని రాయవచ్చు. $A \cup B = \{x : x \in A$ లేక $x \in B\}$.
13. A, B సమితుల ఛేదనాన్ని $A \cap B$ అని రాయచ్చు $A \cap B = \{x : x \in A$ మరియు $x \in B\}$
14. A, B సమితుల భేదాన్ని $A - B$ లేదా $B - A$ లచే సూచిస్తాము.
15. సమితుల ప్రాథమిక ప్రక్రియలు సూచించటాన్ని వెన్ చిత్రాలు సౌకర్యవంతంగా ఉంటాయి.

అధ్యాయము

3

బహుపదులు

(Polynomials)

3.1 పరిచయం

కింది సందర్భాలను పరిశీలిద్దాము.

1. ఒక పూల తోట త్రిభుజాకారంలో వుంది. అతి పెద్దభుజము, మధ్యభుజం కంటే 3 రెట్లు పెద్దదిగానూ, అతిచిన్న భుజం, మధ్యభుజం కన్నా 2 యూనిట్లు చిన్నదిగానూ వుంది. మధ్యభుజం పొడవు **P** యూనిట్లు. అయితే ఈ త్రిభుజ చుట్టుకొలత **P** ప్రమాణాలలో ఎంత వుంటుంది ?

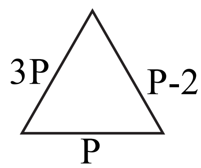
2. ఒక భోజనశాల పొడవు వెడల్పు కన్నా రెండు రెట్లు పెద్దది. ఆ గది వెడల్పు 'x' యూనిట్లు అయితే, దాని నేల వైశాల్యం x ప్రమాణాలలో ఎంత వుంటుంది?

పై రెండు సందర్భాలు పరిశీలిస్తే, ప్రతి దానిలో ఒక అవ్యక్తరాశి వుంది. మొదటి సందర్భంలో, మధ్యభుజం '**P**' యూనిట్లు అని ఇవ్వబడింది.

కావున, త్రిభుజచుట్టుకొలత = భుజాల పొడవుల మొత్తము

$= P + 3P + P - 2$

$= 5P - 2$



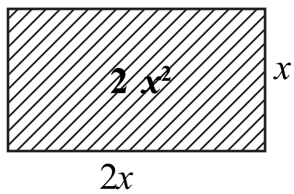
ఇదే విధంగా రెండవ సందర్భంలో పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు

కావున, వెడల్పు $= x$, అయితే పొడవు $= 2x$ అవుతుంది.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= lb$

$= (2x)\,(x)$

$= 2\,x^2$



దీని నుండి త్రిభుజ చుట్టుకొలత $5P - 2$ మరియు దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $2x^2$ అనేవి విభిన్న పరిమాణాలు గల బహుపదులు అని చెప్పవచ్చు.

3.2 బహుపదులు అంటే ఏమిటి?

చర, స్థిరరాశులతో నిర్మితమైన బీజీయ సమాసాలే బహుపదులు. చరరాశులను కొన్ని స్థిరరాశులతో గుణించగా వచ్చు గుణకాలు మరియు వీటిని రుణేతర ధనపూర్ణసంఖ్యల ఘాతాలకు హెచ్చించి వివిధ పరిమాణాలకు రాయబడతాయి. ఉదాహరణకు, $2x + 5$, $3x^2 + 5x + 6$, $- 5y$, x^3 మొ॥నవి బహుపదులు.

$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{2x}}, \frac{1}{y-1}, \sqrt{3x^3}$ మొ॥నవి బహుపదులు కావు.

$\frac{1}{y-1}$ ఎందుకు బహుపది కాదో, మీ స్నేహితులతోనూ, ఉపాధ్యాయునితో చర్చించండి.

ఇవి చేయండి

కింది సమాసాలలో ఏవి బహుపదులు? ఏవికావు? కారణాలు తెల్పండి.

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $4z^2 + \frac{1}{7}$ (iv) $m^2 - \sqrt{2}m + 2$ (v) $P^{-2} + 1$

3.2.1 బహుపది పరిమాణము

x చరరాశిలోగల బహుపది $p(x)$లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకము $p(x)$ బహుపది యొక్క పరిమాణము అగునని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు x చరరాశిలో గల ఒక బహుపది $3x + 5$. దీని పరిమాణము 1, కావున ఇది ఒక రేఖీయ బహుపది. ఇదేవిధంగా $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ మొ॥నవి మరికొన్ని రేఖీయ బహుపదులు. రెండవ పరిమాణము గల బహుపదిని వర్గబహుపది అంటారు.

ఉదాహరణకు $x^2 + 5x + 4$ అనేది x చరరాశి గా గల ఒక వర్గ బహుపది. ఇదేవిధంగా $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $p^2 -1$, $3 - z - z^2$, $y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ అనేవి మరికొన్ని వర్గ బహుపదులు.

$5x^3-4x^2+x-1$ అనే సమాసము x చరరాశిగా గల మూడవ పరిమాణ బహుపది. దీనిని మనం త్రిపరిమాణ బహుపది అంటాము. ఇదేవిధంగా $2 - x^3$, p^3, $\ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ అనేవి మరికొన్ని త్రిపరిమాణ బహుపదులు.

ప్రయత్నించండి

ఏవైనా మూడు త్రిపరిమాణ, వర్గ బహుపదులను, రెండు రేఖీయ బహుపదులను విభిన్న పదాలతో రాయండి.

మనం బహుపదులను ఏ పరిమాణానికైనా రాయవచ్చు. $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$ అనేది 6 వ పరిమాణ బహుపది. $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 -1$ అనేది 10 పరిమాణ బహుపది.

n ఒక సహజసంఖ్యగా వుండి x చరరాశితో కూడి n వ పరిమాణ బహుపదిని మనం రాయవచ్చు.

సాధారణంగా, మనము

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ అనేది n వ పరిమాణ బహుపది అంటాము. ఇందులో $a_0, a_1, a_2 \ldots.. a_{n-1,} a_n$ అనేవి చరరాశి వాస్తవ గుణకాలు మరియు $a_0 \neq 0$

ఉదాహరణకు ఒక చరరాశిలో గల ప్రథమ పరిమాణ బహుపది $ax+b$ అవుతుంది. ఇందులో a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

ప్రయత్నించండి

1. x చరరాశిలో గల వర్గ బహుపది, త్రిపరిమాణ బహుపదుల సాధారణ రూపాలను రాయండి.
2. n పరిమాణం కలిగిన ఒక బహుపది $q(z)$ ను రాయండి. ఇందులో చరరాశి గుణకాలుగా $b_0 \ldots b_n$ తీసుకుంటే, వాటికి ఏ నిబంధనలు వర్తిస్తాయో తెల్పండి.

3.2.2 బహుపది యొక్క విలువ

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ అనే బహుపదిని పరిశీలించండి. ఒక చరరాశి విలువకు ఈ బహుపది యొక్క విలువ ఏమౌతుంది? ఉదాహరణకు $x = 1$ అయినప్పుడు దీని విలువ ఎంత? ఈ బహుపదిలో $x = 1$ ప్రతిక్షేపించిన $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. ఇది $p(x)$లో గల ప్రతిపదంలో చరరాశి x కు బదులుగా 1 ప్రతిక్షేపించగా వచ్చినది అంటే $x = 1$ అయినపుడు $x^2 - 2x - 3$ విలువ -4 అయింది.

ఇదేవిధంగా, $x = 0$ విలువ వద్ద $p(x)$ విలువ $p(0) = -3$ అవుతుంది.

వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు చరరాశి 'x' కు బదులుగా k ను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే విలువ $p(k)$ అవుతుంది. దీనిని $p(x)$ అనే బహుపదికి k వద్ద వచ్చు విలువ అంటాము.

ఇవి చేయండి.

(i) $p(x) = x^2 - 5x - 6$ అయిన $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ విలువలు కనుగొనండి.

(ii) $p(m) = m^2 - 3m + 1$ అయిన $p(1)$ మరియు $p(-1)$ విలువలు కనుగొనండి.

3.2.3 బహుపది శూన్యాలు

$x = 3$,-1 మరియు 2లు వద్ద $p(x) = x^2 - 2x - 3$ విలువలు ఏమిటి?

$p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

ఇదేవిధంగా మనకు $p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

మరియు $p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

మనకు $p(3) = 0$ మరియు $p(-1) = 0$ అయినవి. అంటే $x = 3$ మరియు $x = -1$ అనేవి $p(x) = x^2 - 2x - 3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్యాలు అయినవి.

$p(2) \neq 0$ కావున 2 అనేది $p(x)$ యొక్క 'శూన్యం' కాలేదు.

అందుచే, సాధారణంగా ఒక వాస్తవసంఖ్య k అనేది బహుపది $p(x)$ కు శూన్యం కావాలంటే $p(k) = 0$ కావాలి.

ఇవి చేయండి

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ అయిన $p(0), p(1), p(2), p(3)$ విలువలు కనుగొని $p(x)$ యొక్క శూన్యాలు ఏవో తెల్పండి.

(ii) $x^2 - 9$ అనే బహుపదికి -3 మరియు 3 శూన్యాలు అవుతాయో కాదో సరిచూడండి.

అభ్యాసం - 3.1

1. (a) $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ అయిన కింది వానిని కనుగొనండి.

   (i) x^5 యొక్క గుణకం (ii) $p(x)$ యొక్క పరిమాణం (iii) స్థిరపదము

   (b) మూడు వేర్వేరు బహుపదులను వ్రాసి, ప్రతి దానికి మూడు ప్రశ్నల చొప్పున రూపొందించండి.

2. కింది ప్రవచనాలలో ఏవి సత్యం ? ఏవి అసత్యం ? కారణాలను తెల్పండి.

   (i) $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$ అనే బహుపది పరిమాణం $\sqrt{2}$.

   (ii) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ అనే బహుపదిలో x^2 యొక్క గుణకం 2.

   (iii) స్థిర పదం యొక్క పరిమాణం సున్న.

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ అనేది ఒక వర్గ బహుపది.

   (v) ఒక బహుపది పరిమాణము దానిలో పదాల సంఖ్య కన్నా ఒకటి ఎక్కువ.

3. $p(t) = t^3 - 1$ అయిన $p(1), p(-1), p(0), p(2)$ మరియు $p(-2)$ విలువలు కనుగొనండి.

4. -2 మరియు 2 అనేవి $x^4 - 16$ అనే బహుపదికి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరి చూడండి.

5. $p(x) = x^2 - x - 6$ అనే బహుపదికి 3 మరియు -2 అనేవి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరిచూడండి.

3.3 బహుపదులతో ప్రక్రియలు

ఒక రేఖీయ బహుపదికి 'శూన్యములు' ఏవిధంగా కనుగొనవలెనో ఇదివరకే నేర్చుకున్నాము.

ఉదాహరణకు ఒక బహుపది $p(x) = 2x + 5$ నకు 'k' అనేది ఒక శూన్యము. అనగా $p(k) = 0$ అప్పుడు $2k + 5 = 0$ i.e., $k = \frac{-5}{2}$ అగును.

అందుచే సాధారణముగా $p(x) = ax+b$ అనే బహుపదికి 'k' ఒక శూన్యం అయితే

$p(k) = ak + b = 0,$ i.e., $k = \frac{-b}{a}$ అగును. లేదా $ax + b$ అనే రేఖీయ బహుపది శూన్య విలువ $\frac{-b}{a}$ అగును.

దీని నుండి మనకు రేఖీయ బహుపది శూన్యవిలువ అనేది దాని చరరాశి గుణకాలకు, స్థిరపదానికి సంబంధం కల్గి వున్నదని తెలుస్తున్నది.

ఇదే విధముగా ఎక్కువ పరిమాణము కలిగిన బహుపదుల శూన్యవిలువలకు వాటి చరరాశి గుణకాలతో ఏమైనా సంబంధం కలిగి వుందునా? దీని గూర్చి మీ స్నేహితులలో చర్చించండి. మనం దీని గురించి మరలా చర్చిద్దాము.

3.4 బహుపది శూన్యాలకు జ్యామితీయ అర్థాలు

$p(x)$ బహుపది, k ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన $p(k) = 0$ అయితే 'k' ను బహుపది శూన్యం అంటారని మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు రేఖీయ మరియు వర్గబహుపదులను రేఖా చిత్రాలలో ప్రాతినిధ్య పరుచుట ద్వారా, ఆయా బహుపదుల శూన్యాలకు జ్యామితీయ అర్థాలను తెలుసుకుందాము.

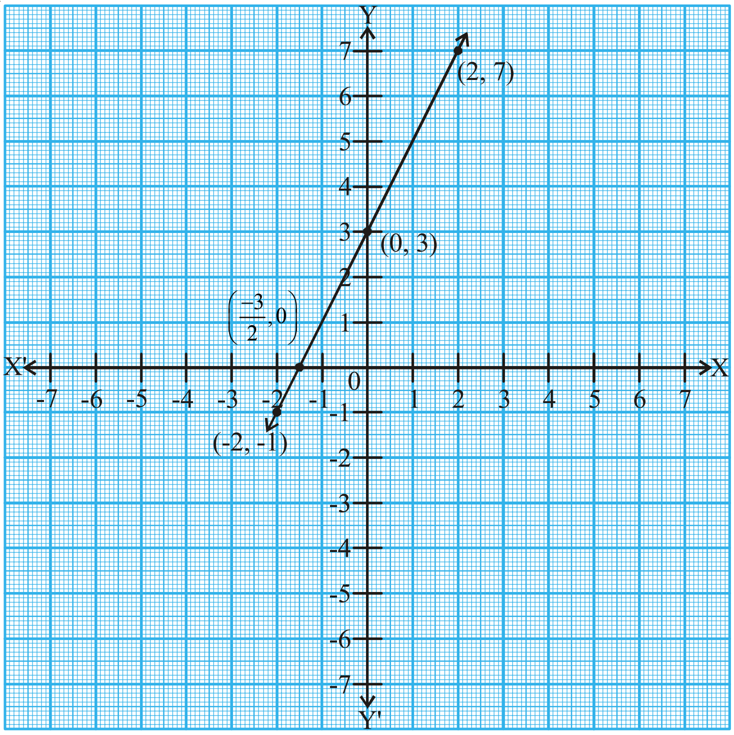
3.4.1. రేఖీయ బహుపది యొక్క రేఖా చిత్రము

$ax + b, a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదిని పరిశీలించండి. $y = ax + b$ అనే బహుపది రేఖా చిత్రము ఒక సరళరేఖ అని మీరు 9 వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. ఉదాహరణకు $y = 2x + 3$ అనే బహుపది రేఖాచిత్రం ఒక సరళరేఖ మరియు ఇది y-అక్షంను $(0, 3)$ వద్ద ఖండిస్తూ $(-2, -1)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువులగుండా పోతున్నది.

పట్టిక 3.1

x	-2	0	2
$y = 2x + 3$	-1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

రేఖాచిత్రాన్ని మనం పరిశీలిస్తే $y = 2x + 3$ అనే బహుపది యొక్క రేఖా x-అక్షాన్ని $x = -1$ మరియు $x = -2$ ల మధ్య నుండి ఖండిస్తూ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ గుండా పోతున్నది. అయితే $x = \frac{-3}{2}$ అనేది $2x + 3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్య విలువ అని మీరు గ్రహించవచ్చు. అంటే బహుపది $2x + 3$ యొక్క శూన్యవిలువ దీని రేఖాచిత్రము x-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులో x-నిరూపకము అయి నది.



ఇవి చేయండి

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ అను బహుపదులకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి. ఈ రేఖలు x-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులు కనుగొనండి. వీటి x- నిరూపకాలు బహుపదుల శూన్యవిలువలేనా?

మనము $ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదిని తీసుకుంటే $y = ax + b$ అనే రేఖాచిత్రము x-అక్షంను ఖచ్చితంగా ఒకే బిందువు $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ వద్ద ఖండిస్తుందని సాధారణంగా చెబుతాము.

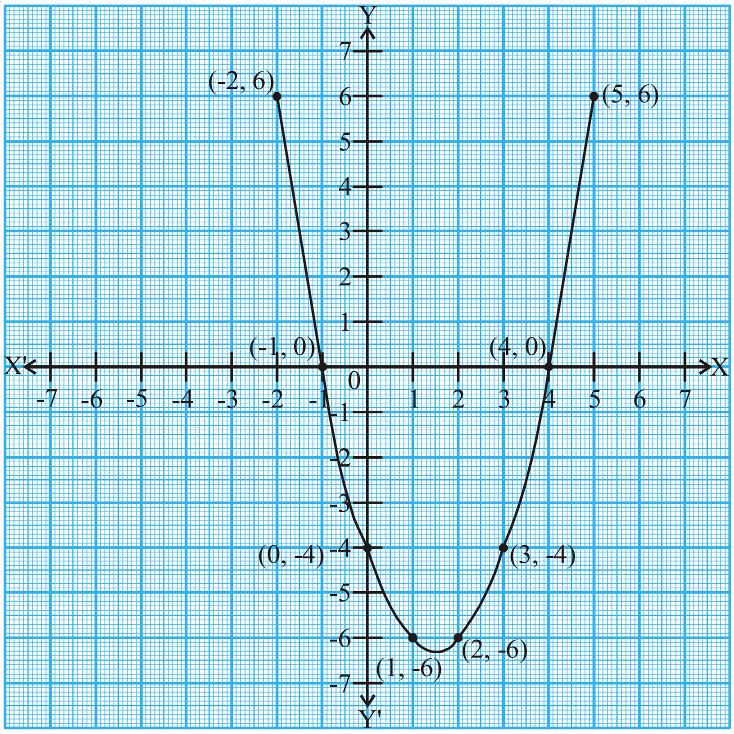
కావున $ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యవిలువ అంటే దాని రేఖాచిత్రము $y = ax + b$, x - అక్షంను ఖండించే బిందువు యొక్క x - నిరూపకము అని చెప్పవచ్చును.

3.4.2. వర్గబహుపది యొక్క రేఖాచిత్రము

వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలకు తగిన జ్యామితీయ అర్థాన్ని మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం. $x^2 - 3x - 4$ అనే వర్గబహుపదిని పరిశీద్దాము. దీని యొక్క రేఖాచిత్రం ఏ విధంగా ఉంటుందో చూద్దాము. దీనికొరకు $y = x^2 - 3x - 4$ అనే బహుపదిలో x యొక్క విలువలకు తగిన y విలువలు కనుగొందాము. పట్టిక 3.2 ను పరిశీలించండి.

పట్టిక 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$



గ్రాఫ్ కాగితంపై పట్టికలో గల బిందువులను ప్రతిక్షేపించి, క్రమంలో కలిపి చూద్దాము. ఈవర్గ బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రం సరళరేఖ అయినదా? ఇది ఒక $\bigcup$ ఆకారంలో గల వక్రముగా వచ్చింది. ఇది x-అక్షంను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించింది.

అయితే $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ రూపంలో గల ఏవర్గ బహుపది యొక్క సమీకరణ రూపం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్రము అయినా '$\bigcup$' ఆకారంలో పైవైపునకు గాని, '$\bigcap$' ఆకారంలో క్రింది వైపునకు గాని వచ్చు వక్రముగా వుంటుంది. ఈ ఆకారం $a > 0$ లేదా $a < 0$ విలువలపై ఆధారపడి వుంటుంది. (ఈ వక్రాలను మనం **పరావలయాలు** అంటాము)

ఈ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -1 మరియు -4 అని మనం గమనిస్తాం. అదేవిధంగా వక్రము x-అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువుల x- నిరూపకాలు -1 మరియు 4 గా మనం గమనించవచ్చును. అంటే $x^2 - 3x - 4$ వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలు, ఈ వర్గ బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రము x-అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువులు x-నిరూపకాలు అయినవి.

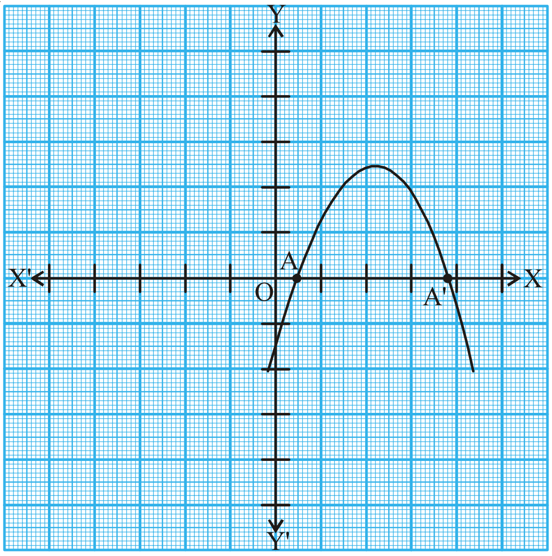
అందుచే, మనము సాధారణంగా $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు,ఈ వర్గ బహుపది సమీకరణం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్రము x-అక్షాన్ని ఖండించునప్పుడు ఏర్పడు బిందువుల x-నిరూపకాలు అవుతాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయత్నించండి.

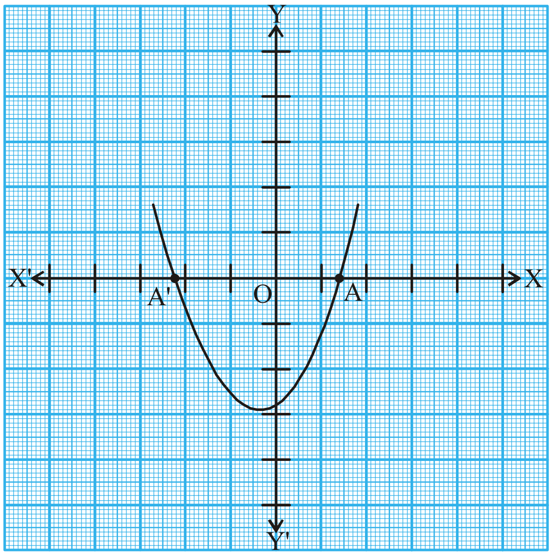
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ లకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి. ప్రతి సందర్భంలోనూ బహుపది శూన్యాలను కనుగొనండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

మనం ముందుగా పరిశీలించిన దానిని బట్టి $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్ర స్థితి తెలిపే మూడు సందర్భాలుగా వర్గీకరించవచ్చును.

సందర్భం (i) : ఈ సందర్భంలో రేఖాచిత్రము x-అక్షంను A మరియు A′ అను రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించింది. అందుచే ఈ సందర్భంలో A మరియు A′ బిందువుల x నిరూపకాలను వర్గబహుపది ax^2+bx+c నకు **రెండు శూన్యాలు** అగును. ఈ పరావలయము పైవైపునకు గాని, క్రింది వైపునకు గాని విస్తరించబడి వుండవచ్చును.

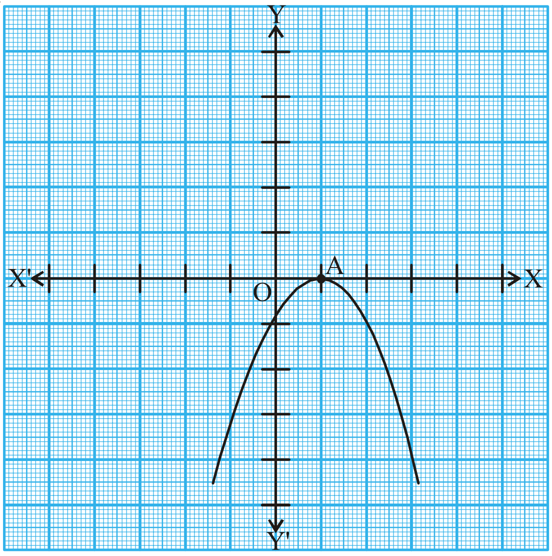


(i)

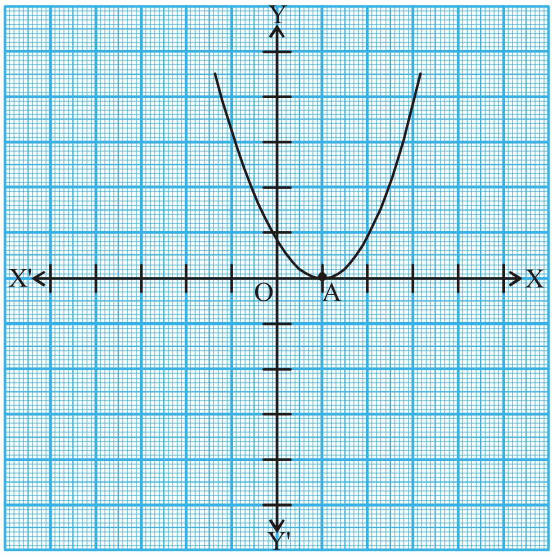


(ii)

సందర్భం (ii) : ఈ సందర్భములో రేఖాచిత్రము x-అక్షంను ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకుతుంది. అనగా రెండు బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి. అందుచే సందర్భం (i)లో చూపిననట్లు A మరియు A′ బిందువులు రెండునూ ఏకీభవించి ఒకే బిందువు 'A'గా మారతాయి.



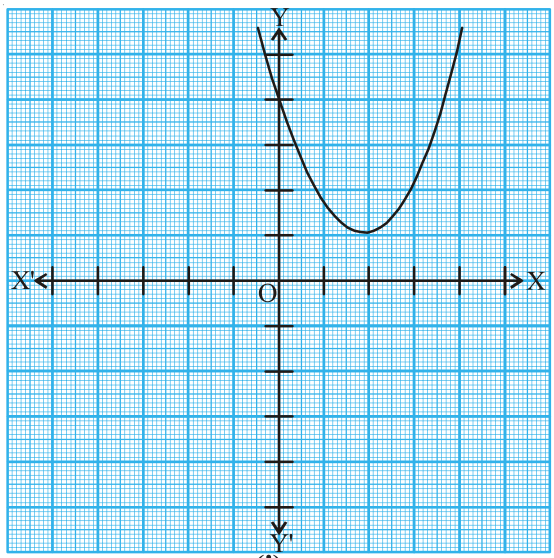
(i)



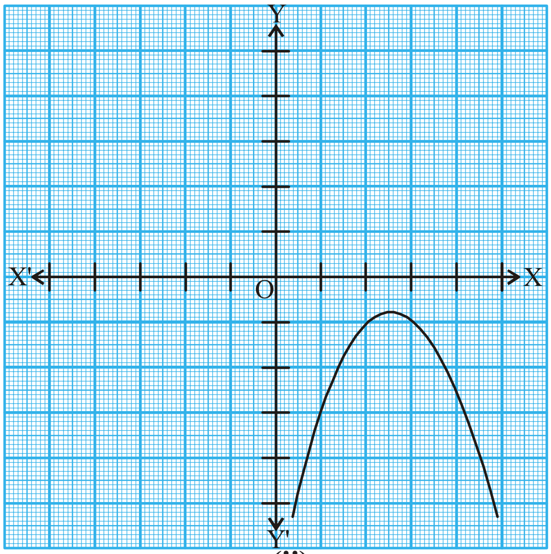
(ii)

అందుచే ఈ సందర్భంలో బిందువు 'A' యొక్క x-నిరూపకము వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ యొక్క ఒకేఒక శూన్యము అగును.

సందర్భము (iii) : ఇచ్చట, రేఖాచిత్రము పూర్తిగా x-అక్షంనకు పూర్తిగా పైన గాని లేదా క్రిందకు గాని వుండి x-అక్షంను ఏ బిందువు వద్దనూ ఖండించలేదు.



(i)



(ii)

అందుచే వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ నకు ఈ సందర్భములో 'శూన్యము' నిర్వచింపబడదు.

పైన తెల్పిన మూడు సందర్భములను బట్టి వర్గబహుపదిని మనం జ్యామితీయంగా పరిశీలించిన దీనికి రెండు శూన్యాలు గాని, (అంటే ఒకే ఒకశూన్యం) లేదా శూన్యాలు లేకపోవచ్చునని తెలుస్తుంది. అందుచే రెండవ పరిమాణ బహుపదికి అత్యధికంగా రెండు శూన్యాలు మాత్రమే వుంటాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయత్నించండి

1. రెండు శూన్యాలు కలిగిన ఏవేని మూడు బహుపదులను వ్రాయండి.
2. ఒకే ఒక శూన్యం కలిగిన ఒక బహుపదిని వ్రాయండి.
3. ఒక బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యము వుంటే దానిని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు?
4. వాస్తవసంఖ్య 'x' కలిగి వుండి శూన్యం లేని బహుపదులను ఏవైనా మూడింటిని రాయండి.

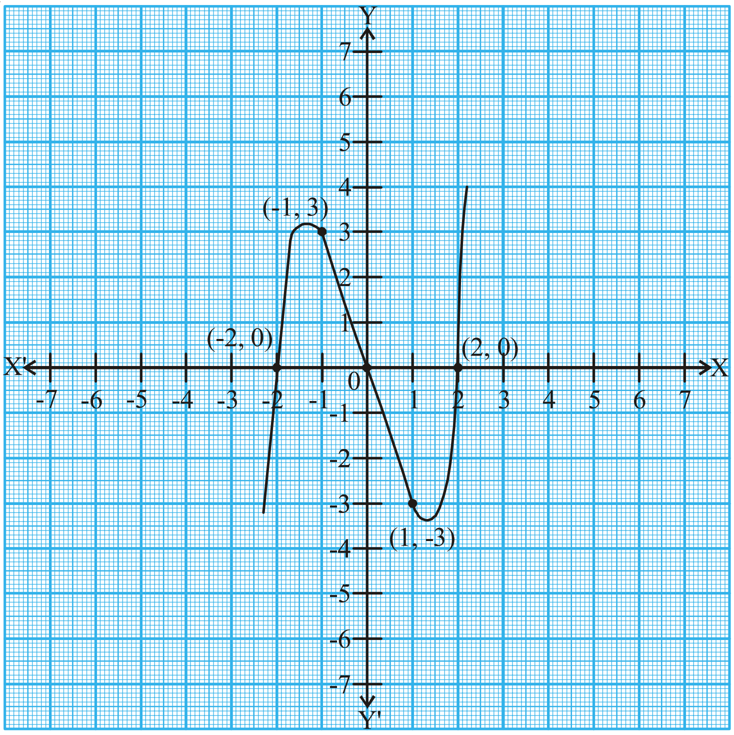
3.4.3 ఘనబహుపదుల శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావము

ఘనబహుపదుల శూన్యాలను జ్యామితీయంగా అర్థం చేసుకొనుటలో నీవు ఏమి ఆశిస్తావు? ఇది ఏవిధంగా సాధ్యమో పరిశీలిద్దాము. ఒక ఘనబహుపది $x^3 - 4x$ ను తీసుకుందాము. $y = x^3 - 4x$ యొక్క రేఖాచిత్రము పరిశీలిస్తే దీని అర్థాన్ని గమనించవచ్చు. పట్టిక 3.3 లో ఇచ్చిన విధంగా చరరాశి 'x' కు కొన్ని విలువలను ఇచ్చిదానికి తగిన 'y' విలువలు కనుగొందాము.

పట్టిక 3.3

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$

మనం పట్టికను పరిశీలిస్తే ఘన బహుపది $x^3 - 4x$ యొక్క శూన్యాలు $-2, 0$ మరియు 2 అని తెలుస్తున్నది. దీని రేఖాచిత్రం $y = x^3 - 4x$ ను గీస్తే, రేఖాచిత్రంలో గీయబడిన వక్రము x-అక్షంను ఖండించే బిందువుల x-నిరూపకాలు -2, 0 మరియు 2 గా కలవు. అందుచే ఈ బహుపదికి మూడు శూన్యాలని చెప్పవచ్చు.



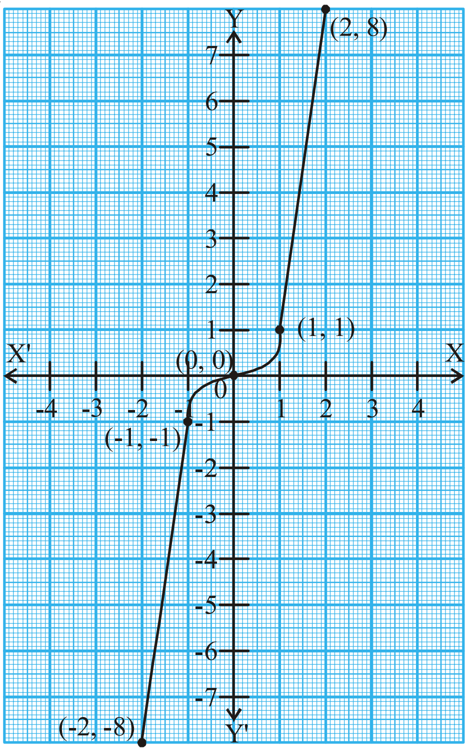
మరిన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని పరిశీలిద్దాము. x^3 మరియు $x^3 - x^2$ అనే ఘన బహుపదులను తీసుకొండి. పట్టిక 3.4 మరియు 3.5 లను పరిశీలించండి.

పట్టిక 3.4

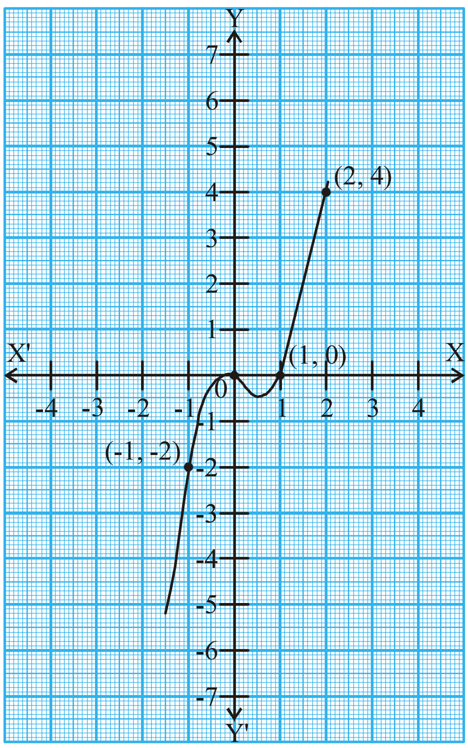
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
(x, y)	$(-2, -8)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 8)$

పట్టిక 3.5

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$



$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ రేఖాచిత్రము పరిశీలిస్తే, ఇది x-అక్షాన్ని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించింది. మరియు దీని x–నిరూపకము 'సున్న' అందుచే ఈ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యము వచ్చినది. ఇదే విధంగా $y = x^3 - x$ రేఖా చిత్రాన్ని పరిశీలిస్తే, ఈ వక్రం x- అక్షాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే వాటి x-నిరూపకాలు 0 మరియు 1 అయినవి. అందుచే ఈ సందర్భంలో ఘనబహుపదికి రెండు శూన్యాలు రావడం జరిగింది.

పైన చూపిన ఉదాహరణలను మనము పరిశీలిస్తే ఒక ఘనబహుపదికి గరిష్ఠముగా మూడు శూన్యాలు వచ్చినవి. దీని నుండి మనము ఏదైన మూడవ పరిమాణ బహుపదికి గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చును.

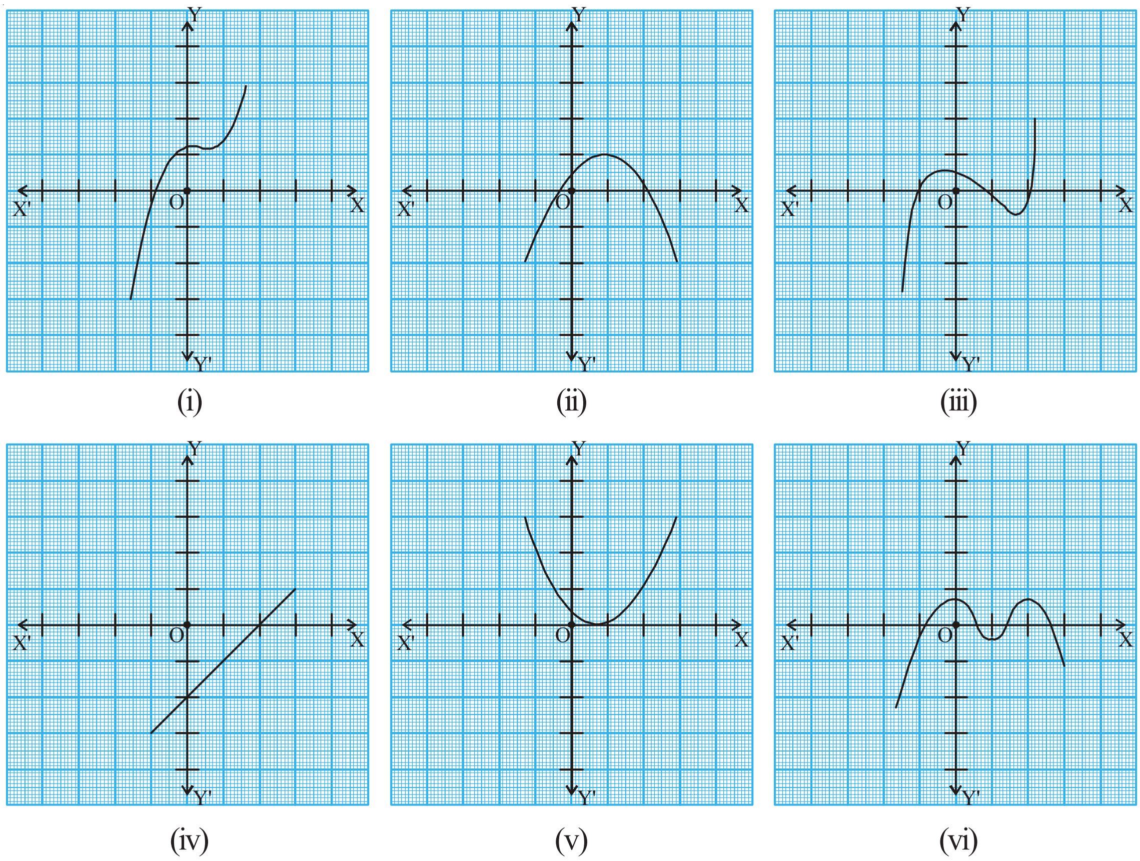
ప్రయత్నించండి.

రేఖాచిత్రాలు గీయకుండానే దిగువ ఘనబహుపదులకు శూన్యాలను కనుగొనండి

(i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$.

గమనిక : n వ పరిమాణము కలిగిన ఒక బహుపది $p(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము అనగా $y = p(x)$ అనేది x-అక్షం ను గరిష్ఠంగా n బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుందని చెప్పవచ్చు. అందుచే n వ పరిమాణం గల ఒక బహుపది $p(x)$ నకు గరిష్ఠంగా 'n' శూన్యాలుంటాయి.

ఉదాహరణ-1. క్రింది పటములలో ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రాలను గమనించండి. ప్రతి రేఖాచిత్రం $y = p(x)$ నందు $p(x)$ అనేది ఒక బహుపది. ప్రతిసందర్భములోనూ x వ్యాప్తితో కూడిన బహుపది $p(x)$ నకు శూన్యాలు సంఖ్యను కనుగొనండి.



సాధన : పైన చూపిన పటాలలో x వ్యాప్తితో కూడిన రేఖాచిత్రాలు

(i) రేఖాచిత్రం x-అక్షంను ఒక బిందువును ఖండించింది. కావున శూన్యాల సంఖ్య 1

(ii) రేఖాచిత్రం x-అక్షంను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించింది. కావున శూన్యాల సంఖ్య 2

(iii) శూన్యాల సంఖ్య 3. (ఏవిధంగా ?)

(iv) శూన్యాల సంఖ్య 1. (ఏవిధంగా ?)

(v) శూన్యాల సంఖ్య 1. (ఏవిధంగా ?)

(vi) శూన్యాల సంఖ్య 4. (ఏవిధంగా ?)

ఉదాహరణ-2. క్రింది బహుపదులకు శూన్యాల సంఖ్యను కనుగొనండి మరియు వాటి విలువలను తెలపండి.

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

సాధన : బహుపదుల రేఖాచిత్రాలు గీయకుండానే మనం శూన్యాలను కనుగొందాము.

(i) $p(x) = 2x + 1$ అనేది ఒక రేఖీయ బహుపది కావున దీనికి ఒకే ఒక శూన్యం వుంటుంది.

$p(x) = 0$ తీసుకొండి.

అంటే, $2x + 1 = 0$

కావున $x = \frac{-1}{2}$ అగును.

అందుచే ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యం $\frac{-1}{2}$.

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ అనేది ఒక వర్గబహుపది.

కావున దీనికి గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యాలు ఉంటాయి.

$q(y) = 0$ అనుకోండి

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ లేదా $y = 1$

అందుచే ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు -1 మరియు 1 అయినవి.

(iii) $r(z) = z^3$ అనేది ఒక ఘన బహుపది కావున దీనికి గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలుంటాయి.

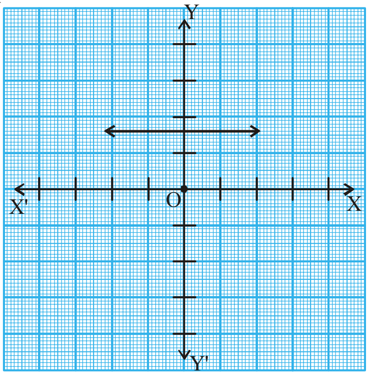
$r(z) = 0$ అనుకొనండి

$\Rightarrow z^3 = 0$

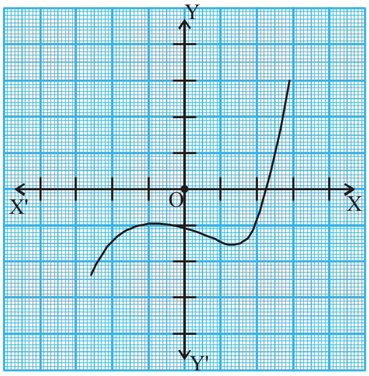
అందుచే, ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యము 'సున్న' అయినది.

అభ్యాసం – 3.2

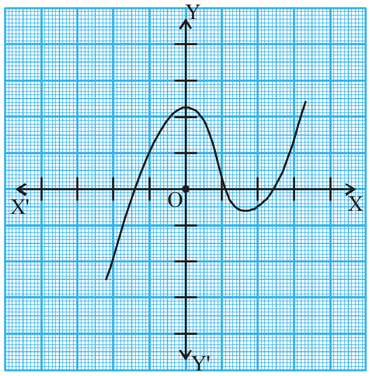
1. కొన్ని బహుపదులు $p(x)$ యొక్క రేఖా చిత్రాలు $y = p(x)$ యొక్క పటాలు దిగువ ఇవ్వబడినవి. $p(x)$ యొక్క శూన్యాల సంఖ్యను పటాలు పరిశీలించి తెలపండి.



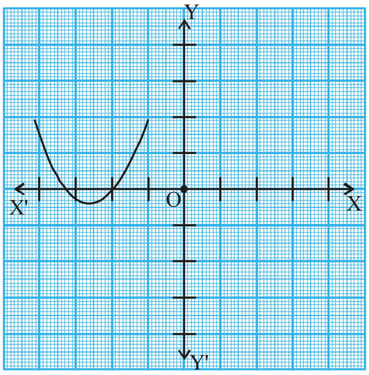
(i)



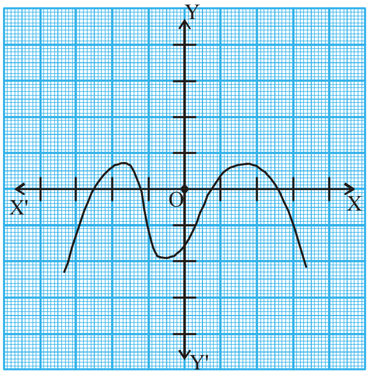
(ii)



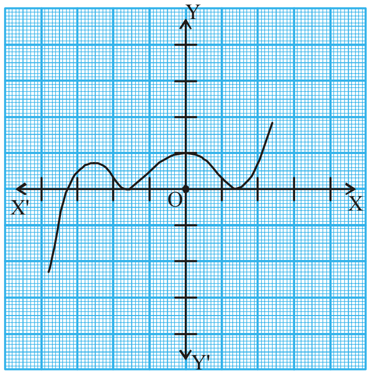
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

2. కింది బహుపదుల శూన్యాలను కనుగొనండి.

   (i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

   (iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. కింది బహుపదులకు తగిన రేఖాచిత్రాలను గీచి, శూన్యాలను కనుగొనండి. ఫలితాలను సమర్థించండి.

   (i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

   (iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

   (v) $p(x) = x^2 - 1$

4. $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ అనే బహుపదికి $\frac{1}{4}$ మరియు -1 అనేవి శూన్యాలు ఏవిధంగా అగునో తెలపండి.

3.5 ఒక బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్యసంబంధము

$ax + b$ అనే రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యము $-\frac{b}{a}$ అని మీరు ఇది వరకు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు మనము వర్గబహుపది యొక్క గుణకాలకు, శూన్యాలకు గల సంబంధాన్ని రాబట్టడానికి ప్రయత్నిద్దాము. దీని కొరకు ఒక వర్గబహుపది $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ను తీసుకొందాము.

వర్గ బహుపదుల మధ్య పదాన్ని విడదీయుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేయడము మనం 9 వ తరగతిలో నేర్చుకున్నాము. అందుచే ఇవ్వబడిన వర్గబహుపదిలో మధ్యపదము '$-8x$' ను రెండు పదాలుగా విభజిద్దాము. వీటి లబ్ధం $6 \times 2x^2 = 12\,x^2$ కావాలి.

అందుచే మనము $2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$

$$= (2x - 2)\,(x - 3) = 2(x - 1)\,(x - 3)$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ శూన్యము కావాలంటే $x - 1 = 0$ లేదా $x - 3 = 0$ కావాలి. అంటే $x = 1$ లేదా $x = 3$ అగును. అందుచే $2x^2 - 8x + 6$ యొక్క శూన్యాలు 1 మరియు 3 అయినవి. ఇప్పుడు మనము ఈ శూన్యాలకు, వర్గబహుపది యొక్క గుణకాలకు ఎటువంటి సంబంధము కలిగి వున్నదో పరిశీలిద్దాము. ఇచ్చట x^2 యొక్క గుణకము 2, x గుణకము -8 మరియు స్థిరపదము 6 అంటే x^0 యొక్క గుణకము అన్నమాట (అనగా $6x^0 = 6$)

ఇచ్చట బహుపది శూన్యాల మొత్తము $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

బహుపది శూన్యాల లబ్ధము $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

మనం ఇప్పుడు మరొక వర్గబహుపదిని తీసుకొని పరిశీలిద్దాము.

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2.$

మధ్యపదమును విడదీసి రాయగా, మనకు

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2)$$

$$= (3x - 1)\,(x + 2)$$

$3x^2 + 5x - 2$ శూన్యము కావాలంటే $3x - 1 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$ కావాలి

అంటే $x = \frac{1}{3}$ లేదా $x = -2$ అగును.

అందుచే $3x^2 + 5x - 2$ యొక్క శూన్యాలు $\frac{1}{3}$ మరియు -2

వీటి నుండి మనము దిగువ సంబంధము చూడవచ్చు.

శూన్యాల మొత్తము $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల మొత్తము $= \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఇవి చేయండి

దిగువ ఇవ్వబడిన వర్గ బహుపదుల యొక్క శూన్యాలను కనుగొనండి. ఇదేవిధంగా శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్ధమును కనుగొని, బహుపది పదాల గుణకాలకు మధ్యన గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

మనం సాధారణముగా, వర్గసమీకరణము $p(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ నకు శూన్యాలు α మరియు β లు అయినచో

$(x - \alpha)$ మరియు $(x - \beta)$ లను $p(x)$ యొక్క కారణాంకాలు అగును.

కావున $ax^2 + bx + c = k\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$, k ఒక స్థిరాంకము

$$= k[x^2 - (x + \beta)\,x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k\,(\alpha + \beta)\,x + k\alpha\beta$$

దీనిని వర్గబహుపదిలో x^2, x గుణకాలు మరియు స్థిరపదముతో పోల్చగా, మనకు

$a = k,\ b = -\,k(\alpha+\beta)$ మరియు $c = k\alpha\beta$ వచ్చును.

దీనినుండి $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$,

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ అయినవి.

గమనిక : α మరియు β అనేవి గ్రీకు అక్షరాలు. వీటిని 'ఆల్ఫా' మరియు 'బీటా' అని చదువుతాము. ఇదేవిధంగా మరొక అక్షరము 'γ' ను కూడా మనము వినియోగిస్తాము. దీనిని 'గామా' అని చదువుతాము.

కావున, వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాల లబ్ధము $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

కింది కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము

ఉదాహరణ-3. $x^2 + 7x + 10$ అనే వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు, బహుపది గుణకాలకు సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : మనకు $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\,(x + 5)$ అగును.

కావున, $x^2+7x+10$ యొక్క విలువ శూన్యం కావాలంటే

$x+2=0$ లేదా $x+5=0$ కావాలి

అంటే $x=-2$ లేదా $x=-5$ అగును.

కావున $x^2+7x+10$ యొక్క శూన్యాలు -2 మరియు -5 అగును.

$$\text{ఇప్పుడు, శూన్యాల మొత్తము} = -2+(-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము} = -2 \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

ఉదాహరణ-4. x^2-3 అనే బహుపది యొక్క శూన్యాలు కనుగొని, శూన్యాలకు బహుపది గుణకాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ అనే సర్వసమీకరణం గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

దీని నుపయోగించి

$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ అని వ్రాయవచ్చు.

కావున x^2-3 యొక్క శూన్యాలు $x=\sqrt{3}$ లేదా $x=-\sqrt{3}$.

ఈ విధంగా, x^2-3 యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{3}$ మరియు $-\sqrt{3}$ అవుతాయి..

$$\text{ఇప్పుడు, శూన్యాల మొత్తము} = \sqrt{3}+(-\sqrt{3}) = 0 = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము} = (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

ఉదాహరణ-5. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు మొత్తము మరియు లబ్ధము వరుసగా -3 మరియు 2 అయిన ఆ వర్గ బహుపదిని కనుగొనండి.

సాధన : α మరియు βలు శూన్యాలు కలిగిన వర్గబహుపది ax^2+bx+c అనుకోండి.

$$\alpha+\beta = -3 = \frac{-b}{a} \text{ మరియు}$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

మనము $a=1$ తీసుకుంటే $b=3$ మరియు $c=2$ అగును.

కావున ఇచ్చిన నియమానికి లోబడి ఏర్పడే వర్గ బహుపది x^2+3x+2 అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా, 'a' ను ఏ వాస్తవ సంఖ్యతోనైనా సూచించవచ్చు. దీనిని k అనే వాస్తవ సంఖ్యగా తీసుకుంటే $\frac{-b}{k} = -3$ లేదా $b = 3k$ మరియు $\frac{c}{k} = 2$ లేదా $c = 2k$ అగును. ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే మనకు $kx^2 + 3kx + 2k$ అనే బహుపది వస్తుంది.

ఉదాహరణ-6. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు వరుసగా 2 మరియు $\frac{-1}{3}$ అయినచో ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

సాధన : α, β లు శూన్యాలుగా కలిగిన వర్గబహుపది

$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ అనుకోండి.

ఇచ్చట $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

శూన్యాలమొత్తం $= (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

శూన్యాలలబ్ధం $= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

కావున, వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c$ ని

$k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$, k ఒకస్థిరపదము గా వ్రాస్తే

$= k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$ అగును.

వాస్తవ సంఖ్య 'k' కు వివిధ విలువలను ఇవ్వవచ్చును.

$k = 3$ అయినచో వర్గ బహుపది $3x^2 - 5x - 2$ అవుతుంది.

ప్రయత్నించండి

(i) -2 మరియు $\frac{1}{3}$ శూన్యాలు కలిగిన వర్గబహుపదిని కనుగొనండి.

(ii) శూన్యాల మొత్తం $\frac{-3}{2}$ మరియు లబ్ధం -1 కలిగిన వర్గబహుపదిని తెలపండి.

3.6 ఘన బహుపదులు

మనము ఇప్పుడు ఘన బహుపదులను పరిశీద్దాము. ఘనబహుపదుల శూన్యాలకు, పదాల గుణకాలకు ఏమైనా సంబంధం కలిగి వున్నదేమో చూద్దాం.

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ అనే బహుపదిని తీసుకొండి.

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$, విలువల వద్ద $p(x) = 0$ అయినదని చూడవచ్చు.

$p(x)$ ఒక ఘన బహుపది అయినందున, దీని యొక్క శూన్యాలు గరిష్ఠంగా మూడు ఉంటాయని మనకు తెలుసు. అందుచే $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ యొక్క శూన్యాలు $4, -2$ మరియు $\frac{1}{2}$ అగును.

శూన్యాల మొత్తము $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ యొక్క గుణకము})}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల లబ్ధము $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{స్థిరపదము})}{x^3 \text{ గుణకము}}$

వీటితో బాటు, ఇచ్చట మరొక ప్రత్యేక సంబంధము కలిగి వున్నది. బహుపది యొక్క శూన్యాలను రెండేసి చొప్పున తీసుకొని వాటి లబ్ధాల మొత్తంను పరిశీలిస్తే మనకు ఈ సంబంధము తెలుస్తుంది.

అంటే $\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

దీనిని బట్టి $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యాలు α, β, γ అయినప్పుడు

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

> α, β, γ లు ఘనబహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యాలు. ఇవి బహుపది పదాల గుణకాలైన a, b, c లతో ఎటువంటి సంబంధం కలిగి వున్నవో పరిశీలిద్దాము. α, β, γ లు శూన్యాలైనందున, బహుపదిని $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
>
> $$= x^3 - x^2(\gamma + \beta + \alpha) + x(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$
>
> దీనిని బహుపదితో పోల్చాలంటే, దీనిని 'a' తో గుణించాలి.
> అప్పుడు
>
> $ax^3 - x^2a(\gamma + \beta + \alpha) + xa(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma$ లేదా
>
> $b = -a(\gamma + \beta + \alpha), c = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$ అగును.

ఇవి చేయండి

α, β మరియు γ అనేవి ఒక ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాలైతే తగిన విలువలు కనుగొని పట్టికలో పూరించండి.

వ.సంఖ్య	ఘనబహుపది	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\alpha+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

కింది ఉదాహరణను మనము పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-7. ఘనబహుపది $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1$ మరియు $-\frac{1}{3}$ అగునని చూపండి. బహుపది గుణకాలకు శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : ఇచ్చిన ఘనబహుపది $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ని $ax^3 + bx^2 + cx + d$ తో సరిపోల్చిన $a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3$ అగును. దీని నుండి

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \text{ అగును.}$$

కావున $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1$ మరియు $-\frac{1}{3}$ అని చూపడమైనది.

ఇప్పుడు $\alpha = 3, \beta = -1$ మరియు $\gamma = -\frac{1}{3}$ తీసుకొంటే

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

అభ్యాసం – 3.3

1. కింది వర్గబహుపదులకు శూన్యాలను కనుగొని బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్దాలు వరుసగా ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఆయా వర్గబహుపదులను కనుగొనండి.

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు α, β లు దిగువ ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఆయా బహుపదులను కనుగొనండి.

(i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. ఒక ఘనబహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $1, -1$ మరియు 3 అగునని సరిచూడండి. ఇదేవిధంగా బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

3.7 బహుపదుల భాగహార నియమము

ఘన బహుపదులకు గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలుంటాయని మీరు తెలుసుకున్నారు. మరి, ఏదైనా సందర్భంలో ఒక శూన్యం ఇస్తే మిగిలిన శూన్యాలను ఏవిధంగా కనుగొంటారు? దీనికొరకు మనం ఒక ఘన బహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ ని పరిశీలిద్దాము.

ఈ బహుపది యొక్క శూన్యము 1 అయిన, దీనిని $(x - 1)$ నిశ్శేషంగా భాగిస్తుందని మీకు తెలుసు. ఇచ్చిన బహుపదిని $(x - 1)$ చే భాగిస్తే వచ్చు భాగఫలము $x^2 - 2x - 3$. దీని మధ్యపదమును విభజించుట ద్వారా దీని యొక్క కారణాంకాలు కనుగొనవచ్చును. తద్వారా $(x + 1)$ మరియు $(x - 3)$ కారణాంకాలు అవుతాయి. అందుచే

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

ఈ విధంగా ఘనబహుపది యొక్క మూడు శూన్యాలు $1, -1$ మరియు 3 అగును.

ఒక బహుపదిని మరొక బహుపదిచే భాగించే విధానము ఒకసారి తెలుసుకుందాము. దీని సోపానాలు వ్రాసే క్రమం తెలుసుకొనేందుకు ఒక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-8. $2x^2 + 3x + 1$ ను $x + 2$ చే భాగించండి.

సాధన : భాగహారంలో శేషము సున్న వచ్చిననూ లేదా శేషము యొక్క పరిమాణము, విభాజకము యొక్క పరిమాణము కన్నా తక్కువ అయినప్పుడు భాగహారము పూర్తయినట్లుగా భావిస్తామని గుర్తించండి.

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x+2 & 2x^2+3x+1 \\ & 2x^2+4x \\ & -\quad - \\ \hline & -x+1 \\ & -x-2 \\ & +\quad + \\ \hline & 3 \end{array}$$

ఇచ్చట, భాగహారములో భాగఫలము $2x - 1$ మరియు శేషము 3 అయినది. ఇదే విధంగా భాగహారనియమాన్ని సరిచూస్తే

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

అంటే $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

కావున, విభాజ్యము = విభాజ్యము × భాగఫలము + శేషము అయినది.

ఇదేవిధానాన్ని మనము కొనసాగించి ఒక బహుపదిని వర్గబహుపదిచే భాగించుటను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ను $1 + 2x + x^2$ చే భాగించండి.

సాధన : మొదటగా మనం విభాజ్యం మరియు విభాజకాలను పదాల పరిమాణాల కనుగుణంగా అవరోహణా క్రమంలో అమర్చు కొని బహుపదులను ప్రామాణిక రూపంలో రాసుకోవాలి. ఇచ్చిన ఉదాహరణలో విభాజ్యము ప్రామాణిక రూపంలోనే వుంది. విభాజకాన్ని కూడా ప్రామాణిక రూపం $x^2 + 2x + 1$ గా రాయ వచ్చును.

$$\begin{array}{r|l} & 3x-5 \\ \hline x^2+2x+1 & 3x^3+x^2+2x+5 \\ & 3x^3+6x^2+3x \\ & -\quad -\quad - \\ \hline & -5x^2-x+5 \\ & -5x^2-10x-5 \\ & +\quad +\quad + \\ \hline & 9x+10 \end{array}$$

సోపానం 1 : భాగఫలంలో మొదటి పదాన్ని పొందడానికి, విభాజ్యంలో గరిష్ఠ పరిమాణ పదాన్ని, (అనగా $3x^3$) విభాజకంలో గరిష్ఠ పరిమాణ పదము (అనగా x^2)తో భాగించాలి. ఇది $3x$ అవుతుంది. ఈ క్రమంలో భాగహారం కొనసాగిస్తే శేషం $-5x^2 - x + 5$ వస్తుంది.

సోపానం 2 : ఇప్పుడు, భాగఫలములో రెండవ పదాన్ని పొందడానికి, కొత్త విభాజ్యంలో గరిష్ఠ పరిమాణ పదము (అనగా $5x^2$) ను విభాజకంలో గరిష్ఠ పరిమాణపదము (అనగా x^2) చే భాగిస్తే -5 వస్తుంది. ఈ క్రమంలో తిరిగి భాగహారము $-5x^2 - x + 5$ తో కొనసాగించాలి.

సోపానం 3 : మిగిలిన శేషము $9x + 10$. దీని యొక్క పరిమాణము తిరిగి విభాజకము $x^2 + 2x + 1$ యొక్క పరిమాణము కన్నా తక్కువ. అందుచే నియమము ప్రకారం భాగహారాన్ని కొనసాగించలేము.

అందుచే భాగఫలము $3x - 5$ మరియు శేషము $9x + 10$ అయినది.

ఇలాగే $(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = (3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10)$

$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

అంటే విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం అయినది.

దీని నుండి మనం భాగహార నియమాన్ని కింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

$p(x)$ మరియు $g(x)$ అనేవి రెండు బహుపదులు, $g(x) \neq 0$ అయినపుడు మనం మరి రెండు బహుపదులు $q(x)$ మరియు $r(x)$ లను పొందాలంటే

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం $<$ $g(x)$ యొక్క పరిమాణం ఈ ఫలితాన్ని బహుపదుల భాగహార నియమంగా పేర్కొంటాము.

ఇప్పుడు, పైన పేర్కొన్న చర్చద్వారా కింది ఫలితాలను రాబట్టవచ్చును.

(i) $q(x)$ అనేది ఒక రేఖీయ బహుపది అయిన $r(x) = r$ ఒక స్థిరాంకం.

(ii) $q(x)$ యొక్క పరిమాణం 1 అయిన $p(x)$ యొక్క పరిమాణం $= 1 + g(x)$ యొక్క పరిమాణం అగును.

(iii) $p(x)$ ను $(x - a)$ చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం $p(a)$ అగును.

(iv) $r = 0$ అయితే $p(x)$ ను $q(x)$ ఖచ్చితంగా భాగిస్తుందని లేదా $q(x)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అగునని చెప్పవచ్చు.

ఈ భాగహారనియమాన్ని మనం క్రింది ఉదాహరణలలో పరిశీలించవచ్చును.

ఉదాహరణ-10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ను $x - 1 - x^2$ చే భాగించి, భాగహార నియమాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : ఇచ్చిన బహుపదులు ప్రామాణిక రూపంలో లేవని గుర్తించండి. భాగహారం ప్రారంభించడానికి ముందుగా విభాజ్యం మరియు విభాజకాలను పరిమాణాల ప్రకారం అవరోహణా క్రమంలో రాయాలి.

కావున, విభాజ్యం $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ మరియు

విభాజకం $= -x^2 + x - 1$ అగును.

భాగహార ప్రక్రియ కుడివైపున చూపబడినది.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & + \quad - \quad + \\ \hline & \quad 2x^2 - 2x + 5 \\ & \quad 2x^2 - 2x + 2 \\ & \quad - \quad + \quad - \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

ఈ క్రమంలో శేషం యొక్క పరిమాణం విభాజకం $(-x^2 + x - 1)$ యొక్క పరిమాణం కన్నా తక్కువ అయినందున భాగహారం ఆపివేస్తాం.

అందుచే, భాగఫలం $= x - 2$, శేషం $= 3$.

ఇప్పుడు,

విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

ఈ విధంగా, భాగహారనియమం సరిచూడడమైనది.

ఉదాహరణ-11. $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ అనుబహుపదికి $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ రెండు శూన్యాలైన మిగిలిన అన్ని శూన్యాలను కనుగొనండి.

సాధన: $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ అనేది ఇవ్వబడిన బహుపదికి రెండు శూన్యాలు కావున, ఈ బహుపదిని

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ చే భాగించవచ్చు.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & - \qquad\qquad + \\
\hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 \qquad + 6x \\
 & + \qquad\qquad - \\
\hline
 & x^2 - 2 \\
 & x^2 - 2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

భాగఫలంలో మొదటి పదము $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

భాగఫలంలో రెండవ పదము $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

భాగఫలంలో మూడవ పదము $\frac{x^2}{x^2} = 1$

కావున, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

ఇప్పుడు $2x^2 - 3x + 1$ $-3x$ లో మధ్యపదము $-3x$ ను విభజించి కారణాంకాలుగా రాస్తే $(2x - 1)$ $(x - 1)$ వచ్చును. కావున మిగిలిన రెండు శూన్యాలు $x = \frac{1}{2}$ మరియు $x = 1$ అగును. ఈ విధంగా ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, 1 మరియు $\frac{1}{2}$ అవుతాయి.

అభ్యాసం – 3.4

1. కింది ఇవ్వబడిన బహుపదులలో $p(x)$ బహుపదిని $g(x)$ బహుపదిచే భాగించి భాగఫలాన్ని, శేషాన్ని కనుగొనండి.

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

2. కింది బహుపదులలో రెండవ బహుపదిని, మొదటి బహుపదిచే భాగించి ప్రతి సందర్భంలో మొదటి బహుపది కారణాంకం అగునో, కాదో సరిచూడండి.

   (i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

   (ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

   (iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ అను బహుపదికి రెండు శూన్యాలు $\sqrt{\frac{5}{3}}$ మరియు $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ అయిన మిగిలిన రెండు శూన్యాలను కనుగొనండి.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ అను బహుపదిని $g(x)$ అనే బహుపదిచే భాగిస్తే భాగఫలము $x - 2$ మరియు శేషము $-2x + 4$ అయిన $g(x)$ ను కనుగొనండి.

5. భాగహార నియమము మరియు దిగువ ఇవ్వబడిన నియమాలను తృప్తిపరిచే విధంగా $p(x), g(x), q(x)$ మరియు $r(x)$ బహుపదులకు తగిన ఉదాహరణలను ఇవ్వండి

   (i) $p(x)$ పరిమాణము $= q(x)$పరిమాణము

   (ii) $q(x)$ పరిమాణము $=$ $r(x)$ పరిమాణము

   (iii) $r(x)$ పరిమాణము $= 0$

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[ఈ అభ్యాసము పరీక్షలకు నిర్దేశించబడినది కాదు]

1. కింది ఘన బహుపదులకు ప్రక్కన ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు ఆయా బహుపదులకు శూన్యాలు అగునో, లేదో సరిచూడండి. ఇదే విధంగా బహుపదుల పదాల గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని రాబట్టండి.

   (i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2\ (\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 + 4x^2 + 5x - 2\ (1, 1, 1)$

2. ఒక ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము, రెండేసి శూన్యాల లబ్ధాల మొత్తము మరియు శూన్యాలలబ్ధము వరుసగా $2, -7$ మరియు -14 అయిన ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

3. $x^3 - 3x^2 + x + 1$ అను బహుపది శూన్యాలు $a - b,\ a,\ a + b$ లు అయిన a, b విలువలను కనుగొనండి.

4. $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ యొక్క రెండు శూన్యాలు $2 \pm \sqrt{3}$ అయిన మిగిలిన రెండు శూన్యాలను కనుగొనండి.

5. $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ అనే బహుపదిని $x^2 - 2x + k$ అనే మరొక బహుపదిచే భాగించగా వచ్చు శేషం $x + a$ అయిన 'k' మరియు 'a' విలువలు కనుగొనండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయములో మీరు క్రింది అంశాలను గూర్చి అధ్యయనం చేసారు.

1. బహుపది పరిమాణాలు వరుసగా 1, 2 మరియు 3 కలిగిన వానిని రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులు అంటారు.

2. x చరరాశి మరియు వాస్తవ గుణకాలు కలిగిన వర్గ బహుపదిని $ax^2 + bx + c$ అని రాస్తాం. ఇందులో a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

3. $p(x)$ అను బహుపది శూన్యాలు దాని రేఖాచిత్రం $y = p(x)$, x-అక్షంను ఖండించే బిందువుల యొక్క x-నిరూపకాలు అగును

4. వర్గ బహుపదికి గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యాలు, అనగా ఘనబహుపదికి గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలు వుంటాయి.

5. α మరియు β లు వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ యొక్క శూన్యాలు అయినచో

   $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ అగును.

6. α, β మరియు γ లు ఘనబహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ యొక్క శూన్యాలు అయినచో

   $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$,

   మరియు $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ అగును.

7. $p(x)$ అనే బహుపదిని మరొక శూన్యేతర బహుపది $g(x)$ చే భాగిస్తే, $q(x)$ మరియు $r(x)$ అనే బహుపదులుగా వచ్చే భాగహార నియమాన్ని మనం క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

   $p(x) = g(x). q(x) + r(x)$,

   ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం $<$ $g(x)$ యొక్క పరిమాణం అగును.

అధ్యాయము

4

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత

(Pair of Linear Equations in Two Variables)

4.1 పరిచయం

సిరి ఒకసారి వాళ్ళ నాన్నగారితో కలిసి పుస్తకాల దుకాణానికి వెళ్ళి 3 నోటు పుస్తకాలు 2 పెన్నులు కొన్నది. ఈ మొత్తం వస్తువులకు వాళ్ళ నాన్నగారు ₹ 80 చెల్లించినాడు. ఆమె మిత్రురాలు లక్ష్మి ఆ నోటు పుస్తకాలు, పెన్నులను ఇష్టపడి అవేరకం 4 నోటు పుస్తకాలు మరియు 3 పెన్నులను ₹110 లకు కొన్నది. ఆమె తరగతిలో స్నేహితులు రుబీనా పెన్నులను, జోసెఫ్ నోటు పుస్తకాలను కొనాలని ఇష్టపడ్డారు. వారు సిరిని ఒక నోటుపుస్తకము వెల, ఒక పెన్ను వెల అడిగారు. కాని ఆమెకు వాటి విలువలు విడివిడిగా తెలియవు. వారు వాటి వెలను ఎలా కనుగొంటారు?

ఈ ఉదాహరణలో ఒక నోటు పుస్తకము వెల, ఒక పెన్ను వెల తెలియదు. ఇవి అవ్యక్తరాశులు. మనకు నిత్యజీవితంలో ఇలాంటి సందర్భాలు చాలా ఎదురవుతాయి.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఈ క్రింద రెండు సందర్భాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

(i) 1కిలో బంగాళాదుంపలు మరియు 2కిలోల టమాటాల మొత్తము వెల ₹30. రెండు రోజుల తరువాత, 2 కిలోల బంగాళాదుంపలు మరియు 4 కిలోల టమాటాల మొత్తము వెల ₹66.

(ii) ఎమ్.కె.నగర్ ఉన్నత పాఠశాల క్రికెట్ జట్టు శిక్షకుడు 3 బ్యాట్‌లు మరియు 6 బంతులను ₹ 3900 లకు కొనెను. తరువాత అతడు మరియొక బ్యాట్ మరియు 2 బంతులను ₹1300 లకు కొనెను.

పై ప్రతీ సందర్భంలో అవ్యక్తరాశులను గుర్తించండి.

ప్రతీ సందర్భంలో రెండు చరరాశులు వుండటాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

4.1.1 అవ్యక్త రాశులను మనం ఎలా కనుగొంటాం ?

పరిచయంలో, సిరి 3 నోటుపుస్తకాలను మరియు రెండు పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది. ఒక నోటు పుస్తకము వెల లేదా ఒక పెన్ను వెల మనం ఎలా కనుగొంటాము?

రుబీనా, జోసెఫ్ వాటి వెలలను ఊహించడానికి ప్రయత్నిస్తున్నారు. రుబీనా ప్రతీ నోటు పుస్తకం వెల ₹25 ఉండవచ్చని చెప్పింది. అపుడు 3నోటు పుస్తకాల వెల ₹ 75, రెండు పెన్నుల వెల ₹5 మరియు ప్రతీ పెన్ను వెల ₹2.50 ఉండవచ్చును. జోసెఫ్ ఒక పెన్ను వెల ₹ 2.50 అనేది చాలా తక్కువని భావించాడు. అంతడు ఒక పెన్ను వెల కనీసం ₹16 ఉండాలని భావించాడు. అప్పుడు ప్రతీనోటు పుస్తకం వెల కూడా ₹16 అవుతుంది.

ఈ రకంగా మొత్తం వెల ₹ 80 అయ్యేటట్లు ఒక నోటు పుస్తకం వెల మరియు ఒక పెన్ను వెలకు అనేక విలువలు సాధ్యపడతాయి. మరి సిరి, లక్ష్మిలు వాటిని కొన్నవెల ఎంతో మనం ఎలా కనుగొంటాము? కేవలం సిరి సందర్భాన్ని తీసుకోవడం ద్వారా వాటి విలువలను విడివిడిగా మనం కనుగొనలేము. అందువల్ల మనం లక్ష్మి సందర్భాన్ని కూడా తీసుకోవాలి. కాబట్టి రెండు చరరాశులు ఉన్నపుడు ఒకే ఒక సాధన కావాలంటే కనీసం రెండు స్వతంత్ర సమీకరణాలు కావాలి. ఈ అవ్యక్త చరరాశుల విలువలు కనుగొనుటకు 'మోడల్ పద్ధతి' ఒక పద్ధతి. ఈ

పద్ధతిలో అవ్యక్తరాశులను దీర్ఘచతురస్రాలు లేదా దీర్ఘచతురస్ర భాగాలతో సూచిస్తారు. ఈ మోడల్ పద్ధతిలో మొదటి సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాము.

4.1.2 రెండు సమీకరణాలను ఒకేసారి ఉపయోగించడం

లక్ష్మి కూడా సిరి కొన్న లాంటి నోటు పుస్తకాలు, పెన్నులనే కొన్నది. ఆమె 4 నోటు పుస్తకాలు మరియు 3 పెన్నులకు ₹110 చెల్లించినది.

కావున మనకున్న రెండు సందర్భాలను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

(i) 3 నోటు పుస్తకాలు + 2 పెన్నులు = ₹80.

(ii) 4 నోటు పుస్తకాలు + 3 పెన్నులు = ₹110.

ఇవి మనకు ఒక పెన్నువెల, ఒక నోటు పుస్తకం వెల కనుగొనడానికి ఉపయోగపడతాయా?

రుబీనా ఊహించి చెప్పిన వెలను పరిశీలిద్దాం. ఒక నోటు పుస్తకం వెల ₹25 మరియు ఒక పెన్ను వెల ₹ 2.50 అపుడు

4 నోటు పుస్తకముల వెల : $4 \times 25 =$ ₹100

మరియు 3 పెన్నుల వెల : $3 \times 2.50 =$ ₹7.50

స్నిగ్ధ చెప్పినది సత్యమైన లక్ష్మి దుకాణదారునకు ₹100 + 7.50 = ₹107.50 చెల్లించి వుండాలి. కాని ఆమె ₹110 చెల్లించినది.

ఇప్పుడు జోసెఫ్ చెప్పిన వెలలతో చూద్దాం.

1 పెన్ను వెల ₹16 అయిన 4 నోటుపుస్తకముల వెల : $4 \times 16 =$ ₹64

1పెన్ను వెల ₹16 అయిన 3 పెన్నుల వెల : $3 \times 16 =$ ₹ 48

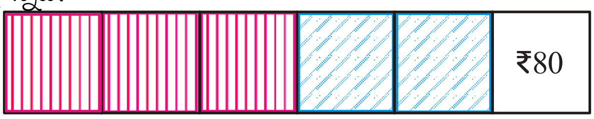
జోసెఫ్ చెప్పినది సత్యమైన, లక్ష్మి దుకాణదారునకు ₹64 + 48 = ₹112 చెల్లించి వుండాలి. కాని ఇది ఆమె చెల్లించిన దాని కన్నా ఎక్కువ.

మరి మనము ఏమి చేయాలి? ఒక నోటు పుస్తకము, 1 పెన్నుల ఖచ్చితమైన విలువను ఎలా కనుగొనాలి?

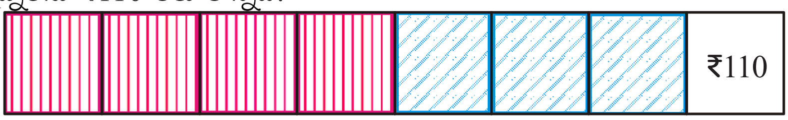
మనకు ఒకే ఒక సమీకరణము వుండి దానిలో రెండు అవ్యక్తరాశులు (చరరాశులు) వుంటే దానికి అనేక సాధనలు కనుగొనవచ్చును.

సోపానం-1 : నోటు పుస్తకములను ▥ తో కలములను ▨ తో సూచించుము.

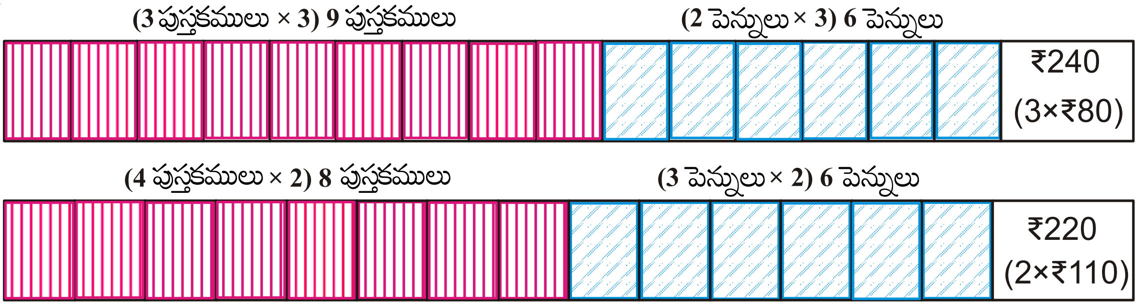
సిరి 3 నోటు పుస్తకములు, 2 పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది.



లక్ష్మి 4 నోటు పుస్తకములు, 3 పెన్నులను ₹110 లకు కొన్నది.



సోపానం-2 : రెండు సందర్భాలలోని ఒక రాశిని సమానం చేయడానికి ఆ రాశులను అనుపాతంలో పెంచాలి (లేదా తగ్గించాలి) .



సోపానం 2లో మనం ఒక సాధారణ అనుపాత తర్కాన్ని పరిశీలించవచ్చును. సిరి 3 పుస్తకములు మరియు 2 పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది కావున 9 పుస్తకములు మరియు 6 పెన్నులకు

$3 \times 3 = 9$ పుస్తకములు మరియు $3 \times 2 = 6$ పెన్నులు, వెల $3 \times 80 =$ ₹240 (1)

అదేవిధంగా, లక్ష్మి 4 పుస్తకములు, 3 పెన్నులను ₹110 లకు కొన్నది కావున

$2 \times 4 = 8$ పుస్తకములు మరియు $2 \times 3 = 6$ పెన్నుల వెల $2 \times 110 =$ ₹220 (2)

(1), (2) సమీకరణములను పోల్చగా, అదనంగా వున్న 1 నోటు పుస్తకం వెల

₹240 - ₹ 220 = ₹20. కావున ఒక పుస్తకం వెల ₹20.

సిరి 3 పుస్తకములు మరియు 2 పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది. ప్రతీ పుస్తకం వెల ₹20 కనుక 3 పుస్తకముల వెల ₹ 60. అపుడు 2 పెన్నుల వెల ₹ 80 - ₹ 60 = ₹ 20.

కావున ప్రతీ పెన్ను వెల ₹20 ÷ 2 = ₹10.

లక్ష్మి సందర్భాన్ని ఈ విలువలతో ప్రయత్నించండి. 4 పుస్తకముల వెల ₹ 80 మరియు 3 పెన్నుల వెల ₹ 30 వాటి మొత్తము ₹ 110 అనేది సత్యము.

పై గణనలు మరియు చర్చను బట్టి ఒకే ఒక సాధన కావాలంటే రెండు చరరాశులు వున్నప్పుడు కనీసం రెండు స్వతంత్ర్య సమీకరణాలు కావాలని మనకు విశదమవుతుంది.

సాధారణంగా $ax + by + c = 0$ రూపంలో వుండి a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలౌతూ కనీసం a లేదా b సున్న కానట్టి సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశులలో x, y లలో రేఖీయ సమీకరణం అంటారు. [ఈ నిబంధన మనం సాధారణంగా $a^2 + b^2 \neq 0$ అని వ్రాస్తాము].

ప్రయత్నించండి

ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సరియైన సమాధానాన్ని గుర్తించండి.

1. ఈ క్రింది సమీకరణాలలో ఏది రేఖీయ సమీకరణం కాదు?

a) $5 + 4x = y + 3$　　b) $x + 2y = y - x$

c) $3 - x = y^2 + 4$　　d) $x + y = 0$

2. ఈ క్రింది వాటిలో ఏది ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణము ?

 a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

 c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. క్రింది సంఖ్యలలో ఏది $2(x + 3) = 18$ అనే సమీకరణానికి సాధన?

 a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4. $2x - (4 - x) = 5 - x$ అనే సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచే x విలువ

 a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5. $x - 4y = 5$ అనే సమీకరణానికి

 a) సాధనలేదు b) ఒకే ఒక సాధన

 c) రెండు సాధనలు d) అనంతమైన సాధనలు

4.2 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలకు సాధనలు

ప్రారంభంలో యిచ్చిన నోటుపుస్తకాలు, పెన్నులు ఉదాహరణలో మనకు ఎన్ని సమీకరణాలు వున్నాయి ? మనకు రెండు సమీకరణాలు లేదా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత వుంది. ఈ రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన అంటే ఏమిటి?

ప్రతీ సమీకరణాన్ని ఉమ్మడిగా తృప్తిపరచే x, y చరరాశుల విలువల జత రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన అవుతుంది.

4.2.1 గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనుట

రెండు చరరాశులలో నున్న రేఖీయ సమీకరణాల జతకు గల సాధనల సంఖ్య ఎంత? ఈ సంఖ్య అనంతమా, ఒకటా లేదా అసలు సాధనలు వుండవా ?

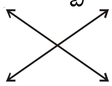
ఇంతకు ముందర మనం రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి మోడల్ పద్ధతి ఉపయోగించాము. ఇప్పుడు సమీకరణాల సాధనకు గ్రాఫ్‌లను ఉపయోగిద్దాము.

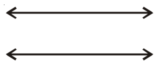
$a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0; (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ లు రెండు చరరాశులలో గల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణాలు.

రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణానికి గీసిన గ్రాఫ్ ఒక సరళరేఖ. ఈ రేఖపై గల వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మము (x, y) లచే సూచించబడే బిందువులు సమీకరణానికి సాధనలు మరియు ఈ రేఖపై లేని వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మాలచే సూచించబడే బిందువులు సాధనలు కావు.

మనకు ఒక సమీకరణాల జత వున్నపుడు, అవి ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలను సూచిస్తాయి. మరి ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలు వుంటే ఆ రెండు రేఖలకు సాధ్యమయ్యే సంబంధాలేవి ? ఆ సంబంధాలకు గల ప్రాధాన్యత ఏమిటి?

ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలు గీసినపుడు, ఈ క్రింది మూడు సందర్భాలలో ఒక్కటి మాత్రమే సాధ్యము.

i) ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకోవచ్చును. 

ii) ఆ రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకోకపోవచ్చును అనగా అవి సమాంతర రేఖలు కావచ్చును. 

iii) ఆ రెండు సరళరేఖలు ఏకీభవించవచ్చును.

నిజానికి ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒకటే, మొదటి ఉదాహరణను x, y లలో సమీకరణంగా వ్రాద్దాం. దీనిలో 'x' ఒక నోటు పుస్తకం వెలను, y ఒక పెన్ను వెలను సూచిస్తాయి అనుకొనుము. అప్పుడు ఆ సమీకరణాలు $3x + 2y = 80$ మరియు $4x + 3y = 110$.

$3x + 2y = 80$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{80-3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{80-3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \frac{80-3(10}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \frac{80-3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \frac{80-3(30}{2} = -5$	(30, -5)

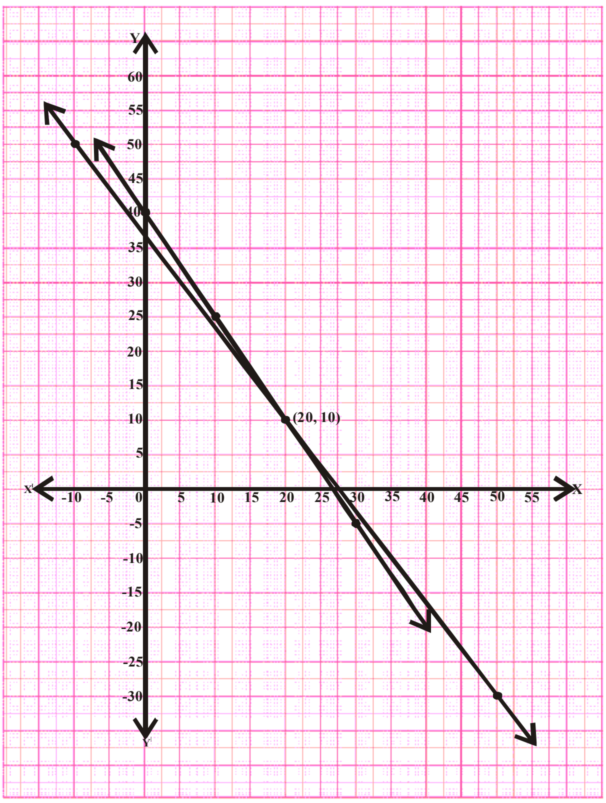
$4x + 3y = 110$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{110-4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \frac{110-4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \frac{110-4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \frac{110-4(50)}{3} = -30$	(50, -30)

పై బిందువులను ఒక కార్టీజియన్ తలంలో గుర్తించగా ఏర్పడిన గ్రాఫ్‌ను పరిశీలిస్తే, ఆ రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు (20, 10) అని గమనించవచ్చును.

ఈ x మరియు y విలువలను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా మనకు $3(20) + 2(10) = 80$ మరియు $4(20) + 3(10) = 110$.

కాబట్టి గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా ప్రతీ నోటు పుస్తకం వెల ₹20 మరియు ప్రతీ పెన్ను ఖరీదు ₹10 అని కనుగొనబడింది. మోడల్ పద్ధతి ద్వారా కూడా మనకు ఇదే సాధన వచ్చిన విషయాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

(20, 10) బిందువు ఆ రేఖలకు ఏకైక ఉమ్మడి బిందువు కావున రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఒకే ఒక సాధన వుంటుంది. ఇటువంటి సమీకరణాలను సంగత రేఖీయ సమీకణాల జత అంటారు. వీటికి ఎల్లప్పుడూ ఒకే ఒక సాధన వుంటుంది.

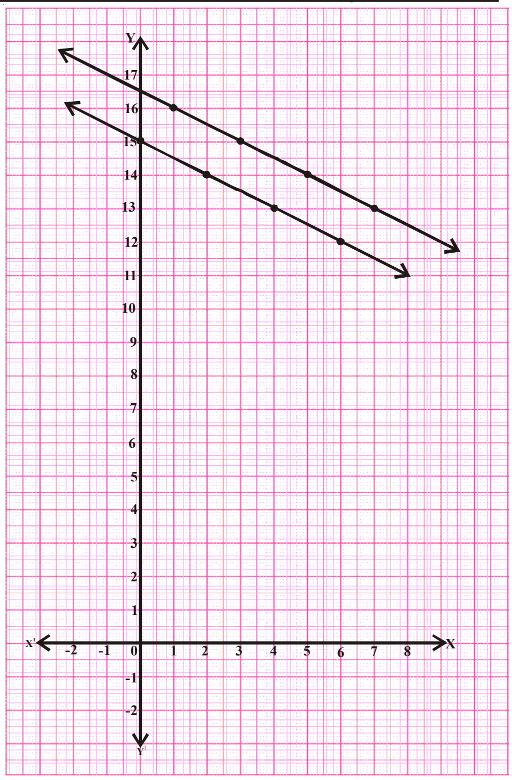


ఇపుడు మనం ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి విభాగంలో ఇచ్చిన మొదటి ఉదాహరణను గమనిద్దాం. మనం దానిలో 1 కిలో బంగాళా దుంపల వెలను, 1 కిలో టమాటాల వెలను విడివిడిగా కనుగొనాలి. 1 కిలో బంగాళా దుంపల వెల ₹x మరియు 1కిలో టమాటాల వెల ₹y అనుకొనుము. అప్పుడు ఏర్పడే సమీకరణాలు $1x+2y=30$ మరియు $2x+4y=66$.

$x + 2y = 30$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

$2x + 4y = 66$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$	(7, 13)

ఈ సందర్భాన్ని గ్రాఫ్‌లో సూచించినపుడు రెండు సమాంతర రేఖలు ఏర్పడతాయి. ఈ రేఖలు అసలు ఖండించుకొనవు కనుక ఈ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి సాధన లేదు. అనగా వేరు వేరు రోజులలో బంగాళదుంపలు, టమాటాల వెలలు వేరువేరుగా వుంటాయి. నిజజీవితంలో కూడా యిది సత్యమే. ఎందుకంటే కూరగాయల ధరలు ఎప్పుడూ ఒకే విధంగా వుంటాయని మనం భావించలేము. అవి ఎప్పుడూ మారుతూ వుంటాయి. మరియు ఈ మార్పు స్వతంత్ర మార్పు.



ఈ విధంగా సాధన లేని రేఖీయ సమీకరణాల జతలను అసంగత రేఖీయ సమీకరణాల జతలు అంటారు.

అలాగే “ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి” విభాగంలోని రెండవ ఉదాహరణలో ప్రతీ బ్యాటు వెలను ₹ x మరియు ప్రతీ బంతి వెలను ₹ y అనుకొనుము. అప్పుడు ఆ సమీకరణాలను వ్రాయగా $3x + 6y = 3900$ మరియు $x + 2y = 1300$.

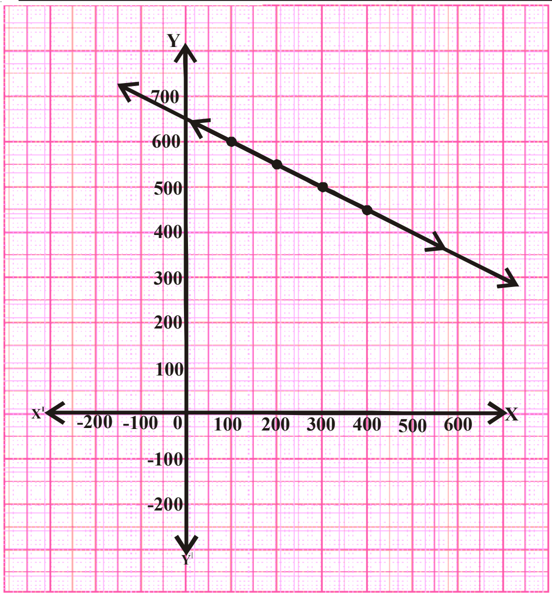
$3x + 6y = 3900$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

$x + 2y = 1300$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)

200	$y = \dfrac{3900-3(200)}{6} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{3900-3(300)}{6} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{3900-3(400)}{6} = 450$	(400, 450)

200	$y = \dfrac{1300-200}{2} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{1300-300}{2} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{1300-400}{2} = 450$	(400, 450)

ఈ సమీకరణాలు గ్రాఫ్‌లో ఏకీభవించే రేఖలుగా సూచించబడటాన్ని మనం గమనించవచ్చును. సమీకరణాల సాధనలు ఉమ్మడి బిందువులైతే, ఈ సందర్భంలో ఉమ్మడి బిందువులు ఏవి ?



గ్రాఫ్ నుండి, రేఖపై ఏర్పడిన ప్రతీ బిందువు రెండు సమీకరణాలకు ఉమ్మడి సాధనగా ఉండడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. రెండు సమీకరణాలు తుల్యాలు కనుక వాటికి అనంతమైన సాధనలు వుంటాయి. ఇటువంటి సమీకరణాలను రెండు చరరాశులలో గల పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాలు అంటారు.

ప్రయత్నించండి

పైన ఇచ్చిన ఉదాహరణలో ప్రతీ బ్యాటు మరియు ప్రతీ బంతి వెలను మీరు కనుగొనగలరా ?

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాల జత ఎల్లప్పుడూ సంగత జత అవుతుందా ? ఎందుకు అవుతుంది (లేదా) ఎందుకు కాదు? కారణాన్ని వివరించండి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించండి.

   i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$ ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$ iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. ఒక రైలు మార్గంలోని రెండు రైలు పట్టాలను సూచించే సమీకరణాలు $x + 2y - 4 = 0$ మరియు $2x + 4y - 12 = 0$ ఈ సందర్భాన్ని గ్రాఫ్ ద్వారా సూచించండి.

4.2.3 గుణకములు మరియు సమీకరణ వ్యవస్థ స్వభావము మధ్యగల సంబంధము

a_1, b_1, c_1 మరియు a_2, b_2, c_2 లు ఇచ్చిన రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణాల జతలోని గుణకములు అయిన పై ఉదాహరణలలోని $\dfrac{a_1}{a_2}, \dfrac{b_1}{b_2}, \dfrac{c_1}{c_2}$ ల విలువలు వ్రాసి వాటిని పోల్చుదాము.

సరళరేఖల జతలు	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	నిష్పత్తుల పోలిక	సూచించే గ్రాఫ్	బీజగణిత వివరణ
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ఖండన రేఖలు	ఏకైక సాధన
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	సమాంతర రేఖలు	సాధనలేదు
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ఏకీభవించే రేఖలు	అనంతమైన సాధనలుండును

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. క్రింది సమీకరణాల జత ఖండనరేఖలా, సమాంతర రేఖలా లేదా ఏకీభవించే రేఖలా సరిచూడండి. ఆ సమీకరణాలు సంగతము అయిన వాటి సాధన కనుగొనుము.

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

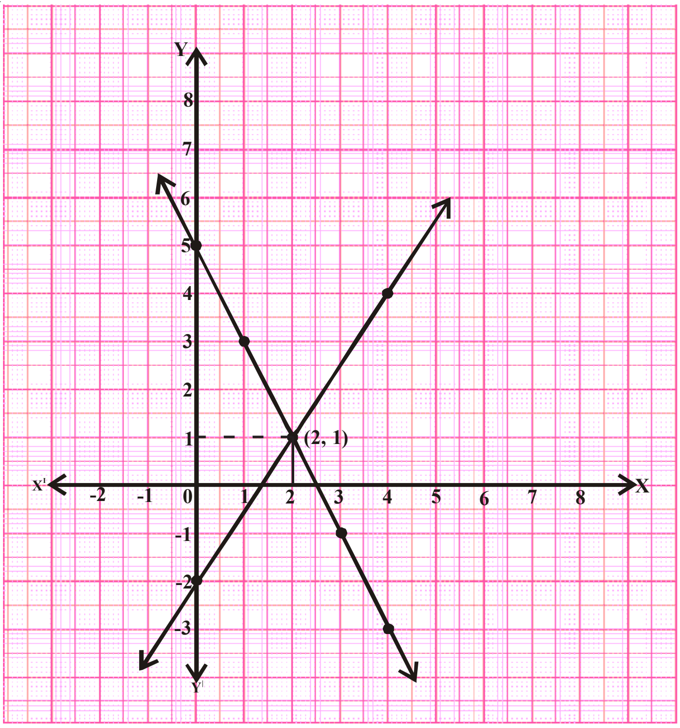
సాధన : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ కావున అవి ఖండన రేఖలు అనగా సంగత రేఖీయ సమీకరణాల జత

$2x + y = 5$ సమీకరణానికి		
x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

$3x - 2y = 4$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)

ఈ సమీకరణాల జతకు ఏకైక సాధన(2,1).



ఉదాహరణ-2. క్రింది సమీకరణాల జత సంగత జత అవునో, కాదో సరిచూడండి.

$3x + 4y = 2$ మరియు $6x + 8y = 4$

గ్రాఫ్ గీయడం ద్వారా మీ జవాబును సరిచూడండి.

సాధన : $3x + 4y - 2 = 0$

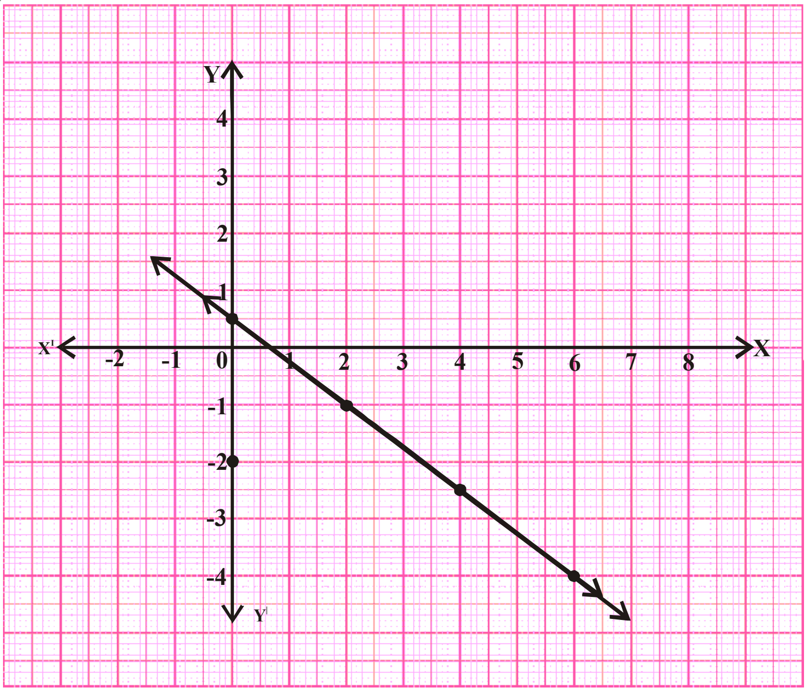
$6x+8y - 4 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ కావున అవి ఏకీభవించే రేఖలు. కావున ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జత పరస్పరాధారిత సమీకరణాల జత

$3x + 4y = 2$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)

$6x + 8y = 4$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)



ఉదాహరణ-3. $4x–6y = 15$ మరియు $2x–3y = 5$ సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలేమో సరిచూడండి. ఇంకా వాటికి గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన : $4x–6y – 15 = 0$

$2x – 3y – 5 = 0$

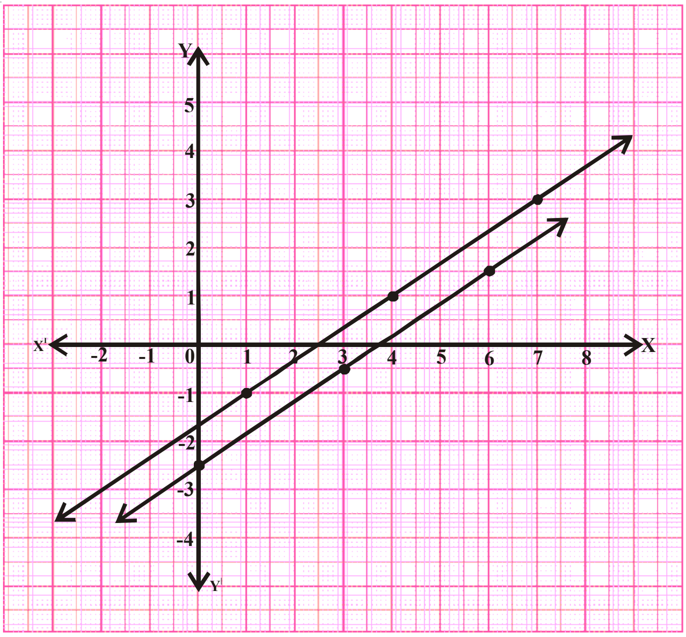
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $\qquad$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1}$ $\qquad$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

ఇవి అసంగత సమీకరణాలు. వీటికి సాధనలేదు మరియు వీటి రేఖా చిత్రము (గ్రాఫ్) సమాంతర రేఖలు.

$4x – 6y = 9$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{15-4x}{-6}$	(x, y)
0	$y = \frac{15-0}{-6} = \frac{-5}{2}$	$(0, –2.5)$
3	$y = \frac{15-4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$	$(3, –0.5)$
6	$y = \frac{15-4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$	$(6, 1.5)$

$2x – 3y = 5$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{5-2x}{-3}$	(x, y)
1	$y = \frac{5-2(1)}{-3} = -1$	$(1, –1)$
4	$y = \frac{5-2(4)}{-3} = 1$	$(4, 1)$
7	$y = \frac{5-2(7)}{-3} = 3$	$(7, 3)$



ఇవి చేయండి

క్రింది సమీకరణాల జతలకు ఏకైక సాధన, అనంత సాధనలా లేక సాధనలు లేవో సరిచూడండి. వాటిని గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

(i) $2x+3y = 1$, $3x-y = 7$ (ii) $x + 2y = 6$, $2x + 4y = 12$ (iii) $3x + 2y = 6$, $6x+4y = 18$

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సమీకరణాల జతకు 'p' యొక్క ఏ విలువకు ఏకైక సాధన వుంటుందో కనుగొనండి.
$2x + py = -5$ మరియు $3x + 3y = -6$
2. $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 = 0$ సమీకరణాల జతకు, k యొక్క ఏ విలువకు అవి సమాంతర రేఖలవుతాయో కనుగొనండి.
3. 'k' యొక్క ఏ విలువకు, $3x + 4y + 2 = 0$ మరియు $9x + 12y + k = 0$ రేఖా సమీకరణాల జత ఏకీభవించే రేఖలవుతాయో కనుగొనండి.
4. 'p' యొక్క ఏ ధనవిలువలకు క్రింది సమీకరణాల జతకు అనంత సాధనలుంటాయో కనుగొనండి.
$px + 3y - (p - 3) = 0$
$12x + py - p = 0$

ఇప్పుడు మనం మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ-4. ఒక తోటలో కొన్ని తుమ్మెదలు మరియు పువ్వులు కలవు. ప్రతీ పువ్వుపై ఒక తుమ్మెద వాలినపుడు ఒక తుమ్మెద మిగిలిపోతుంది. ప్రతీ పువ్వుపై రెండు తుమ్మెదలు వాలితే ఒక పువ్వు మిగిలిపోతుంది. అయిన పువ్వులెన్ని ? తుమ్మెదలెన్ని ?

సాధన : తుమ్మెదల సంఖ్య $= x$

పువ్వుల సంఖ్య $= y$ అనుకొనుము.

ప్రతీ పువ్వుపై ఒక తుమ్మెద వాలిన, ఒక తుమ్మెద మిగిలిపోతుంది. కావున $x = y + 1$

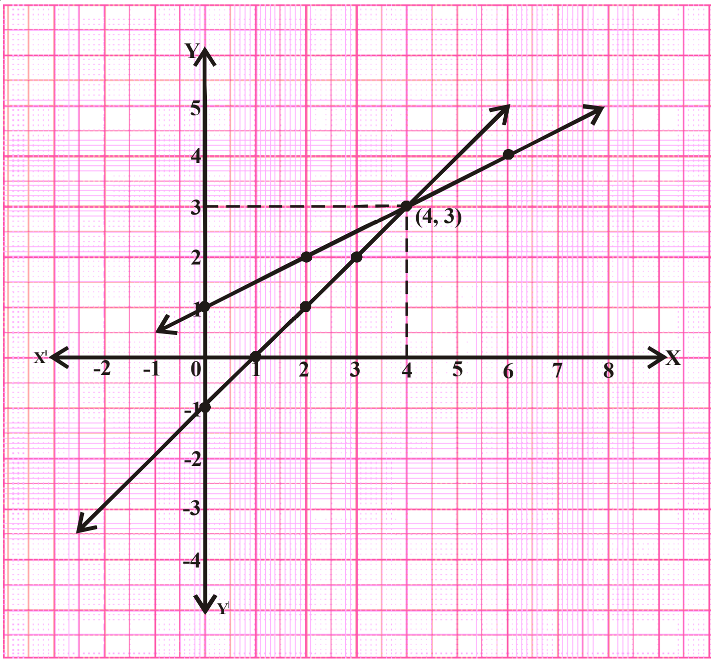
అనగా $x - y - 1 = 0$ (1)

ప్రతీ పువ్వుపై రెండు తుమ్మెదలు వాలితే, ఒక పువ్వు మిగిలిపోతుంది, కావున $x = 2(y-1)$

అనగా $x - 2y + 2 = 0$ (2)

$x - y - 1 = 0$ సమీకరణానికి		
x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

$x - 2y + 2 = 0$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)



అందువలన తుమ్మెదల సంఖ్య 4 మరియు పువ్వుల సంఖ్య 3.

ఉదాహరణ-5. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము చుట్టుకొలత 32మీ. దాని పొడవును 2మీ పెంచి, వెడల్పును 1మీ తగ్గించగా దాని వైశాల్యములో ఏమార్పు లేక యథాతథంగా వుండును. అయిన ఆ స్థలము పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా l, b అనుకొనుము. అయిన వైశాల్యము $= lb$ మరియు

చుట్టుకొలత $= 2(l + b) = 32$ మీ.

$l + b = 16$ లేదా $l + b - 16 = 0$ (1)

దాని పొడవును 2 మీ., పెంచగా ఏర్పడిన క్రొత్త పొడవు $l+2$. అలాగే వెడల్పును 1మీ తగ్గించగా ఏర్పడిన క్రొత్త వెడల్పు $b - 1$.

అపుడు వైశాల్యము $= (l+2)(b-1)$

కాని వైశాల్యములో మార్పులేదు, కాబట్టి

$(l+2)(b-1) = lb$

$lb - l + 2b - 2 = lb$ లేదా $lb - lb = l - 2b + 2$

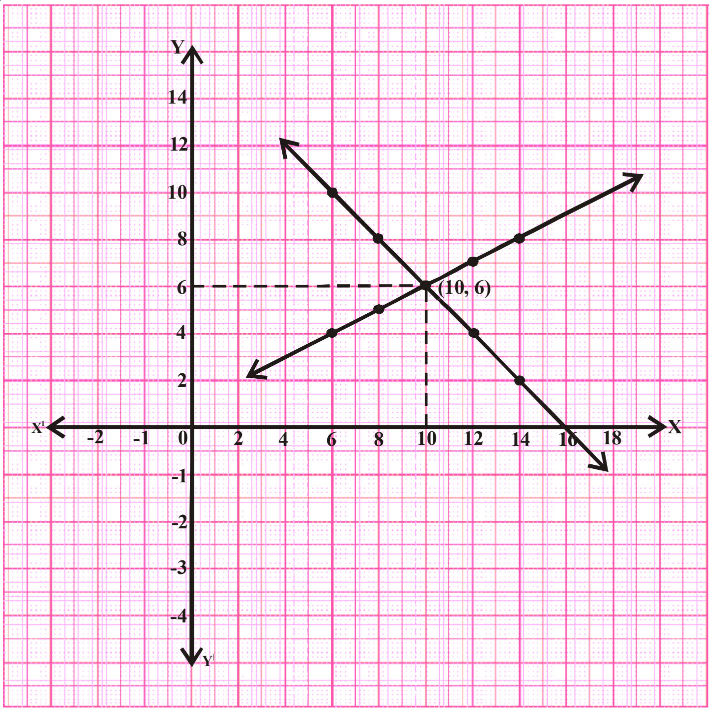
$l - 2b + 2 = 0$ (2)

$l + b - 16 = 0$ సమీకరణానికి		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

$l - 2b + 2 = 0$ సమీకరణానికి		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

కావున ఆ స్థలము యొక్క అసలైన పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 10మీ మరియు 6మీ.

పొడవు కొలతలు X−అక్షముపైనను, వెడల్పుకొలతలు Y− అక్షముపై తీసుకోగా



అభ్యాసము - 4.1

1. గ్రాఫ్‌లు గీయకుండా, $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ నిష్పత్తులను పోల్చి, క్రింద యిచ్చిన రేఖా సమీకరణాల జతలు ఖండన రేఖలో, సమాంతర రేఖలో లేదా ఏకీభవించే రేఖలో కనుగొనుము.

   a) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$
   b) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$
   c) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

2. క్రింద యిచ్చిన సమీకరణాల జతలు సంగత సమీకరణాలో, అసంగత సమీకరణాలో సరిచూడుము. వాటిని రేఖా చిత్ర పద్ధతిన (గ్రాఫ్ పద్ధతిలో) సాధించుము.

   a) $3x + 2y = 5$, $2x - 3y = 7$
   b) $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 9$
   c) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$, $9x - 10y = 14$
   d) $5x - 3y = 11$, $-10x + 6y = -22$
   e) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$, $2x + 3y = 12$
   f) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
   g) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
   h) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
   i) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

3. నేహ కొన్ని ప్యాంటులను మరియు స్కర్టులను కొనడానికి దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె మిత్రురాలు ప్యాంటులు ఎన్ని, స్కర్టులు ఎన్ని కొన్నావని అడుగగా ఆమె ఇలా జవాబిచ్చింది. "నేను కొన్న స్కర్టుల సంఖ్య, ప్యాంట్ల సంఖ్య రెట్టింపు కన్నా రెండు తక్కువ. అలాగే స్కర్టుల సంఖ్య ప్యాంట్ల సంఖ్యకు నాలుగు రెట్లు కన్నా నాలుగు తక్కువ".

   నేహ ఎన్ని ప్యాంటులు, ఎన్ని స్కర్టులు కొన్నదో తెలుసుకోవడంలో ఆమె మిత్రురాలికి సహాయం చేయండి.

4. పదవతరగతి చదివే 10 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత క్విజ్‌లో పాల్గొన్నారు. దానిలో పాల్గొన్న బాలికల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్య కన్నా 4 ఎక్కువ అయిన ఆ క్విజ్‌లో పాల్గొన్న బాలికల సంఖ్యను, బాలుర సంఖ్యను కనుగొనండి.

5. 5 పెన్సిళ్ళు మరియు 7 కలముల మొత్తము వెల ₹50. అలాగే 7 పెన్సిళ్ళు మరియు 5 కలముల మొత్తము వెల (అవేరకం) ₹46 అయిన ప్రతీ పెన్సిల్ మరియు కలము వెల కనుగొనండి.

6. వెడల్పు కన్నా పొడవు 4మీ ఎక్కువ కలిగిన ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార తోట చుట్టుకొలతలో సగము 36మీ. అయిన ఆతోట కొలతలు కనుగొనుము.

7. $2x + 3y - 8 = 0$ ఒక రేఖీయ సమీకరణము. దీనితో జ్యామితీయంగా ఖండన రేఖలను ఏర్పరిచేటట్లు వేరొక రేఖీయ సమీకరణాన్ని రాయండి.

   అదేవిధంగా సమాంతర రేఖలు అయ్యేటట్లు, ఏకీభవించే రేఖలు అయ్యేటట్లు మరి రెండు సమీకరణాలను రాయండి.

8. ఒక దీర్ఘ చతురస్రానికి పొడవు 5యూనిట్లు తగ్గించి, వెడల్పు 2యూనిట్లు పెంచగా, వైశాల్యము 80చదరపు యూనిట్లు తగ్గును. పొడవును 10 యూనిట్లు పెంచి, వెడల్పు 5 యూనిట్లు తగ్గించగా, వైశాల్యము 50 చదరపు యూనిట్లు పెరుగును. అయిన ఆ దీర్ఘ చతురస్రము పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

9. 10వ తరగతిలో, ముగ్గురేసి విద్యార్థులు ఒక బెంచిపై కూర్చొనగా, ఒక విద్యార్థికి కూర్చునేందుకు స్థలము వుండదు. అలాగని ఒక్కొక్క బెంచిలో నలుగురేసి విద్యార్థులు కూర్చొన్నచో, ఒక బెంచీ ఖాళీగా మిగిలి పోవును. అయిన ఆ తరగతిలోని విద్యార్థులెందరు? బెంచీలెన్ని ? కనుగొనుము.

4.3 రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి బీజగణిత పద్ధతులు

గ్రాఫ్ పద్ధతిలో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన ఎలా కనుగొనాలో మనం నేర్చుకున్నాము. కాని సాధనను సూచించే బిందువు నిరూపకాలు పూర్ణసంఖ్యలు కానపుడు ఈ గ్రాఫ్ పద్ధతి అంత అనుకూలమైనది కాదు. ఉదాహరణకు సాధనలు $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$.... మొదలగు రూపాలలో వుంటే ఆ బిందువులను గ్రాఫ్‌పై గుర్తించేటప్పుడు, గ్రాఫ్ నుండి వాటిని బిందు రూపంలో రాసేటపుడు తప్పుజరిగే అవకాశాలు చాలా ఎక్కువ. మరి ఈ సాధన కనుగొనడానికి ఏవైనా యితర పద్ధతులున్నాయా? అనేక బీజగణిత పద్ధతులున్నాయి. వాటిలో కొన్ని మనం చర్చించుకొందాము.

4.3.1 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనుటలో ఒక చరరాశిని, రెండవ చరరాశి పదములలో సులభంగా రాయగలిగినపుడు ఈ పద్ధతి చాలా ఉపయోగకరం. సోపానాల ప్రకారం పరిశీలిద్దాం.

సోపానము-1 : ఒక సమీకరణంలో ఒక చరరాశిని వేరొక చరరాశి పదములలో రాయుము. చరరాశి 'y' ని చరరాశి 'x' పదములలో రాయాలి.

సోపానము-2 : సోపానము 1లో వచ్చిన చరరాశి y విలువను రెండవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించాలి.

సోపానము-3 : సోపానము 2లో వచ్చిన సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించి x విలువ కనుగొనాలి.

సోపానము-4 : సోపానము 3లో వచ్చిన 'x' విలువని ఇచ్చిన సమీకరణాలలో ఏదో ఒక దానిలో ప్రతిక్షేపించి దానిని చరరాశి y కొరకు సాధించాలి.

సోపానము-5 : వచ్చిన సాధనలోని x, y విలువలను ఇచ్చిన రెండవ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడుము.

ఉదాహరణ-6. ఇచ్చిన సమీకరణాల జతను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$$2x - y = 5$$
$$3x + 2y = 11$$

సాధన : $2x - y = 5 \quad (1)$

$3x + 2y = 11 \quad (2)$

(1) వ సమీకరణాన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చును

$y = 2x - 5$ (సోపానము 1)

దీనిని (2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$3x + 2(2x - 5) = 11$ (సోపానము 2)

$3x + 4x - 10 = 11$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$ (సోపానము 3)

$x = 3$ ని సమీకరణం (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$2(3) - y = 5$ (సోపానము 4)

$y = 6 - 5 = 1$

x, y ల విలువలు (2)లో ప్రతిక్షేపించగా $3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$

కాబట్టి, కావలసిన సాధన $x = 3$ మరియు $y = 1$.

యిచ్చిన రెండు సమీకరణాలను $x = 3$ మరియు $y = 1$ సంతృప్తి పరుస్తాయి (సోపానము 5)

ఇవి చేయండి

క్రింద యిచ్చిన ప్రతీ జత సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

1) $3x - 5y = -1$
$x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$
$2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$
$3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$
$3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో, సమీకరణాలలోని ఒక చరరాశి గుణకాలను సమానం చేయడం ద్వారా ఆ చరరాశిని తొలగిస్తాము. దీని వలన ఒక చరరాశిలో ఒకే సమీకరణము ఏర్పడుతుంది. దానిని సాధించడం ద్వారా రెండవ చరరాశి విలువ వస్తుంది. ఈ పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడానికి దీనిలోని ముఖ్యసోపానాలు గమనించండి.

సోపానము-1 : ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలను $ax + by = c$ రూపంలో రాయండి.

సోపానము-2 : ఆ రెండు సమీకరణాలను సరియైన వాస్తవ సంఖ్యలతో గుణించడం ద్వారా ఆ రెండు సమీకరణాలలోని రెండు చరరాశులలో తొలగించదలచిన ఒక చరరాశి గుణకాన్ని సమానం చేయండి.

సోపానము-3 : మనం తొలగించవలసిన చరరాశి గుణకాలు రెండు సమీకరణాలలో ఒకే గుర్తును కలిగి వుంటే ఒక సమీకరణం నుండి వేరొకటి తీసివేయడం ద్వారా ఒక చరరాశిలో ఒక సమీకరణం వస్తుంది. అదే వాటికి వ్యతిరేక గుర్తులుంటే వాటిని కూడాలి.

సోపానము-4 : మిగిలిన చరరాశి విలువ కొరకు ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సోపానము-5 : ఈ వచ్చిన విలువను ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలలో ఒకదానిలో ప్రతిక్షేపించి, మనం ముందు తొలగించిన చరరాశి విలువ కనుగొనాలి.

ఉదాహరణ-7. క్రింద ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

$3x + 2y = 11$

$2x + 3y = 4$

సాధన : $3x + 2y = 11$ (1)

$2x + 3y = 4$ (2) (సోపానము 1)

ఇచ్చిన సమీకరణాల నుండి చరరాశి 'y'ని తొలగించాలనుకొనుము. రెండు సమీకరణాలలో 'y' గుణకాలు వరుసగా 2 మరియు 3. వాటి క.సా.గు. 6. కావున సమీకరణము (1) ని 3చే, సమీకరణము (2) ని 2 చే గుణించాలి.

సమీకరణము (1) × 3 $\quad 9x + 6y = 33$ (సోపానము 2)

సమీకరణము (2) × 2 $\quad 4x + 6y = 8$

(-) (-) (-) (సోపానము 3)

$5x = 25$

$x = \frac{25}{5} = 5$ (సోపానము 4)

$x = 5$ విలువను సమీకరణం (1)లో వ్రాయగా

$3(5) + 2y = 11$

$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$ (సోపానము 5)

కావున కావలసిన సాధన $x = 5,\ y = -2$.

ఇవి చేయండి

క్రింది ప్రతీజత రేఖీయ సమీకరణాలను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

1. $8x + 5y = 9$, $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$, $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$, $5x - 6y = -9$

ప్రయత్నించండి.

ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతను సాధించండి.

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ-8. రుబీనా బ్యాంకు నుండి ₹2000 తీసుకొనదలచినది. ఆమె క్యాషియర్‌ను ఆ మొత్తానికి ₹50 మరియు ₹100 నోట్లు మాత్రమే ఈయమని కోరినది. మొత్తము ఆమెకు 25 నోట్లు వచ్చిన, ఆమెకు ఎన్ని ₹50 నోట్లు, ఎన్ని ₹100 నోట్లు వచ్చినవో చెప్పగలరా ?

సాధన : ఆమెకు వచ్చిన ₹50 నోట్ల సంఖ్యను x అని

₹100 నోట్ల సంఖ్యను y అని అనుకొనుము.

అపుడు, $x + y = 25$ (1)

మరియు $50x + 100y = 2000$ (2)

వీనిని ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో సాధించినది.

(1) వ సమీకరణము నుండి $x = 25 - y$

(2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా $50(25 - y) + 100y = 2000$

$$1250 - 50y + 100y = 2000$$

$$50y = 2000 - 1250 = 750$$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

కావున రుబీనా పది ₹50 నోట్లను, పదిహేను ₹100 నోట్లను తీసుకొన్నది.

శ్వేత చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి ద్వారా దీనిని సాధించినది.

సమీకరణాలలో, x గుణకాలు వరుసగా 1 మరియు 50 కావున

సమీకరణము (1) × 50 $\quad 50x + 50y = 1250$

సమీకరణము (2) × 1 $\quad 50x + 100y = 2000$ $\quad$ ఒకే గుర్తు కావున సమీకరణాన్ని తీసివేయగా

$\quad (-) \quad (-) \quad (-)$

$$-50y = -750$$

లేదా $$y = \frac{-750}{-50} = 15$$

(1)వ సమీకరణంలో y విలువను ప్రతిక్షేపించగా $x + 15 = 25$

$$x = 25 - 15 = 10$$

కావున ఆమె పది ₹50 నోట్లను, పదిహేను ₹100 నోట్లను తీసుకొన్నది.

ఉదాహరణ-9. ఒక పోటీ పరీక్షలో, ప్రతీ సరియైన సమాధానానికి 3 మార్కులు వేయగా, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 1 మార్కు తగ్గించెదరు. ఈ పరీక్షలో మధు 40 మార్కులు సంపాదించెను. ప్రతి సరియైన సమాధానానికి 4 మార్కులు వేసి, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 2 మార్కులు తగ్గించిన అతనికి 50 మార్కులు వచ్చి ఉండేవి అయిన ఆ పరీక్షలో ఉన్న మొత్తము ప్రశ్నలు ఎన్ని? (మధు పరీక్ష పత్రములోని అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాసెను)

సాధన : సరియైన సమాధానముల సంఖ్య x;

తప్పు సమాధానముల సంఖ్య y అనుకొనుము.

ప్రతీ సరియైన సమాధానానికి 3 మార్కులు వేయగా, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 1 మార్కు తగ్గించెదరు. అపుడు అతనికి వచ్చిన మార్కులు 40.

$$3x - y = 40 \qquad (1)$$

ప్రతీ సరియైన సమాధానానికి 4 మార్కులు వేయగా, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 2 మార్కులు తగ్గించిన అతనికి 50 మార్కులు వచ్చి ఉండేవి.

$$4x - 2y = 50 \qquad (2)$$

ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

(1)వ సమీకరణము నుండి, $y = 3x - 40$

(2)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా $4x - 2(3x - 40) = 50$

$4x - 6x + 80 = 50$

$-2x = 50 - 80 = -30$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

x విలువను (1)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$3(15) - y = 40$

$45 - y = 40$

$y = 45 - 40 = 5$

కావున పరీక్షా పత్రములోని మొత్తము ప్రశ్నల సంఖ్య = 15 + 5 = 20

ఇది చేయండి

పై ఉదాహరణ-9 లోని సమస్యను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతిలో సాధించండి.

ఉదాహరణ-10. మేరి తన కూతురితో ఇలా చెప్పింది. "7 సంవత్సరముల క్రితం నా వయస్సు అప్పటి నీ వయస్సుకు 7 రెట్లు. అలాగే యిప్పటి నుండి 3 సంవత్సరముల తరువాత నా వయస్సు నీ వయస్సుకు మూడు రెట్లు ఉంటుంది" అయిన మేరి మరియు ఆమె కూతురి ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనండి.

సాధన : మేరి ప్రస్తుత వయస్సు x సంవత్సరములు

ఆమె కూతురి వయస్సు y సంవత్సరములు అనుకొనుము.

7 సంవత్సరముల క్రితం, మేరి వయస్సు $(x - 7)$ సం॥ ఆమె కూతురి వయస్సు $(y - 7)$సం॥.

$x - 7 = 7(y - 7)$

$x - 7 = 7y - 49$

$x - 7y + 42 = 0$ (1)

3 సంవత్సరముల తరువవాత, మేరి వయస్సు $x + 3$ మరియు ఆమె కూతురి వయస్సు $y + 3$.

$x + 3 = 3(y + 3)$

$x + 3 = 3y + 9$

$x - 3y - 6 = 0$ (2)

చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి

సమీకరణము (1) $x - 7y = -42$

సమీకరణము (2) $x - 3y = 6$

$(-)\quad(+)\quad(-)$

$-4y = -48$

x పదానికి ఒకే గుర్తు కావున సమీకరణం (1) నుండి సమీకరణం (2)ను తీసివేయగా

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

ఈ y విలువను (2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

x-3 (12) - 6 = 0

x = 36 + 6 = 42

కావున మేరి ప్రస్తుత వయస్సు 42 సంవత్సరములు మరియు ఆమె కూతురి వయస్సు 12 సంవత్సరములు.

ఇది చేయండి

ఉదాహరణ -10 లోని సమస్యను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

ఉదాహరణ-11. ఒక ప్రచురణ కర్త, క్రొత్త పాఠ్యపుస్తకాన్ని సిద్ధం చేసాడు. దాని స్థిర వెల (పునర్విమర్శ, ముద్రణ, టైపింగ్ ఖర్చులు మొదలైనవి) ఒక్కో పుస్తకానికి ₹ 31.25. ఇవి కాక అదనంగా అతడు ఆ పుస్తకము ముద్రణకై ₹ 320000 ఖర్చు చేసెను. ఆ పుస్తకము టోకు ధర పుస్తకానికి ₹ 43.75 (ప్రచురణ కర్తకు వచ్చు సొమ్ము) ఆ ప్రచురణ కర్త ఖర్చులు, రాబడి సమానం కావాలంటే సమతుల్యస్థానం చేరవలెనంటే ఎన్ని పుస్తకాలను అమ్మాలి?

వస్తువు ఉత్పాదకతకు అయిన ఖర్చు, వాటి అమ్మకాల ద్వారా వచ్చిన రాబడి సమానంగా వుండే స్థానాన్ని సమతుల్యతా స్థానము అంటారు.

సాధన : ప్రచురణ కర్త సమతుల్యతా స్థానం చేరాలంటే ఖర్చులు రాబడి సమానం కావాలి.

ముద్రణ అయి అమ్మకమయిన పుస్తకాల సంఖ్య x

సమతుల్యతా స్థానము y అనుకొనుము.

అపుడు ఆ ప్రచురణ కర్తకు పుస్తకముద్రణ ఖర్చు, రాబడిల సమీకరణాలు

ముద్రణ సమీకరణం $y = 320000 + 31.25x$ ...(1)

రాబడి సమీకరణం $y = 43.75x$ ... (2)

రెండవ సమీకరణము నుండి y విలువను ఒకటవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$43.75x = 3,20,000 + 31.25x$

$12.5x = 3,20,000$

$$x = \frac{3,20,000}{12.5} = 25,600$$

25,600 పుస్తకాలను ముద్రించి అమ్మిన అతడు సమతుల్యతా స్థానము చేరును.

అభ్యాసం - 4.2

క్రింది సమస్యలలో ప్రతీ సందర్భంలో రేఖీయ సమీకరణాల జతను వ్రాసి దానికి సాధన కనుగొనండి.

1. ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాల నిష్పత్తి 9 : 7 మరియు వాటి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4 : 3 వారు ప్రతీ ఒక్కరూ నెలకు ₹2000 సొమ్ము ఆదాచేసిన, వారి నెలవారీ ఆదాయాలను కనుగొనండి.

2. ఒక రెండంకెల సంఖ్య మరియు దాని లోని స్థానాలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్యల మొత్తము 66. ఆ సంఖ్య లోని రెండు అంకెల భేదము 2 అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము. అటువంటి సంఖ్యలు ఎన్ని వుంటాయి ?

3. రెండు సంపూరక కోణాలలో పెద్ద కోణము, చిన్న కోణము కన్నా 18° ఎక్కువ. అయిన ఆకోణాలను కనుగొనండి.

4. హైదరాబాద్‌లో టాక్సీ ఛార్జీలు రెండు అంశాలుగా వుంటాయి. మొదటిది స్థిర ఛార్జీ కాగా రెండవది దూరాన్ని బట్టి నిర్ణయించే ఛార్జీ. 10 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసినపుడు అయిన మొత్తము ఛార్జి ₹220. అలాగే 15 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసినపుడు అయిన మొత్తము ఛార్జి ₹310. అయిన

   i. స్థిర ఛార్జీ విలువ మరియు ఒక కిలోమీటరుకు అయ్యే ఛార్జీల విలువ ఎంత ?

   ii. ఒక వ్యక్తి 25 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించిన అతను ఛార్జీల నిమిత్తం చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?

5. ఒక భిన్నంలో లవ, హారాలకు 1 కలిపిన అది $\frac{4}{5}$ అవుతుంది. అలాగే లవ, హారాల నుండి 5 తీసివేసిన ఆ భిన్నము $\frac{1}{2}$ అవుతుంది. అయిన ఆ భిన్నాన్ని కనుగొనండి.

6. ఒక రహదారిపై A, B అనే ప్రదేశాలు 100 కి.మీ. దూరంలో వున్నాయి. A నుండి ఒక కారు, B నుండి ఒక కారు ఒకే సమయంలో వేరు వేరు వేగాలతో ప్రయాణిస్తున్నాయి. ఆ రెండు కార్లు ఒకే దిశలో ప్రయాణం చేసిన అవి 5 గంటల తరువాత కలుస్తాయి. అలాకాక అవి ఒక దానివైపు ఒకటి ప్రయాణం చేసిన 1 గంట తరువాత కలుస్తాయి. అయిన ఆ రెండు కార్ల వేగాలను కనుగొనండి.

7. రెండు కోణాలు పూరక కోణాలు. పెద్ద కోణము కొలత, చిన్న కోణము రెట్టింపు కన్నా 3° తక్కువ అయిన ఆ రెండు కోణాలను కనుగొనండి.

8. ఒక బీజగణిత పాఠ్యపుస్తకంలో మొత్తము 1382 పేజీలు వున్నాయి. దీనిని రెండు భాగాలు చేసిన రెండవ భాగములో, మొదటి భాగము కన్నా 64 పేజీలు ఎక్కువ వున్నాయి. అయిన ప్రతీ భాగములోని పేజీల సంఖ్యను కనుగొనండి.

9. ఒక రసాయనాలు అమ్మే దుకాణదారుని వద్ద రెండు రకాల హైడ్రోక్లోరిక్ ఆమ్ల ద్రావణాలున్నాయి. ఒకటి 50% ద్రావణము మరియు రెండవది 80% ద్రావణము. 100మి.లీ. 68% ద్రావణం కావాలన్న ఆ రెండు ద్రావణాలను ఎంత పరిమాణంలో తీసుకోవాలి ?

10. నీ వద్ద దాచుకొనుటకు ₹12000 సొమ్ము కలదనుకొనుము. దానిలో కొంత మొత్తాన్ని 10% వడ్డీరేటుకు మిగిలినది 15% వడ్డీ రేటు వచ్చునట్లు పొదుపు చేయాలి. అయితే మొత్తము మీద పొదుపు 12% వడ్డీ రేటు రావాలంటే ఏ వడ్డీ రేటున ఎంత సొమ్ము దాచుకోవాలి ?

4.4 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చగలిగే సమీకరణాలు

కొన్ని సమీకరణాల జతలు రేఖీయ సమీకరణాలుకావు. కాని సరియైన ప్రతిక్షేపణల ద్వారా వాటిని రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చవచ్చును. అటువంటి సమీకరణాల సాధనను చర్చిద్దాము. ఒక ఉదాహరణ చూడండి.

ఉదాహరణ-12. క్రింది సమీకరణాల జతను సాధించండి. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాల జతను పరిశీలించండి. అవి రేఖీయ సమీకరణాలు కావు. (ఎందుకు?)

మనకు ఇచ్చిన సమీకరణాలు $2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13$ (1)

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad (2)$$

మనం $\frac{1}{x} = p$ మరియు $\frac{1}{y} = q$ ప్రతిక్షేపించగా, క్రింది రేఖీయ సమీకరణాల జత ఏర్పడుతుంది.

$2p + 3q = 13$ (3)

$5p - 4q = -2$ (4)

q గుణకాలు 3, 4 మరియు వాటి క.సా.గు. 12. చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా

సమీకరణం (3) × 4 $8p + 12q = 52$

సమీకరణం (4) × 3 $15p - 12q = -6$ 'q' పదములకు వేరువేరు గుర్తులున్నాయి. కావున ఆ సమీకరణాలను కలుపగా

$23p = 46$

$$p = \frac{46}{23} = 2$$

p విలువను సమీకరణం (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$2(2) + 3q = 13$

$3q = 13 - 4 = 9$

$$q = \frac{9}{3} = 3$$

కాని, $\frac{1}{x} = p = 2$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{y} = q = 3$ $\Rightarrow y = \frac{1}{3}$

ఉదాహరణ-13. కవిత తన ఇంటిలో మరి రెండు గదులను నిర్మించాలనుకొంది. ఆమె గృహనిర్మాణ కూలీల గురించి ఆరా తీయగా 6 గురు పురుషులు మరియు 8 మంది స్త్రీలు కలిసి ఆ పనిని 14రోజులలో పూర్తి చేయగలరని తెలిసింది. కాని అమెకు తన ఇంటిలోని గదుల నిర్మాణ పని 10 రోజులలోనే పూర్తికావాలి. 8మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు కలిసి ఆ పనిని 10 రోజులలో పూర్తి చేయగలరని తెలుసుకొంది. పురుషుడు లేదా స్త్రీ ఒక్కరే ఆ పనిని పూర్తి చేయాలంటే ఎంత కాలం పడుతుందో? కనుక్కోండి.

సాధన : పురుషుడు ఒక్కడే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు కాలం $= x$ రోజులు అనుకొనుము.

పురుషుడు ఒక్కడే ఒకరోజులో చేయగలిగిన పని $= \frac{1}{x}$ అవుతుంది.

స్త్రీ ఒక్కరే ఆపనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు కాలం $= y$ రోజులు అనుకొనిన

స్త్రీ ఒక్కరే ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $= \frac{1}{y}$ అవుతుంది.

8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు ఆపనిని 10 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

అనగా 8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు ఒకరోజులో

చేయగలిగిన పని $= \frac{1}{10}$ (1)

8 మంది పురుషులు ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $8 \times \frac{1}{x}$. $= \frac{8}{x}$

అదేవిధంగా 12 మంది స్త్రీలు ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు ఒక రోజులో చేయ

గలిగిన మొత్తము పని $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ (2)

(1), (2) సమీకరణాల నుండి $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \quad (3)$$

అలాగే, 6 గురు పురుషులు మరియు 8 మంది స్త్రీలు ఆ పనిని 14 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

6 గురు పురుషులు మరియు 8 మంది స్త్రీలు ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \quad 14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \quad (4)$$

(3), (4) సమీకరణాలను పరిశీలించండి. అవి రేఖీయ సమీకరణాలేనా ? వాటి సాధన మనం ఎలా కనుగొంటాము?

$\frac{1}{x} = u$ మరియు $\frac{1}{y} = v$ ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా వాటిని మనం రేఖీయ సమీకరణాలుగా మార్చవచ్చును.

(3) వ సమీకరణాన్ని రేఖీయ సమీకరణం మార్చగా $80u + 120v = 1$ (5)

(4) వ సమీకరణాన్ని రేఖీయ సమీకరణం మార్చగా $84u + 112v = 1$ (6)

80 మరియు 84 ల క.సా.గు. 1680. చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి ద్వారా

సమీకరణం (3) × 21 $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

సమీకరణం (4) × 20 $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$1680u + 2520v = 21$$
$$1680u + 2240v = 20$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$

uకు ఒకే గుర్తు కావున తీసివేయగా

$$280v = 1$$

$$v = \frac{1}{280}$$

సమీకరణం (5) లో ప్రతిక్షేపించగా $80u + \left(120 \times \frac{1}{280}\right) = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{4}{7} \times \frac{1}{80} = \frac{1}{140}$$

కావున పురుషుడొక్కడే ఆ పనిని 140 రోజులలో, స్త్రీ ఒక్కరే ఆ పనిని 280 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

ఉదాహరణ-14. ఒక వ్యక్తి 370 కి.మీ. దూరాన్ని కొంత దూరం రైలులో, కొంతదూరం కారులో ప్రయాణించాడు. అతను 250కి.మీ దూరాన్ని రైలులో, మిగిలిన దూరాన్ని కారులో ప్రయాణించగా అతనికి 4 గంటలు పట్టినది. అదే అతను 130 కి.మీ దూరం రైలులో, మిగిలిన దూరం కారులో ప్రయాణిస్తే అతనికి 18 నిమిషాల కాలం ఎక్కువ పట్టేది. రైలు మరియు కారుల వేగాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : రైలు వేగం x కి.మీ/గం. , కారు వేగం y కి.మీ/గం. అనుకొనుము.

$$\boxed{\text{కాలము} = \frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}}$$ అని మనకు తెలుసును.

1వ సందర్భంలో, రైలు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం $= \frac{250}{x}$ గం.

కారు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం $= \frac{120}{y}$ గం.

మొత్తం కాలం = రైలు ప్రయాణానికి పట్టినకాలం + కారు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = $\frac{250}{x}+\frac{120}{y}$

కాని మొత్తం ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం 4 గంటలు కావున

$$\frac{250}{x}+\frac{120}{y}=4$$

$$\frac{125}{x}+\frac{60}{y}=2 \quad \rightarrow (1)$$

మరల 130 కి.మీ దూరం రైలులో మిగిలిన దూరం కారులో ప్రయాణించినపుడు

130 కి.మీ రైలు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = $\frac{130}{x}$ గం.

240 కి.మీ (370 – 130) కారు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = $\frac{240}{y}$ గం.

మొత్తం కాలం = $\frac{130}{x}+\frac{240}{y}$

కాని ప్రయాణానికి పట్టిన మొత్తం కాలం 4 గంటల 18 నిమిషాలు $4\frac{18}{60}=4\frac{3}{10}$ గం॥

అనగా, $$\frac{130}{x}+\frac{240}{y}=\frac{43}{10} \quad (2)$$

(1) (2) సమీకరణాలలో $\frac{1}{x}=a$ మరియు $\frac{1}{y}=b$ ప్రతిక్షేపించగా

$$125a + 60b = 2 \quad (3)$$

$$130a + 240b = 43/10 \quad (4)$$

60, 240 ల క.సా.గు. 240. చరరాశిని తొలగించే పద్ధతిని ఉపయోగించగా

సమీకరణము (3) × 4 $\quad 500a+240b=8$

సమీకరణము (4) × 1 $\quad 130a+240b=\frac{43}{10}$ (ఒకే గుర్తు కావున తీసివేయగా)

(-) (-) (-)

$$370a = 8-\frac{43}{10}=\frac{80-43}{10}=\frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\underset{10}{\cancel{370}}} = \frac{1}{100}$$

$a = \dfrac{1}{100}$ ను సమీకరణం (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(\overset{5}{\cancel{125}} \times \frac{1}{\underset{4}{\cancel{100}}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{60}}} = \frac{1}{80}$$

కావున $a = \dfrac{1}{100}$ మరియు $b = \dfrac{1}{80}$

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{100}$ మరియు $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{80}$

$x = 100$ కి.మీ/గం. మరియు $y = 80$ కి.మీ/గం.

కావున రైలు వేగం 100 కి.మీ/గం. మరియు కారు వేగం 80 కి.మీ/గం.

అభ్యాసం - 4.3

క్రింది సమీకరణాల జతలను, రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చడం ద్వారా వాటికి సాధన కనుగొనండి.

i) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 2$

$\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{y-2} = 1$

ii) $\dfrac{x+y}{xy} = 2$

$\dfrac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

v) $\dfrac{5}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -1$

vi) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 13$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ $x \neq 0, y \neq 0$ అయిన $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ $x \neq 0, y \neq 0$ అయిన

vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. క్రింది సమస్యలకు సమీకరణాల జతలను వ్రాసి వాటికి సాధన కనుగొనండి.

i. ఒక పడవ నీటిలో ప్రవాహమునకు అభిముఖముగా 30 కి.మీ దూరమును మరియు ప్రవాహపువాలులో 44 కి.మీ. దూరము ప్రయాణించుటకు 10 గంటలు పట్టును. అదే పడవకు 40 కి.మీ అభిముఖముగా, 55 కి.మీ. ప్రవాహపు వాలులో ప్రయాణించుటకు 13 గంటలు కాలము పట్టును అయిన ప్రవాహవేగమును, నిలకడ నీటిలో పడవ వేగమును కనుగొనుము.

ii. రహీమ్ తన యింటికి పోవుటకు 600 కి.మీ దూరములో, కొంత దూరము రైలులో మరియు కొంతదూరము కారులో ప్రయాణించును. 120 కి.మీ. దూరము రైలులో మిగిలిన దూరము కారులో ప్రయాణమునకు అతనికి 8 గంటలు పట్టును. అదే 200కి.మీ. దూరము రైలులో మిగిలిన దూరము కారులో ప్రయాణము చేసిన అతనికి 20 నిమిషాల కాలము ఎక్కువ పట్టును. అయిన కారు మరియు రైలుల వేగములను కనుగొనండి.

iii. ఇద్దరు స్త్రీలు మరియు 5 గురు పురుషులు ఒక కుట్టుపనిని 4 రోజులలో చేయగా ముగ్గురు స్త్రీలు మరియు 6గురు పురుషులు దానిని 3రోజులలో చేసెదరు. స్త్రీ ఒక్కరే లేదా పురుషుడు ఒక్కడే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలమును కనుగొనుము.

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[పరీక్షలకు నిర్దేశింపబడినది కాదు]

1. క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి:-

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$

(ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

(iv) $\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b$

$ax - by = 2ab$

(vi) $2^x + 3^y = 17$

$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. ఒక ప్రయోగంలో జంతువులకు నిర్దేశించిన ఆహారాన్ని యివ్వాలి. ప్రతీ జంతువుకు మిగిలిన వాటితోపాటు 20గ్రాముల ప్రోటీన్లు, 6గ్రాముల క్రొవ్వు యివ్వాలి. ఆ ప్రయోగశాల పరిశీలకులు A, B అనే రెండు రకాల ఆహార మిశ్రమాలను కొన్నారు. మిశ్రమం A లో 10% ప్రోటీన్లు మరియు 6% క్రొవ్వువున్నాయి. మిశ్రమం B లో 20% ప్రోటీన్లు, 2% క్రొవ్వు వున్నాయి. అయిన వారు ప్రతీ మిశ్రమానికి ఎన్ని గ్రాములు ఉపయోగించాలి?

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒకే రకమైన రెండు చరరాశులు గల రెండు రేఖీయ సమీకరణాలను రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత అంటారు.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

దీనిలో $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

2. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలను సాధించడానికి అనేక పద్ధతులున్నాయి.

3. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల రేఖా చిత్రము (గ్రాఫ్) రెండు సరళరేఖలచే సూచింపబడుతుంది.

   i. రెండు సరళరేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటే వాటికి ఒకే సాధన వుంటుంది. అప్పుడు ఆ సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలు.

   ii. రెండు రేఖలు ఏకీభవిస్తే వాటికి అనంతమైన సాధనలుంటాయి. ఆ రేఖపై వుండే ప్రతీ బిందువు సాధన అవుతుంది. అపుడు ఆ సమీకరణాలు పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు.

   iii. రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలైన, ఆ సమీకరణాలజతకు సాధనలేదు. అపుడు ఆ సమీకరణాల జత అసంగత సమీకరణాలు.

4. రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి మనం క్రింది పద్ధతులను చర్చించాం.

   i. మోడల్ పద్ధతి

   ii. రేఖాచిత్రం (గ్రాఫ్) పద్ధతి

   iii. బీజగణిత పద్ధతులు – ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి మరియు చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి.

5. సమీకరణాలలోని చరరాశుల గుణకాలకు, సమీకరణాల స్వభావానికి మధ్య సంబంధము వుంటుంది.

   i. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగత సమీకరణాలు

   ii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత అసంగత సమీకరణాలు

   iii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగత సమీకరణాలు మరియు పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు

6. నిత్యజీవితంలో అనేక సందర్భాలను గణిత గుర్తులతో రెండు సమీకరణాలుగా రాసినపుడు అవి ప్రారంభంలో రేఖీయ సమీకరణాలుగా వుండవు. కాని వాటిని సరియైన ప్రతిక్షేపణ చేయడం ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చవచ్చును.

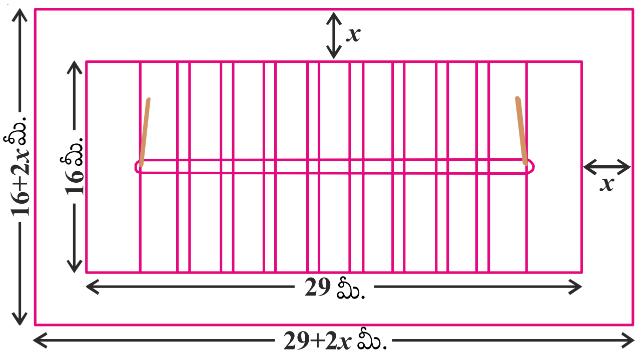
అధ్యాయము

5 వర్గ సమీకరణాలు

(Quadratic Equations)

5.1 పరిచయం

కస్బా పురపాలక పాఠశాల క్రీడల కమిటీ పాఠశాల ఆవరణలో 29 మీ. × 16 మీ. కొలతలతో ఒక ఖో-ఖో కోర్టును నిర్మించాలని భావించింది. ఇందుకుగాను వారికి 558 చ.మీ. వైశాల్యంగల ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలం అందుబాటులో వుంది. అందువల్ల వారు ఖో-ఖో కోర్టు చుట్టూ ప్రేక్షకుల కొరకు కొంత ఖాళీ స్థలమును కూడా వదలాలని భావించారు. అయితే ఇలా వదిలే ఖాళీ స్థలం యొక్క వెడల్పు కోర్టు చుట్టూ ఒకే విధంగా వుండేటట్లు వదిలితే దాని వెడల్పు ఎంత వుండాలి.



ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పు x మీ, అనుకొనిన పటం నుంచి దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క పొడవు = $(29 + 2x)$ మీ.

మరియు వెడల్పు $= (16 + 2x)$ మీ.

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము = పొడవు × వెడల్పు

$= (29 + 2x)(16 + 2x)$

అయితే ఈ స్థలము యొక్క వైశాల్యము = 558 మీ. అని ఇవ్వబడినది

$\therefore \quad (29 + 2x)(16 + 2x) = 558$

$\therefore \quad 4x^2 + 90x + 464 = 558$

$4x^2 + 90x - 94 = 0$

$2x^2 + 45x - 47 = 0$ (ఇరువైపులా 2తో భాగించగా)

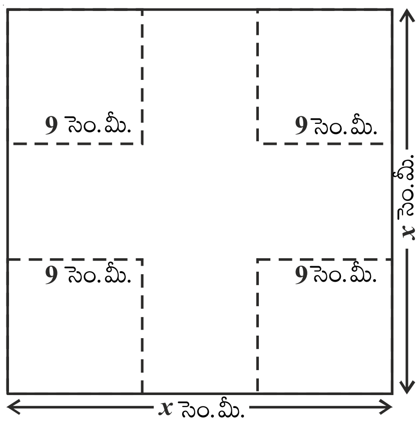
$2x^2 + 45x - 47 = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$

మనం క్రింది తరగతులలో $ax + b = c$ రూపంలో వున్న రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించి x విలువను కనుగొన్నాం. అదేవిధంగా పై సమీకరణం (1)ని సాధించి x విలువను కనుగొనగలిగితే అది ప్రేక్షకుల కొరకు కేటాయించిన ఖాళీ స్థలం యొక్క వెడల్పును ఇస్తుంది.

మీరు ఇలాంటి సమీకరణాలు వచ్చే మరికొన్ని ఉదాహరణలను ఊహించగలరా?

మరియొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

రాణి వద్ద ఒక చతురస్రాకారపు లోహపు రేకు గలదు. పటంలో చూపిన విధంగా దీని నాలుగు మూలల నుంచి 9 సెం.మీ. భుజంగల చతురస్రాలను తొలగించి మిగిలిన భాగంతో ఒక మూతలేని పెట్టెను తయారుచేసింది. ఇలా తయారైన పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము 144 ఘ.సెం.మీ. అయిన మొదట తీసుకున్న లోహపు రేకు యొక్క భుజం పొడవును కనుగొనగలమా ?



చతురస్రాకారపు లోహపు రేకు భుజం పొడవు x సెం.మీ. అనుకొనిన తయారుచేయబడిన పెట్టె యొక్క కొలతలు

$$9 \text{ సెం.మీ.} \times (x\text{-}18) \text{ సెం.మీ.} \times (x\text{-}18) \text{ సెం.మీ.}$$

పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము 144 సెం.మీ

కనుక $9\,(x-18)\,(x-18) = 144$

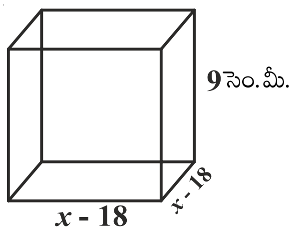
$$(x-18)^2 = 16$$

$$x^2 - 36x + 308 = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

అనగా పై సమీకరణమును తృప్తిపరచే 'x' విలువే మొదట తీసుకున్న లోహపు రేకు యొక్క భుజం అవుతుంది.

సమీకరణం (1) మరియు (2) లలోని LHS లను పరిశీలించండి?

అవి వర్గ బహుపదులేనా ?



$ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$ రూపంలో వున్న ఇలాంటి వర్గ బహుపదులను గురించి మనము ఇంతకు ముందు అధ్యాయంలో చర్చించి యున్నాం.

(1) మరియు (2) సమీకరణాలలోని LHSలు వర్గ బహుపదులు కనుక ఈ సమీకరణాలను వర్గ సమీకరణాలు అంటాం.

ఈ అధ్యాయంలో వర్గ సమీకరణాలను గురించి వానికి సాధనలను కనుగొనే వివిధ పద్ధతులను గురించి చర్చిస్తాం.

5.2 వర్గ సమీకరణములు (QUADRATIC EQUATIONS)

a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a \neq 0$ అయిన $ax^2 + bx + c = 0$ ను 'x' లో వర్గ సమీకరణము అంటాము. ఉదాహరణకి $2x^2 + x - 300 = 0$ ఒక వర్గ సమీకరణము. అదే విధంగా $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ మరియు $1 - x^2 + 300 = 0$ లు కూడా వర్గ సమీకరణాలే.

వాస్తవానికి $p(x)$ ఒక ద్విపరిమాణ బహుపది అవుతూ $p(x) = 0$ రూపంలో వున్న వానినన్నింటిని వర్గ సమీకరణాలు అంటాం. అయితే $p(x)$ లోని పదాలను వాని పరిమాణాల ఆధారంగా అవరోహణ క్రమంలో రాస్తే దానిని వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం. అనగా $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ ను వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం మరియు $y = ax^2 + bx + c$ ను వర్గ ప్రమేయము అంటాము.

ప్రయత్నించండి

క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలో కాదో తెలపండి.

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

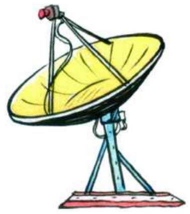
(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$

(v) $(2x + 1)\,(3x + 1) = b(x - 1)\,(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

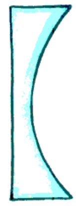
వర్గ సమీకరణాల/ప్రమేయాలు ఉపయోగాలు చాలా కలవు. వానిలో కొన్ని :

1. ప్రయోగించబడిన రాకెట్ యొక్క మార్గము, ఎత్తులు ఒక వర్గ సమీకరణం/ప్రమేయంచే నిర్వచించబడుతాయి.

2. ఉపగ్రహాల నుంచి సిగ్నల్స్‌ను స్వీకరించే డిష్ గొడుగుల ఆకారాలు, టెలిస్కోప్‌లలో వాడే పరావర్తన అద్దాల ఆకారాలు, కళ్ళజోడులో కటకాల ఆకారాలు, ఖగోళ వస్తువుల కక్ష్యా మార్గాలు వర్గ సమీకరణాలచే నిర్వచించబడుతాయి.

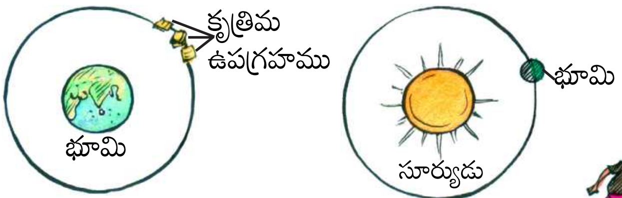


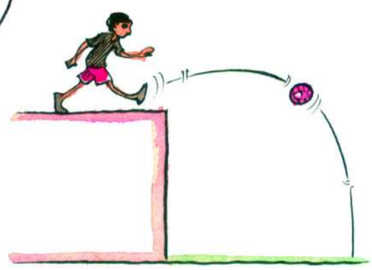
డిష్ గొడుగు



పరావర్తన అద్దము

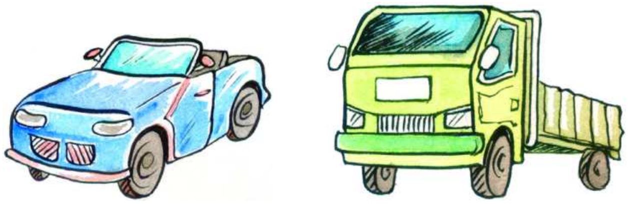
కళ్లజోడులోని కటకాలు





3. ఒక ప్రక్షేపకము యొక్క మార్గము ఒక వర్గ సమీకరణంచే సూచించబడుతుంది.

4. ఒక వాహనమునకు బ్రేకులు వేసినపుడు అది ఆగే దూరమును గణించుటలో వర్గ సమీకరణం ఉపయోగపడుతుంది.



ఉదాహరణ-1. క్రింది వానికి సరియగు సమీకరణాలను రాయుము/కనుగొనుము.

i. రాజు మరియు రాజేందర్ ఇద్దరి వద్ద కలసి 45 గోళీలు కలవు. అయితే ఇద్దరూ చెరి 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్నారు. ఇద్దరి వద్ద మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల యొక్క లబ్ధము 124 అయిన ఇద్దరి వద్ద మొదట వున్న గోళీల సంఖ్యను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును కనుగొనుము/రాయుము.

ii. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణము 25 సెం.మీ. మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల బేధము 5 సెం.మీ. అని ఇవ్వబడింది. అయిన మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును రాయుము?

సాధన : i. రాజు వద్ద గల గోళీల సంఖ్య 'x' అనుకొనిన

రాజేందర్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య $= 45 - x$ (ఎందుకు?).
5 గోళీలను పోగొట్టుకున్న తరువాత రాజు వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య $= x - 5$
అదేవిధంగా రాజేందర్ వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య $= (45 - x) - 5$
$= 40 - x$

$\therefore$ మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల లబ్ధం $= (x - 5)(40 - x)$
$= 40x - x^2 - 200 + 5x$
$= - x^2 + 45x - 200$

అనగా $- x^2 + 45x - 200 = 124$ (దత్తాంశము)
$\therefore \quad - x^2 + 45x - 324 = 0$
$\therefore \quad x^2 - 45x + 324 = 0$ (ఇరువైపులా '–' చే గుణించగా)

అనగా $x^2 - 45x + 324 = 0$ సమీకరణమునకు తృప్తి పరచే 'x' విలువయే రాజు వద్ద మొదట వున్న గోళీల సంఖ్యను ఇస్తుంది.
$\therefore$ $x^2 - 45x + 324 = 0$ కావలసిన గణిత సమీకరణం అవుతుంది.

ii. చిన్న భుజము యొక్క పొడవును x సెం.మీ. అనుకొనిన

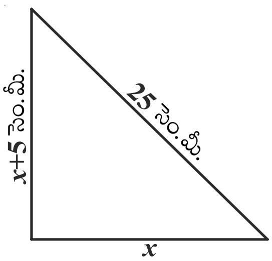
పెద్ద భుజం పొడవు $= (x + 5)$ సెం.మీ.

ఇవ్వబడిన కర్ణము యొక్క పొడవు = 25 సెం.మీ.

లంబకోణ త్రిభుజములో

(భుజము)^2 + (భుజము)^2 = (కర్ణము)^2

అని మనకు తెలుసు.



కనుక $x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

$2x^2 + 10x - 600 = 0$

$x^2 + 5x - 300 = 0$

పై సమీకరణంను సాధించుట ద్వారా పొందే x విలువ ఆధారంగా లంబకోణ త్రిభుజంలోని మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను గణించవచ్చు.

ఉదాహరణ-2. క్రిందివి వర్గసమీకరణాలేమో పరిశీలించండి.

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

సాధన : i. LHS $= (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

అనగా $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ని

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ గా రాయచ్చు.

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$

రూపంలో వుంది కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

ii. ఇచ్చట LHS $= x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$

మరియు RHS $= (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

$\therefore\ x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$

$\therefore\ x + 12 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో లేదు కనుక ఇది వర్గ సమీకరణం కాదు.

iii. ఇచ్చట LHS $= x\,(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

అనగా $x\,(2x + 3) = x^2 + 1$ ను

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ అని రాయవచ్చు.

అనగా $x^2 + 3x - 1 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది

కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

iv. ఇచ్చట, LHS $= (x + 2)^3$

$= (x + 2)^2\,(x + 2)$

$= (x^2 + 4x + 4)\,(x + 2)$

$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

కనుక, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ను

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ గా రాయవచ్చు.

$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 12 = 0$ లేదా $x^2 + 2x + 2 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

సూచన: పై ఉదాహరణ (ii)లో ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం లాగా కనపడుతుంది. కానీ ఇది వర్గ సమీకరణం కాదు. అదే విధంగా ఉదాహరణ (iv)లో ఇచ్చిన సమీకరణం ఘన సమీకరణం లాగా కనపడుతుంది కానీ ఇది వర్గ సమీకరణమే.

పై ఉదాహరణల నుంచి ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం అవును కాదో నిర్ణయించుటకు ముందు దానిని సూక్ష్మీకరించటము మంచిదని మనం గుర్తించగలం.

అభ్యాసము - 5.1

1. క్రింది సమీకణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవునో, కాదో నిర్ణయించండి.

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. క్రింది వానికి సరియగు వర్గ సమీకరణాలను కనుగొనుము ?

i. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము 528 చ.మీ. దీని పొడవు, వెడల్పుయొక్క రెట్టింపు కంటే ఒక మీటరు ఎక్కువ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుటకు అవసరమైన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము?

ii. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము 306. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము/రాయుము?

iii. రోహన్ తల్లి, రోహన్ కంటే 26 సం॥లు పెద్దది. 3 సం॥లు తరువాత వారిద్దరి వయస్సుల లబ్ధం 360. అయిన రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గసమీకరణమును రాయుము?

iv. 480 కి.మీ. దూరమును ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణిస్తుంది. ఒకవేళ ఇదే రైలు ఇప్పటి వేగం కంటే 8 కి.మీ తక్కువ వేగముతో ప్రయాణిస్తే గమ్యం చేరుటకు పట్టే కాలం 3 గం॥లు పెరుగుతుంది. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుటకు కావలసిన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము?

5.3 కారణాంక పద్ధతిన వర్గ సమీకరణమును సాధించుట

నిజజీవితంలో జరిగే ఎదురయ్యే కొన్ని సంఘటనలను / సమస్యలను గణితపరంగా తెలియని చరరాశి 'x' ను ఉపయోగించి వర్గ సమీకరణాల రూపంలో ఎలా తెలియజేయవచ్చో మన నేర్చుకున్నాం. ఇపుడు x విలువను ఏవిధంగా కనుగొంటామో పరిశీలిద్దాం. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణమును తీసుకుందాం. దీనిలో x బదులు '1' ప్రతిక్షేపించిన $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 = \text{RHS}$. $x = 1$ కి సమీకరణం సంతృప్తి చెందినది కనుక $x = 1$ ను $2x^2 - 3x + 1 = 0$ కు మూలము లేదా సాధన అంటాం.

ఈ సమయంలో $x = 1$ అనునది $2x^2 - 3x + 1$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కూడా అవుతుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

సాధారణంగా $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన α ను వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలము అంటాం. మరియు $x = \alpha$ వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధన అని కూడా అంటాం. లేదా 'α' వర్గ సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తుంది అంటాం.

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువలు, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు ఒక్కటే అని గుర్తించగలరు.

3వ అధ్యాయంలో ఒక వర్గ బహుపదికి రెండు శూన్య విలువలుంటాయిని మనం గనించాం కనుక వర్గ సమీకరణమునకు కూడా రెండు మూలాలే వుంటాయి (ఎందుకు?)

మనం 9వ తరగతిలో మధ్య పదమును రెండింటిగా విడగొట్టుట ద్వారా ఒక వర్గ బహుపది యొక్క కారణాంకాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో నేర్చుకున్నాము. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో చూద్దాం.

ఉదాహరణ-3. కారణాంక పద్ధతిన $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటగా మధ్యపదమును రెండింటిగా విడగొట్టుదాం. ax^2+bx+c ఒక వర్గ బహుపది అయితే మధ్య పదమును విడగొట్టుటకు $p + q = b$ మరియు $p \times q = a \times c$ అయ్యే విధంగా p, q అనే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అంటే $2x^2 - 5x + 3$ లో మధ్యపదమును విడగొట్టుటకు $p + q = b = -5$ మరియు $p \times q = a \times c = 2 \times 3 = 6$ అయ్యే విధంగా p, q అనే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనాలి.. దీనికొరకు 6 యొక్క కారణాంకాల జతల జాబితాను తయారుచేద్దాం. అవి $(1, 6), (-1, -6); (2, 3); (-2, -3)$. ఈ జాబితాలో $(-2, -3)$; అనే జత $p + q = -5$ మరియు $p \times q = 6$ లను తృప్తి పరుస్తుందని గుర్తించగలం. కనుక మధ్యపదము '$-5x$' ను '$-2x - 3x$' గా రాయవచ్చు.

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x\,(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

అనగా $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ను $(2x - 3)(x - 1) = 0$ గా రాయవచ్చు.

అనగా $2x - 3 = 0$ లేదా $x - 1 = 0$.

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ మరియు $x = 1$ లు ఇచ్చిన వర్గసమీకరణం యొక్క సాధనలు

లేదా 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలు.

ప్రయత్నించండి.

1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలవుతాయేమో సరిచూడండి.

ఇచ్చుట $2x^2 - 5x + 3$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్దంగా రాసి ప్రతీ రేఖీయ కారణాంకాన్ని సున్నాకు సమానం చేయటం ద్వారా $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొన్నామని గమనించండి.

ఉదాహరణ-4 : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలను కనుగొనుము ?

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

అనగా $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ అయ్యే విధంగా వున్న x విలువలే $6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలవుతాయి.

$\therefore\ 3x - 2 = 0$ లేదా $2x + 1 = 0$,

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ లేదా $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ 6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{2}$.

$6x^2 - x - 2 = 0$ లో $x = \frac{2}{3}$ మరియు $x = -\frac{1}{2}$ లను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించుట ద్వారా అవి సమీకరణమునకు మూలాలు అవుతాయో లేవో సరిచూడగలము.

ఉదాహరణ-5. శీర్షిక 5.1 లో చర్చించిన సమస్యలోని ప్రేక్షకుల కొరకు వదిలిన ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పును కనుగొనుము ?

సాధన : 5.1 శీర్షికలో చర్చించిన సమస్యలోని ప్రేక్షకుల కొరకు వదిలిన ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పు x మీ అనుకొనిన అది $2x^2 + 45x - 47 = 0$ ను తృప్తి పరిచే ఒక విలువ. కారణాంక పద్ధతిని ఈ సమీకరణంనకు అనువర్తింపచేసిన

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x\,(x - 1) + 47\,(x - 1) = 0$$

i.e., $(x - 1)\ (2x + 47) = 0$

అనగా $x = 1$ మరియు $x = \frac{-47}{2}$ లు $2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$ యొక్క మూలాలు. అయితే x అనేది ప్రేక్షకుల కొరకు వదిలిన ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పు కనుక దీని విలువ ఋణాత్మకం కాజాలదు

$\therefore$ ఖాళీ స్థలం యొక్క వెడల్పు $= x = 1$ మీ.

అభ్యాసము- 5.2

1. కారణాంక పద్ధతిన క్రింది వర్గ సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము ?

i. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii. $2x^2 + x - 6 = 0$ iii. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

iv. $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ v. $100x^2 - 20x + 1 = 0$ vi. $x(x + 4) = 12$

vii. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ viii. $x - \frac{3}{x} = 2$ ix. $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

2. మొత్తము 27, లబ్ధము 182 అయ్యే విధంగా రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.

3. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము 613 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు దాని భూమి కంటే 7 సెం.మీ. తక్కువ. కర్ణము పొడవు 13 సెం.మీ అయిన మిగిలిన రెండు భుజాలను కనుగొనుము.

5. ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ప్రతిరోజు ఒక నియమిత సంఖ్యలో వస్తువులను తయారు చేస్తారు. ఒక రోజు; తయారైన ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు (రూపాయిలలో) ఆరోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్యకు రెట్టింపు కంటే 3 ఎక్కువ. ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల ఖరీదు ₹ 90 అయిన ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల సంఖ్య మరియు ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదును కనుగొనుము?

6. ఒక దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత 28 మీ మరియు దాని వైశాల్యం 40 చ.మీ. అయిన దీర్ఘచతురస్రము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము?

7. ఒక త్రిభుజము యొక్క భూమి, దాని ఎత్తు కంటే 4 సెం.మీ.ఎక్కువ. ఈ త్రిభుజ వైశాల్యము 48 చ.సెం.మీ. అయిన దాని భూమిని, ఎత్తును కనుగొనుము?

8. రెండు రైళ్లు ఒక స్టేషన్ నుంచి ఒకే సమయంలో ఒకటి పడమరకు మరిఒకటి ఉత్తరం వైపుకు బయలుదేరును. మొదటి రైలు, రెండవ రైలు కంటే 5 కి.మీ./గంట ఎక్కువ వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. అవి బయలుదేరిన రెండు గంటల తరువాత ఒకదానికొకటి 50 కి.మీ. దూరంలో వున్న ఒక్కొక్క రైలు సగటు వేగం ఎంత?

9. 60 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో ప్రతి అబ్బాయి, అమ్మాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును, ప్రతి అమ్మాయి, అబ్బాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును చందాగా ఇచ్చారు. మొత్తం వసూలైన సొమ్ము ₹ 1600 అయిన తరగతిలో ఎంత మంది అబ్బాయిలు గలరు ?

10. గంటకు 3 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణిస్తున్న ఒక నదిలో ఒక మోటారు బోటు 24కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించి తిరిగి బయలుదేరిన స్థానానికి రావడానికి పట్టిన కాలం 6 గంటలైన బోటు స్థిరవేగంలో ప్రయాణించినదని భావించి దాని వేగమును కనుగొనుము?

5.4 వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించుట

ఇంతకుముందు మనము ఒక వర్గ సమీకరణమును కారణాంక పద్ధతిన ఎలా సాధించవచ్చో తెలుసుకున్నాము. అయితే ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి అన్ని సమీకరణాలను సాధించగలమా ? $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను కారణాంక పద్ధతిని సాధించుటకు ప్రయత్నిద్దాం. ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను కారణాంక పద్ధతిన సాధించవలెనన్న మొదట మనము

$p + q = 4$; $p \times q = -4$ అయ్యే విధంగా p, q విలువలను కనగొనవలెను. అయితే ఇది సాధ్యం కాదు. కనుక $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను కారణాంక పద్ధతిని సాధించలేము. అందువల్ల మనము ఇంకొక వేరే పద్ధతిని పరిశీలించవలసి వున్నది.

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

రెండు సంవత్సరాల క్రితం సునీత వయస్సు, మరియు 4సం॥ల అనంతరము ఆమె వయస్సుల లబ్ధం, ఆమె ప్రస్తుత వయస్సుకు రెట్టింపు కంటే '1' ఎక్కువ అయిన ఆమె ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

దీనికి జవాబును కనుగొనుటకు ఆమె ప్రస్తుత వయస్సును 'x' సం॥లు అనుకుందాం. అయిన రెండు సం॥ల క్రితం ఆమె వయస్సు = $(x - 2)$ సం॥లు మరియు 4సం॥ల అనంతరం ఆమె వయస్సు $= (x + 4)$ సం॥లు.

దత్తాంశము ప్రకారము $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore \quad x^2 - 9 = 0$

అనగా $x^2 - 9 = 0$ ను తృప్తి పరచే x విలువే సునీత యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును ఇస్తుంది. ఈ సమీకరణంను $x^2 = 9$ గా రాయవచ్చు. ఇరువైపులా వర్గమూలములను తీసుకోవడం ద్వారా $x = 3$ లేదా $x = -3$ లను పొందవచ్చు. అయితే వయస్సు ధనాత్మకం కనుక $x = 3$ ను మాత్రమే పరిగణలోనికి తీసుకుంటాం.

అనగా సునీత వయస్సు 3 సం॥లు

ఇపుడు $(x + 2)^2 - 9 = 0$ అనే మరొక వర్గ సమీకరణమును పరిశీలిద్దాం.

$(x + 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9.$

$\therefore \quad x + 2 = 3$ లేదా $x + 2 = -3.$

$\therefore \quad x = 1$ లేదా $x = -5$

అనగా $(x + 2)^2 - 9 = 0$ యొక్క మూలాలు 1 మరియు -5.

పై రెండు ఉదాహరణలలోని x కలిగిన పదాలు ఖచ్చిత వర్గాల రూపంలో వున్నాయి. కావున ఇరువైపులా వర్గ మూలాలను తీసుకోవడం ద్వారా సులభంగా వానిని సాధించాం. అయితే ఇదే పద్ధతిన $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను సాధించగలమా? ఇంకా ఈ సమీకరణమును కారణాంక పద్ధతిని కూడా సాధించలేము. కనుక దీనిని ఒక ఖచ్చిత వర్గరూపంలోకి మార్చిసాదిద్దాం. ఈ పద్ధతినే వర్గంను పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గసమీకరణమును సాధించడంగా పిలుస్తాం. సమీకరణం యొక్క ఎడమ భాగము ఒక సంపూర్ణ వర్గము అయ్యే విధంగా మార్చుటయే ఈ పద్ధతిలోని మెళుకువ/ఉపాయము.

ఈ పద్ధతి ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$

$x^2 + 2 . x . 2 = 4$

ఇపుడు సమీకరణం యొక్క ఎడమభాగము $a^2 + 2ab$ రూపంలో వుంది. దీనికి b^2 ను కలిపితే అది $a^2 + 2ab + b^2$ అయి ఒక సంపూర్ణ / ఖచ్చిత వర్గము అవుతుంది. కనుక సమీకరణంనకు ఇరువైపులా $b^2 = 2^2 = 4$ ను కలుపగా

$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$

$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$

$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$

ఇపుడు ఇంకొక వర్గసమీకరణము $3x^2 - 5x + 2 = 0$ను తీసుకుందాం. దీనిలో x^2 గుణకము '1' కాదు. x^2 గుణకము '1' గా పొందుటకు సమీకరణం మొత్తాన్ని ఇరువైపులా '3' చే భాగిద్దాం.

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$ (ఇరువైపులా $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ను కలుపగా)

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$ (ఇరువైపులా వర్గమూలమును తీసుకొనగా)

అనగా, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ లేదా $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore \quad x = 1$ లేదా $x = \frac{4}{6}$

$\Rightarrow \quad x = 1$ లేదా $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క మూలాలు = 1 మరియు $\frac{2}{3}$.

పై ఉదాహరణ నుంచి ఈ పద్ధతికి అవసరమయ్యే అల్‌గారిథమ్‌ను క్రింది విధంగా రూపొందించుకోవచ్చు.

అల్‌గారిథమ్ : ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమును $ax^2 + bx + c = 0$ అనుకొనుము.

సోపానం-1 : సమీకరణమును ఇరువైపులా 'a' చే భాగించుము.

సోపానం-2 : స్థిరపదము $\frac{c}{a}$ ను కుడివైపునకు తీసుకొనిరమ్ము.

సోపానం-3 : ఎడమ భాగము ఒక సంపూర్ణ/ ఖచ్చిత వర్గమవుటకు సమీకరణమునకు ఇరువైపులా $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ ను కూడుము.

సోపానం-4 : ఎడమ భాగాన్ని వర్గంగా రాసి కుడిభాగాన్ని సూక్ష్మీకరించుము.

సోపానం-5 : సాధించుము.

ఉదాహరణ-6. వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించే పద్ధతి ద్వారా $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ను సాధించుము.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమీకరణము : $5x^2 - 6x - 2 = 0$

పై అల్‌గారిథమ్ ఆధారంగా దీనిని సాదిద్దాం.

సోపానం-1 : $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (ఇరువైపులా 5చే భాగించగా)

సోపానం-2 : $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

సోపానం-3 : $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (ఇరువైపులా $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ ను కూడగా)

సోపానం-4 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

సోపానం-5 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3+\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3-\sqrt{19}}{5}$$

ఉదాహరణ-7. $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ను వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా సాధించుము.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమీకరణం $4x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

అయితే x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువకైన $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ ఋణాత్మకం కాదు(ఎందుకు?) అనగా x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువనైనా పై సమీకరణంను తృప్తి పరచదు. కనుక ఇచ్చిన సవమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు లేవు.

ఇవి చేయండి.

వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా క్రింది వర్గ సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

మనం ఇప్పటి వరకూ వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా అనేక వర్గ సమీకరణాలను సాధించాం. ఇపుడు ఇదే పద్ధతిని ప్రామాణిక వర్గ సమీకరణ రూపమైన $ax^2+bx+c=0$ కు అనువర్తింపచేసి దానిని సాదిద్దాం.

సోపానం-1 : $ax^2+bx+c=0$ (ఇరువైపులా a చే భాగించగా)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

సోపానం-2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

సోపానం-3 : $x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ (ఇరువైపులా $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ ను కూడగా)

$$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

సోపానం-4 : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

సోపానం-5 : $b^2 - 4ac \geq 0$ అనుకొని ఇరువైపులా వర్గమూలాలమును తీసుకొనగా

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore$ $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ మరియు $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

ఒకవేళ $b^2 - 4ac < 0$ అయిన సమీకరణంనకు వాస్తవ మూలాలు వుండవు (ఎందుకు ?)

కనుక $\mathbf{b^2 - 4ac \geq 0}$ అయినపుడు $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ యొక్క మూలాలు $\frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$.

పై సూత్రమును ఉపయోగించి ఏ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలనైనా సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-8. అభ్యాసము 5.1 లోని 2(i) వ ప్రశ్నను పై సూత్రమును ఉపయోగించి సాధించుము.

సాధన : దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలం యొక్క వెడల్పు 'x' మీ. అనుకొనిన

దాని పొడవు = $(2x + 1)$ మీ.

దాని వైశాల్యము 528 చ.మీ. కనుక

$$x(2x + 1) = 528,$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + x - 528 = 0.$$

ఈ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో కలదు. ఇచ్చట $a = 2, b = 1, c = -528$.

పై సూత్రం నుంచి

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$\therefore \quad x = \frac{64}{4}$ లేదా $x = \frac{-66}{4}$

$\Rightarrow \quad x = 16$ లేదా $x = -\frac{33}{2}$

వెడల్పు ఋణాత్మకం కాదు కనుక $x = 16$ ను పరిగణలోనికి తీసుకుంటాం.

$\therefore$ వెడల్పు = $x = 16$ మీ.

మరియు పొడవు = $(2x + 1) = 33$మీ.

సమస్యలోని షరతుల ఆధారంగా ఈ సాధనలు సరియైనవవో, కావో మీరు సరిచూడవచ్చు.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఒక వర్గ సమీకరణమును సాధించుటకు పై మూడు పద్ధతులలో నీవు ఏ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తావు? ఎందుకు?

ఉదాహరణ-9. రెండు వరుస ధన బేసిసంఖ్యల మొత్తము 290 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటి బేసి సంఖ్యని 'x' అనుకొనిన రెండవ బేసిసంఖ్య $(x + 2)$ అవుతుంది.

$\therefore \quad x^2 + (x+2)^2 = 290$

అంటే $\quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

అంటే $\quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$

అంటే $\quad x^2 + 2x - 143 = 0$

ఇది x లో ఒక వర్గ సమీకరణము.

$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ సూత్రం ప్రకారం

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$\therefore \quad x = 11$ లేదా $x = -13$

అయితే x ఒక ధన బేసి సంఖ్య కనుక $x = 11$

$\therefore \quad x + 2 = 11 + 2 = 13.$

$\therefore$ రెండు వరుస ధన బేసి సంఖ్యలు = 11, 13

సరిచూచుట : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290.$

ఉదాహరణ-10. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు తయారు చేయబడుతుంది. దీని వెడల్పు, పొడవు కంటే 3 మీ. తక్కువ. దీని వైశాల్యము, దీని వెడల్పుకు సమానమైన భూమి మరియు 12 మీ. ఎత్తు గల ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం కంటే 4 చ.మీ. ఎక్కువ. అయిన దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు యొక్క పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము ?

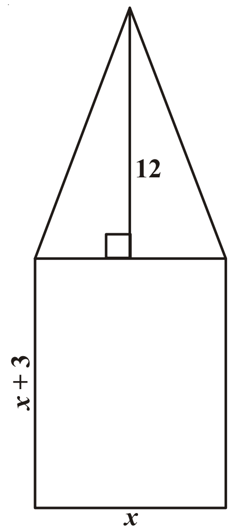
సాధన : దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వెడల్పు x మీ. అనుకొనిన

పొడవు $= (x + 3)$ మీ.

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వైశాల్యము $= x(x + 3)$ చ.మీ. $= (x^2 + 3x)$ చ.మీ.

సమద్విబాహు త్రిభుజము యొక్క భూమి $= x$ మీ.

$\therefore$ సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ చ.మీ.



అయితే దత్తాంశము ప్రకారము

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$\therefore$ సూత్రం నుంచి

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ లేదా } -1$$

అయితే $x \neq -1$ (ఎందుకు?) కనుక $x = 4$.

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వెడల్పు $= 4$మీ.

మరియు పొడవు $x + 3 = 4 + 3 = 7$మీ.

సరిచూచుట **:** దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వైశాల్యము $= 28$ చ.మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యము $= 24$ మీ^{2} $= (28 - 4)$ చ.మీ.

ఉదాహరణ-11. క్రింది వర్గ సమీకరణాలకు మూలాలు వుంటే వానిని సూత్రము ద్వారా కనుగొనుము ?

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$

సాధన :

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ ఇచ్చట $a = 1, b = 4, c = 5$. కనుక $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

ఏ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గమైననూ ఋణాత్మకము కానేరదు కనుక $\sqrt{b^2 - 4ac}$ వాస్తవ విలువలను కలిగి యుండదు.

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు లేవు.

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. ఇచ్చట $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$.

$\therefore \quad b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\therefore$ మూలాలు $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

ఉదాహరణ-12. క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము.

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, \ x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, \ x \neq 0, 2$

సాధన :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$. సమీకరణం మొత్తమును x చే గుణించిన

$x^2 + 1 = 3x$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$

ఇచ్చుట $a = 1, b = -3, c = 1$ కనుక

$b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (ఎందుకు ?)

$\therefore \quad \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ మరియు $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$లు మూలాలు.

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, \ x \neq 0, 2.$

$x \neq 0, 2$, కనుక $x(x-2)$ చే సమీకరణం ఇరువైపులా గుణించిన

$(x-2) - x = 3x(x-2)$

$= 3x^2 - 6x$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$

ఇచ్చుట $a = 3, b = -6, c = 2$. కనుక, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$

$\therefore$ మూలాలు $= \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ మరియు $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$.

ఉదాహరణ-13. నిశ్చల నీటిలో ఒక మోటారు బోటు యొక్క వేగము గంటకు 18 కి.మీ. నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా 24 కి.మీ. ప్రయాణించుటకు పట్టే కాలము, తిరిగి బయలుదేరిన స్థానమునకు వచ్చుటకు పట్టే కాలం కంటే 1 గంట ఎక్కువ. అయిన నీటి వేగమెంత ?

సాధన : నీటి వేగము గంటకు x కి.మీ. అనుకొనిన

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు బోటు వేగము $=(18-x)$ కి.మీ.

మరియు తిరుగు ప్రయాణంలో బోటు వేగము $=(18+x)$ కి.మీ.

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు పట్టే కాలము $= \dfrac{\text{దూరం}}{\text{వేగం}} = \dfrac{24}{18-x}$ గం॥

తిరుగు ప్రయాణంనకు పట్టే కాలము $= \dfrac{24}{18+x}$ గంటలు.

దత్తాంశము ప్రకారం

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$\Rightarrow \quad 24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$

$\Rightarrow \quad x^2 + 48x - 324 = 0$

$\therefore$ సూత్రము నుంచి

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ లేదా } -54$$

నీటి ప్రవాహము యొక్క వేగము ఋణాత్మకము కానేరదు కావున $x = 6$

అనగా నీటి ప్రవాహము యొక్క వేగము = 6 కి.మీ/గంట.

అభ్యాసము - 5.3

1. క్రింది సమీకరణాలకు మూలాలు వుండే వానిని వర్గంను పూర్తి చేయుట ద్వారా కనుగొనుము.

i. $2x^2 + x - 4 = 0$ ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$ iv. $x^2 + 5 = -6x$

2. సూత్రమును ఉపయోగించి 1వ ప్రశ్నలోని సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము ?

3. క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము ?

(i) $x-\frac{1}{x}=3, x\neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}, x\neq -4,7$

4. 3 సం॥ల క్రితము రహమాన్ వయస్సు యొక్క వ్యుత్క్రమము, 5 సం॥ల తరువాత అతని వయస్సు యొక్క వ్యుత్క్రమముల మొత్తము $\frac{1}{3}$ అయిన అతని ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత ?

5. మౌళికకు గణితములో మరియు ఇంగ్లీషులో వచ్చిన మార్కుల మొత్తము 30. ఆమెకు ఒకవేళ గణితంలో 2 మార్కులు ఎక్కువగా, ఇంగ్లీషులో 3 మార్కులు తక్కువగా వచ్చి వుంటే ఆ రెండింటి యొక్క లబ్ధము 210 అయి వుండేది. అయిన ఆమెకు రెండు సబ్జక్టులలో వచ్చిన మార్కులను కనుగొనుము?

6. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క కర్ణము దాని వెడల్పు కంటే 60 మీ ఎక్కువ మరియు పొడవు, వెడల్పు కంటే 30 మీ. ఎక్కువ అయిన దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము?

7. రెండు సంఖ్యల వర్గాల భేదము 180. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము, పెద్దదానికి 8 రెట్లు అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము?

8. ఒక రైలు 360 కి.మి దూరమును ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణించును. దీని వేగము గంటకు 5 కి.మీ. పెరిగిన అదే దూరమును ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలము 1 గంట తగ్గును. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుము?

9. రెండు కుళాయిలు కలసి ఒక నీళ్ల ట్యాంకును $9\frac{3}{8}$ గం॥లలో నింపును. ఎక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ఒక్కటే, తక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి నింపే సమయమునకు 10 గం॥ తక్కువ సమయంలో నింపును. అయితే ఒక్కొక్క కుళాయి విడివిడిగా ట్యాంకును నింపుటకు పట్టే కాలమును కనుగొనుము?

10. మైసూరు, బెంగుళూరు మధ్య 132 కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించుటకు ఒక ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు, ప్యాసింజర్ రైలు కంటే 1 గంట సమయము తక్కువ తీసుకొంటుంది. (మధ్యలో ఆగే సమయాలను లెక్కలోకి తీసుకోలేదు) ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు సగటు వేగము, ప్యాసింజర్ రైలు వేగం కంటే 11కి.మీ / గంట ఎక్కువ అయిన రెండు రైళ్ల వేగాలను కనుగొనుము.

11. రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం 468 చ.మీ వాని చుట్టు కొలతల బేధము 24 మీ. అయిన ఆ రెండు చతురస్రాల భుజాలను కనుగొనుము?

12. 96 మీ. ఎత్తుగల ఒక ఇంటి పై భాగం నుంచి 80మీ/సెకను తొలి వేగముతో పైకి విసిరి వేయబడింది. 't' సెకన్ల తరువాత దానికి భూమికి మధ్యగల దూరము $S = 96 + 80t - 16t^2$. అయితే అది ఎన్ని సెకన్ల తరువాత భూమిని తాకుతుంది.

13. 'n' భుజాలుగల ఒక బహుభుజి లోని కర్ణాల సంఖ్య $\frac{1}{2}n(n-3)$. అయితే 65 కర్ణాలు గల బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్య ఎంత? 50 కర్ణాలు గల బహుభుజి వ్యవస్థితమౌతుందా ?

5.5 మూలాల స్వభావము

$ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

అని మనము ఇంతకు ముందు భాగంలో తెలుసుకున్నాం. ఇపుడు వీని యొక్క స్వభావమును అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

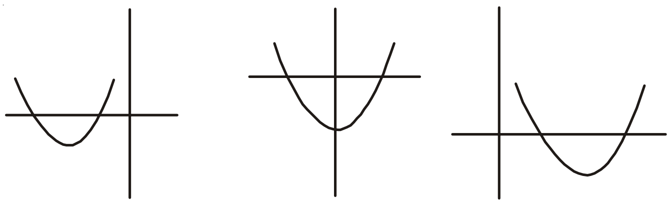
భాగం-1 : $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు మూలాలుండును. అవి

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

బహుపది శూన్యవిలువలనగా బహుపది విలువ శూన్యం అయ్యే విలువలని అర్థము. మరియు ఆ బహుపదికి గ్రాఫ్ గీస్తే అది X-అక్షమును ఖండించే విలువలని కూడా గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

అదే విధంగా ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలంటే ఆ వర్గ సమీకరణమునకు గ్రాఫ్ గీస్తే అది X-అక్షంను ఖండించే విలువలని గుర్తించండి.

$b^2 - 4ac > 0$ అయిన సమయంలో ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమునకు గ్రాఫ్ గీస్తే మనం క్రింది పటాలను పొందగలం.

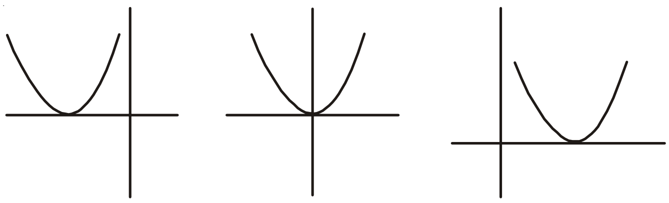


పటాల నుంచి వక్రము X-అక్షమును రెండు వేరు వేరు బిందువుల వద్ద తాకుతుందని గమనించగలరు.

భాగం-2 : $b^2 - 4ac = 0$ అయిన

$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$

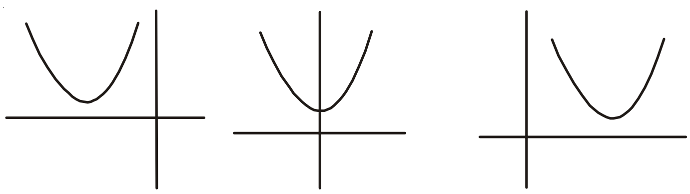
$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$$



పటాల నుంచి వక్రము X-అక్షమును ఒకే బిందువు వద్ద తాకుతుందని గమనించగలరు.

భాగం-3 : $b^2 - 4ac < 0$

అయిన మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు. సంకీర్ణ సంఖ్యలు.



ఈ సమయంలో గీయబడిన వక్రము X-అక్షంను తాకకపోవటం గమనించగలరు.

$b^2 - 4ac$ అనేది $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ మూలాలు వుంటాయో లేదో నిర్ణయించుటకు తోడ్పడుతుంది. కనుక దీనిని వర్గ సమీకరణం యొక్క విచక్షణి అంటాం.

అనగా $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం

i. $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

ii. $b^2 - 4ac = 0$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

iii. $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-14. $2x^2 - 4x + 3 = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొని తద్వారా మూలాల స్వభావమును చర్చించుము.

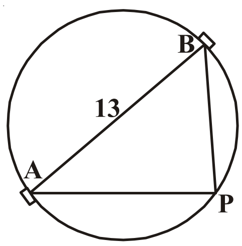
సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది. ఇచ్చట $a = 2, b = -4$; $c = 3$ కనుక విచక్షణ

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణం వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

ఉదాహరణ-15. 13 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఒక వృత్తాకార పార్కు సరిహద్దు మీద ఒక స్తంభమును ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. పార్కు యొక్క సరిహద్దు మీద ఎదురెదురుగా అనగా ఒక వ్యాసం యొక్క చివరి బిందువుల వద్ద ఏర్పాటు చేయబడిన A మరియు B అనే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభము వరకూ గల దూరాల బేధము 7 మీ. వుండునట్లు స్తంభమును ఏర్పాటు చేయగలమా? ఒకవేళ చేయగలిగితే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభం ఎంత దూరంలో వుంటుంది?

సాధన : ముందుగా తగిన చిత్రాన్ని గీద్దాం.



స్తంభమును ఏర్పాటు చేసే బిందువు P అనుకుందాం. B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరమును x మీ. అనుకుందాం. అనగా BP = x మీ. దత్తాంశము ప్రకారము AP, BP ల మధ్య భేదము 7మీ. కనుక AP = $x + 7$ మీ అవుతుంది

AB = 13మీ, మరియు AB వ్యాసం కనుక

$\angle APB = 90^0$ (ఎందుకు?)

$\therefore$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $AP^2 + PB^2 = AB^2$

$\Rightarrow \quad (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore \quad 2x^2 + 14x - 120 = 0$

పై సమీకరణంను తృప్తి పరిచే x విలువయే B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరం అవుతుంది.

అనగా $x^2 + 7x - 60 = 0$

సమీకరణంనకు వాస్తవ మూలాలు వున్నప్పుడే స్తంభమును ఏర్పాటు చేయడానికి వీలవుతుంది. అయితే ఈ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు వున్నదీ లేనిదీ దీని విచక్షణి ఆధారంగానే తెలుసుకోగలం. కనుక ముందుగా దీనిని విచక్షణిని పరిశీలిద్దాం.

$\therefore$ విచక్షణి $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$

అనగా ఈ వర్గ సమకరణంనకు రెండు విభిన్న వాస్తవ మూలాలు వుంటాయి. అంటే సమస్యలో ఇచ్చిన షరతులకు అనుగుణంగా స్తంభమును ఏర్పాటు చేయడం సాధ్యమే.

సూత్రమును ఉపయోగించి $x^2 + 7x - 60 = 0$ ను సాధిస్తే

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$x = 5$ లేదా $- 12.$

అయితే x దూరమును సూచిస్తుంది. కనుక ఇది ఖచ్చితంగా ధనాత్మకము.

$\therefore \quad x = 5.$

అనగా B నుంచి 5మీ దూరంలో మరియు A నుంచి 12 మీ. దూరంలో స్తంభంను ఏర్పాటు చేయాలి.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక వర్గ సమీకరణమును సాధించటానికి ముందు దాని యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుటం వల్ల కలిగే లాభం ఏమిటో వివరించండి ? దీని విలువ ఎందుకు ముఖ్యమైనది ?
2. మూడు వేరువేరు వర్గ సమీకరణాలను తయారుచేయుము. అందులో ఒకటి రెండు వేరువేరు వాస్తవ మూలాలను, మరిఒకటి రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను ఇంకొకటి వాస్తవ మూలాలను కలిగిలేని విధంగా వుండాలి.

ఉదాహరణ-16. $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుము ? తద్వారా మూలాల స్వభావమును తెలుపుము ? ఒకవేళ మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలైతే వానిని కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a = 3, b = -2$ మరియు $c = \frac{1}{3}$

విచక్షిణి $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

ఇచ్చి వర్గ సమీకరణంను రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటాయి.

అవి $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}, \Rightarrow \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{3}.$

అభ్యాసం - 5.4

1. క్రింది సమీకరణాల మూలాల స్వభావమును తెలుపుము ? ఒక వేళ వాస్తవ మూలాలు వుంటే కనుగొనుము.

 (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

 (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. క్రింది వర్గ సమీకరణాలలో రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటే k విలువను కనుగొనుము ?

 (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. మామిడి పండ్లను నిల్వచేయుటకు 800 చ.మీ. వైశాల్యం వుంటూ, పొడవు వెడల్పు కంటే రెండు రెట్లు వుండే విధంగా ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలమును ఏర్పాటు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

4. ఇద్దరి మిత్రుల వయస్సుల మొత్తం 20 సం॥లు. నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48. ఇది సాధ్యమేనా? ఒకవేళ సాధ్యమైతే వారి వయస్సులను కనుగొనుము.

5. చుట్టుకొలత 80 మీ. వైశాల్యము 400 చ.మీ వుండునట్లు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కును తయారు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[ఇది పరీక్ష కొరకు ఉద్దేశించినది కాదు]

1. ఒక తలంలో కొన్ని బిందువులు గుర్తించబడినవి. ప్రతి బిందువు మిగిలిన అన్ని బిందువులతో రేఖా ఖండాలచే కలుపబడింది. ఈ విధంగా చేయటం వల్ల మొత్తం 10 రేఖాఖండాలు ఏర్పడితే మొత్తం బిందువులు ఎన్ని ?

2. ఒక రెండంకెల సంఖ్యలో అంకెల లబ్ధం 8. ఈ సంఖ్యకు 18 కలిపిన వచ్చే సంఖ్య మొదటి సంఖ్యలోని అంకెలను తారు మారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య ఒక్కటే. అయిన మొదటి సంఖ్యను కనుగొనుము?

3. 8 మీ. పొడవు వున్న తీగకు రెండు ముక్కలుగా కత్తిరించారు. ప్రతి ముక్కను తిరిగి ఒక చతురస్రాకారంగా వంచారు. ఇలా ఏర్పడిన రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం 2 చ.మీ. కావలెనన్న ప్రతి ముక్క పొడవు ఎంత వుండాలి?

$$\left[x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2\right].$$

4. వినయ్ మరియు ప్రవీణ్‌లు కలసి ఒక ఇంటికి రంగులు వేసే పనిని 6 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. వినయ్ ఒక్కడే ఆ పనిని ప్రవీణ్ కంటే 5 రోజులు ముందుగా పూర్తి చేయగలడు. అయిన వినయ్ ఒక్కడే ఆ పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలడు.

5. ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు మొత్తం $\frac{'-b'}{a}$ అని చూపుము?

6. ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాల లబ్ధం '$\frac{c}{a}$' అని చూపుము ?

7. ఒక భిన్నములో హారము, లవము యొక్క రెట్టింపు కంటే ఒకటి ఎక్కువ. ఆ భిన్నము మరియు దాని వుత్క్రమాల మొత్తము $2\frac{16}{21}$ అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయంలో ఈ క్రింది విషయాలను మనము చర్చించినాము.

1. చరరాశి 'x' లో వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం : $ax^2 + bx + c = 0$. ఇచ్చట a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

2. ఏదైనా ఒక వాస్తవసంఖ్య 'α' కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన 'α' ను $ax^2 + bx + c$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలము అంటాము. $ax^2 + bx + c$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలు, $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు ఒక్కటే.

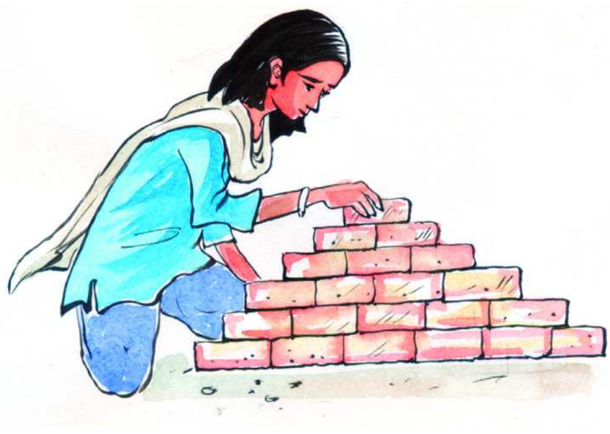
3. $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి ప్రతి దానికి సున్నాకు సమానం చేయటం ద్వారా $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనగలుగుతాము.

4. ఒక వర్గ సమీకరణమును వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా కూడా సాధించవచ్చు.

5. $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం
   (i) $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుంటుంది.
   (ii) $b^2 - 4ac = 0$, అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుంటుంది.
   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.



అధ్యాయము

6

శ్రేఢులు

(Progressions)

6.1 పరిచయం

ప్రకృతిలో చాలా వస్తువులు అమరికలను పాటించడం మనం గమనించే వుంటాము. ఉదాహరణకు ప్రొద్దు తిరుగుడు పువ్వులోని పూలరెక్కలు, తేనెతుట్టెలోని రంధ్రాలు, మొక్కజొన్న కంకిలోని విత్తనాలు, అనాస (pineapple) మరియు దేవదారు (pine) పండ్లమీది సర్పిలాకారాలు.

పై ప్రతీ ఉదాహరణలోని అమరికను గమనించారా? సహజ సిద్ధమైన ఇలాంటి అమరికలు పునరావృతం అవుతాయి గానీ పురోగమించే విధంగా వుండవు. ప్రొద్దు తిరుగుడు పువ్వులో ఒకే రకమైన రెక్కలు ఒకే దూరంలో పెరుగుతాయి. తేనెతుట్టెలోని షడ్భుజాకార రంధ్రాలన్నీ షడ్భుజాకారంలో సౌష్టవంగా వుంటాయి. అదేవిధంగా అనాసపండు మీది సహజసిద్ధమైన సర్పిలాకార అమరికలను మనం గమనించవచ్చు.

నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే ఇలాంటి మరికొన్ని అమరికలను పరిశీలిద్దాం.

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... విలువల యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు వరుసగా

4, 6, 4, 6, 4, 6, ...

(ii) మేరి బ్యాంకు ఉద్యోగాల అర్హత పరీక్షకు సన్నద్ధమౌతుంది. అందులో భాగంగా అమరికల మీద సమస్యలను సాధిస్తూ వుంది. వానిలో ఒక సమస్య ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

1, 2, 4, 8, 10, 20, 22 ....

(iii) ఉష ఒక ఉద్యోగానికి దరఖాస్తు చేసింది. ఆమె నెలకు ₹ 8000/– చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ 500 పెంచే విధంగా వున్న ఉద్యోగంలో నియమితురాలైంది. అయిన ఆమె జీతం మొదటి, రెండవ, మూడవ .... సంవత్సరాలలో నెలకు 8000, 8500, 9000 .....

(iv) ఒక నిచ్చెన మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింద నుంచి పైకి క్రమంగా 2 సెం.మీ. తగ్గుతూ వుంది. క్రింద నుంచిమొదటి మెట్టు యొక్క పొడవు 45 సెం.మీ అయిన క్రింద నుంచి క్రమంగా మొదటి, రెండవ, మూడవ .... ఎనిమిదవ మెట్ల పొడవులు వరుసగా 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31.

పై సంఖ్యల అమరికలలోని పదాల మధ్య మీరేమైనా సంబంధాన్ని గమనించారా ?

ఉదాహరణ (i) లో రెండు సంఖ్యలు 4 మరియు 6 అదే క్రమంలో పునరావృతమవుతున్నాయి.

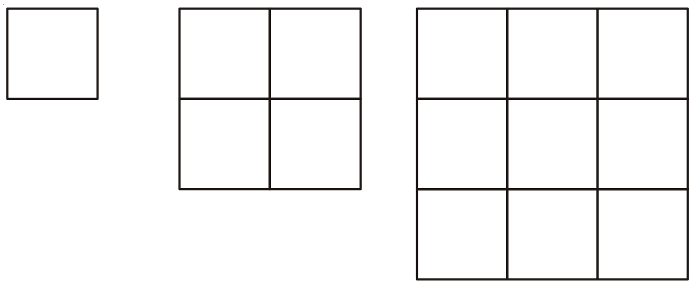
ఉదాహరణ (ii) లోని అమరికను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించండి. ఉదాహరణ (iii), (iv) లలోని అమరికలలో సంఖ్యలు క్రమంగా స్థిరంగా పురోగమిస్తూ వున్నాయి. జాబితా 8000, 8500, 9000, ... లో ప్రతీ పదము (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమునకు 500 ను కలపటం వల్ల వస్తున్నాయి. అదేవిధంగా జాబితా 45, 43, 41, ... లో ప్రతీ పదం (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమునకు '-2' ను కలపటం వల్ల వస్తుంది. ఇలాంటి పురోగమన అమరికలు మరికొన్నింటిని మనం చూద్దాం.

(a) ఒక సేవింగ్ స్కీములో సొమ్ము మూడు సం॥లకు ఒకసారి $\frac{5}{4}$ రెట్లు పెరుగుతుంది. ఈ స్కీములో ₹ 8000 ను పెట్టుబడిగా పెట్టిన 3, 6, 9 మరియు 12 సం॥ల తరువాత వచ్చే మొత్తం సొమ్ము వరుసగా

10000, 12500, 15625, 19531.25.

(b) 1, 2, 3, ... యూనిట్లు భుజాలుగా గల చతురస్రాలలోని యూనిట్ చతురస్రాల సంఖ్య వరుసగా

$1^2, 2^2, 3^2, ...$

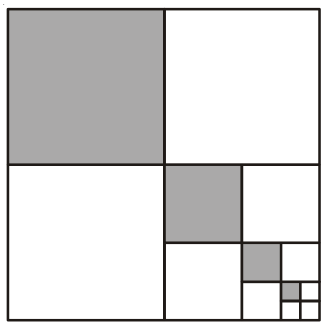


(c) హేమ తన కూతురు మొదటి పుట్టిన రోజు ₹ 1000 లను తన కూతురు యొక్క డబ్బుల పెట్టెలో వుంచింది. ప్రతీ సం॥ము ఈ విధంగా వుంచే సొమ్ము ₹ 500 పెంచుతూ పోయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ ..... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా

1000, 1500, 2000, 2500, ...

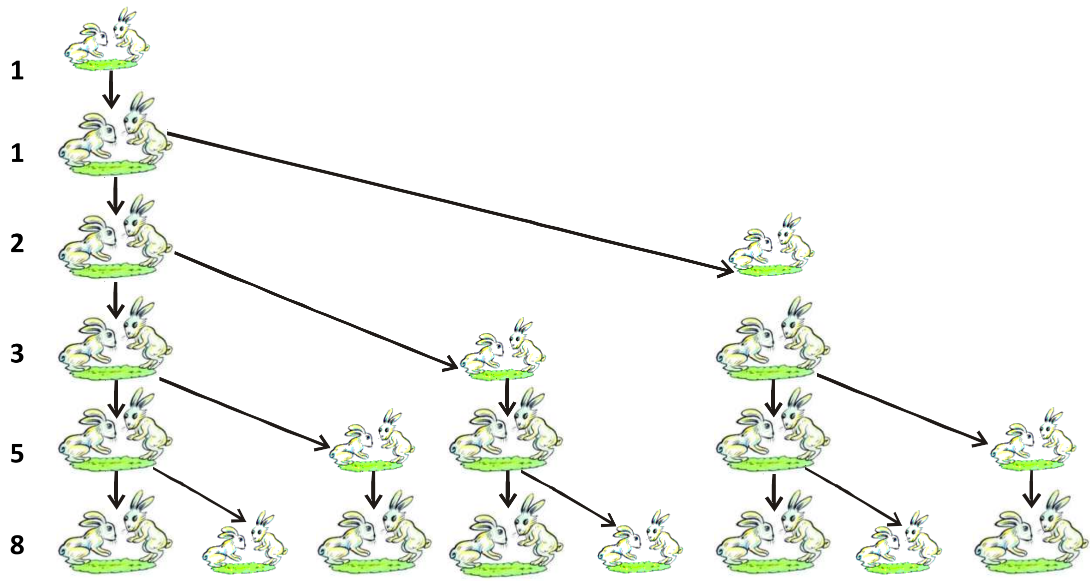
(d) ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటంలో షేడ్ చేయబడిన చతురస్రభాగాల విలువలు భిన్న రూపంలో వరుసగా

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, ...$



(e) ఒక కుందేళ్ళ జంట రెండవ నెల నుంచి ప్రతి నెల మరిఒక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. ఇలా ఉత్పత్తి అయిన కుందేల్ల జంట కూడా తిరిగి రెండవ నెల నుంచి ప్రతినెల ఇంకొక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. మొదటి నెలలో ఒకేఒక జంట వుందనుకొని ఏ కుందేళ్ళ జంట చనిపోలేదని భావిస్తే 1, 2, 3, 4, 5, 6,....., వ నెలలో వుండే కుందేళ్ళ జంటల సంఖ్యలు వరుసగా

1, 1, 2, 3, 5, 8



పై ఉదాహరణలలో మనం కొన్ని అమరికలను గమనించగలం. కొన్నింటిలో ప్రతీ పదము దాని ముందువున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలవటం వల్ల లభిస్తాయి. కొన్నింటిలో ప్రతీ పదమును ఒక స్థిర పదంచే గుణించటం వల్ల తరువాత పదాలను పొందగలం. మరికొన్నింటిలో వరుస సంఖ్యల వర్గాలను గమనించగలం.

ఈ అధ్యాయంలో ప్రతీ పదము దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలపటం వల్ల లభించే అమరికలను, మరియు ప్రతీ పదమును ఒక స్థిరపదముచే గుణించడం వల్ల తరువాత పదాలను పొందే అమరికలను వాని యొక్క n వ పదాలను మరియు n పదాల మొత్తాలను గురించి చర్చిస్తాం.

చరిత్ర : 400 సం॥లకు పూర్వమే బాబిలోనియన్లకు అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢులను గురించి తెలిసినట్లుగా ఆధారాలున్నాయి. బోథెన్సు (570 AD) ప్రకారము ఈ శ్రేఢులను గురించి పూర్వపు గ్రీకు రచయితలకు తెలిసినట్లుగా అర్థమౌతుంది. మొట్టమొదటిసారి ప్రముఖ భారతీయ ప్రాచీన గణితవేత్త ఆర్యభట్ట (క్రీ.శ. 470) మొదటిసారి మొదటి సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము, ఘనాల మొత్తమునకు సూత్రాలను ఇచ్చినట్లుగా తన రచన ఆర్యభట్టీయం (క్రీ.శ 499) నుంచి తెలుస్తుంది. ఇంకా అంకశ్రేఢిలో p వ పదం నుంచి nవ పదం వరకూ గల పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు అవసరమైన సూత్రమును ఈయన ఇవ్వటం జరిగింది. బ్రహ్మగుప్తుడు, (క్రీ.శ.598) మహావీర (క్రీ.శ.850) మరియు భాస్కర (క్రీ.శ. 1114-1185) వంటి ప్రాచీన భారతీయ గణితవేత్తలు మొదటి సహజసంఖ్యల వర్గాల మొత్తము మరియు ఘనాల మొత్తంలను గురించి చర్చించినట్లుగా తెలుస్తుంది.

6.2 అంకశ్రేఢులు

క్రింది సంఖ్యల జాబితాలను పరిశీలించండి.

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

జాబితాలోని ప్రతీ సంఖ్యను ఒక పదం అంటాం.

ఇచ్చిన పదాల ఆధారంగా ప్రతి జాబితాలో తరువాత పదమును రాయగలరా? రాయగలిగితే ఎలా రాయగలరు? బహుశా అమరికలోని నియమం ఆధారంగా రాయగలరు. ఆ నియమం ఏమిటో పరిశీలిద్దాం.

(i)లో ప్రతి పదము (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదానికంటే '1' ఎక్కువ

(ii)లో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదము కంటే 30 తక్కువ.

(iii) లో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదానికి '1' కలపటం వల్ల వస్తుంది.

(iv) లో అన్ని పదాలు 3యే. అనగా ప్రతీ పదము దాని ముందున్న పదానికి సున్న ('0') కలపటం వల్ల వస్తుంది.

(v)లో ప్రతి పదము దాని ముందు వున్న పదానికి '– 0.5' ను కలపటం వల్ల (అనగా 0.5 ను తీసివేయటం వల్ల) వస్తుంది.

పై అన్ని జాబితాలలో ప్రతి జాబితాలోను ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల గానీ లేదా తీసివేయటం వల్లగానీ వస్తున్నాయి. ఇలాంటి సంఖ్యల జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము.

ప్రయత్నించండి

(i) క్రింది వానిలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఎందుకు?

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ...

(b) 2, 5, 7, 10, 12, 15......

(c) –1, –3, –5, –7, ...

(ii) ఏవైనా మూడు అంకశ్రేఢులను రాయుము ?

6.2.1 అంకశ్రేఢి అనగా నేమి ?

పై పరిశీలనల దృష్ట్యా "ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన అన్ని పదాలు వాని ముందున్న పదానికి ఏదో ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల వస్తూ వుంటే ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము".

కలిపే స్థిరసంఖ్యను సామాన్య భేదము లేదా పదాంతరము అంటాము. ఇది **ధనాత్మకము లేదా ఋణాత్మకము లేదా సున్న** కావచ్చు.

ఒక అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదము a_1, రెండవ పదమును $a_2, \ldots$, nవ పదమును a_n మరియు సామాన్య భేదము d అనుకొనిన అంకశ్రేఢి : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

మరియు, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

మరిన్ని అంకశ్రేఢులను పరిశీలిద్దాం.

(a) ఒక పాఠశాలలో ప్రార్థనా సమయంలో వరుసగా నిలబడిన విద్యార్థుల ఎత్తులు (సెం.మీ.లలో) 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) ఒక పట్టణములో జనవరి మాసంలో ఒక వారంలో నమోదైన కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల ఆరోహణ క్రమము

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) ₹ 1000 ల అప్పు 5% సొమ్మును ప్రతీ నెల చెల్లిస్తున్న, ప్రతి నెల చివర ఇంకనూ చెల్లించవలసిన సొమ్ము 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) ఒక పాఠశాలలో 1 నుంచి 12 వ తరగతి వరకూ ప్రతి తరగతిలో అత్యధిక మార్కులు సాధించిన వారికి ఇచ్చే బహుమతుల విలువ వరుసగా 200, 250, 300, 350, . . ., 750.

(e) 10 నెలలో ప్రతి నెలలో ₹ 50 లు చొప్పున పొదుపు చేసిన ప్రతి నెల చివరలో వుండే మొత్తం సొమ్ము వరుసగా 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పైన పేర్కొనబడిన ప్రతి జాబితా ఏవిధంగా A.P. అవుతుందో ఆలోచించుము ? మీ మిత్రునిలో చర్చించుము?
2. పైన ఇవ్వబడిన ప్రతి జాబితాకు సామాన్యభేదంను కనుగొనుము? సామాన్యభేదం ఎప్పుడు ధనాత్మకమో ఆలోచించుము ?
3. సామాన్య భేదం ఒక చిన్న ధనాత్మక విలువ వుండేటట్లు ఒక AP ని తయారుచేయుము.
4. సామాన్య భేదం ఒక పెద్ద ధనాత్మక విలువగా వుండేటట్లు ఒక అంకశ్రేఢిని తయారు చేయుము?
5. సామాన్య భేదం ఋణాత్మకంగా వుండేటట్లు ఒక A.Pని రాయుము.

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపము : అంకశ్రేఢులన్నింటిని ఈ క్రింది రూపంలో రాయవచ్చని మీరు గమనించే వుంటారు.

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . .$$

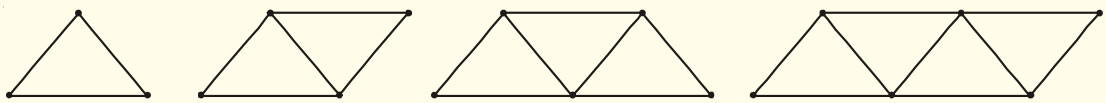
దీనినే అంకశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపము అంటాం. ఇందులో 'a' మొదటి పదము, d సామాన్య భేదం లేదా పదాంతరము.

ఉదాహరణకు 1, 2, 3, 4, 5, ... లో మొదటి పదం ఒకటి మరియు సామాన్యభేదం కూడా ఒకటియే.

అదే విధంగా 4, 6, 8, 10, ... లో మొదటి పదం ఎంత? సామాన్య భేదం ఎంత?

కృత్యము

(i) అగ్గిపుల్లల సహాయంతో క్రింది ఆకారాలను ఏర్పరచుము ?



(ii) ప్రతి ఆకారానికి కావలసిన అగ్గి పుల్లల సంఖ్యను వరుసగా రాయుము?

(iii) జాబితాలో రెండో వరుస సంఖ్యల మధ్యగల భేదం ఒకే విధంగా (స్థిరంగా) వుందా?

(iv) ఈ సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుందా?

6.2.2 అంకశ్రేఢి ఆధారపడే అంశాలు

6.2.1 శీర్షిక (a) నుంచి (e) వరకూ ఇవ్వబడిన జాబితాలన్నీ కూడా పరిమిత సంఖ్యలో పదాలను కలిగి వున్నాయి. ఇలాంటి అంకశ్రేఢులను పరిమిత అంకశ్రేఢులు అంటారు. వీనిలో చివరి పదము వుంటుంది. అయితే 6.2 శీర్షికలో (i) నుంచి (v) వరకూఇవ్వబడిన జాబితాలలో పదాల సంఖ్య అపరిమితము. ఇలాంటి అంకశ్రేఢులను అనంత అంకశ్రేఢులు అంటాం. దీనిలో చివరి పదము వుండదు.

ఇవి చేయండి

పరిమిత అంకశ్రేఢికి 3 ఉదాహరణలు, అనంత అంకశ్రేఢికి 3 ఉదాహరణలు ఇమ్ము.

ఒక అంకశ్రేఢిని గురించి తెలియాలంటే మనకు ఏమేమి అవసరము! ఈ శ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము తెలిస్తే సరిపోతుందా? లేదా సామన్యభేదం తెలిస్తే సరిపోతుందా?

అయితే ఒక అంకశ్రేఢి గురించి తెలియాలంటే లేదా దానిని పూర్తి చేయాలంటే మనకు రెండూ – అనగా దాని మొదటి పదము 'a' మరియు సామాన్యభేదం 'd' తెలియాలని మనం గమనించగలం. ఉదాహరణకు మొదటి పదము a విలువ 6 మరియు సామాన్యభేదం d విలువ 3 అయిన అంకశ్రేఢి :

$$6, 9,12, 15, \ldots$$

మరియు మొదటి పదము $a = 6$; సామాన్య భేదం $d = -3$ అయిన

అంకశ్రేఢి : $6, 3, 0, -3, \ldots$

అదేవిధంగా

$a = -7,\ d = -2,$ అయిన అంకశ్రేఢి $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0,\ d = 0.1,$ అయిన అంకశ్రేఢి $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0,\ d = 1\frac{1}{2},$ అయిన అంకశ్రేఢి $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2,\ d = 0,$ అయిన అంకశ్రేఢి $2, 2, 2, 2, \ldots$

అనగా a, d విలువలు తెలిసిన మనం అంకశ్రేఢిని రాయగలం.

ఇంకొక మార్గమును ప్రయత్నిద్దాం. ఒకవేళ సంఖ్యల జాబితా ఇస్తే అది అంకశ్రేఢి అవుతుందా? లేదా? అని ఎలా కనుగొంటాం ? ఉదాహరణకు

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

మొదటగా మనం రెండు వరుస సంఖ్యల భేదంను కనుగొందాం.

$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$

అదే విధంగా $a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$

$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$

అనగా $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_3 \ldots = 3$

ఇచ్చిన ఏ రెండు వరుస సంఖ్యల భేదమైనా స్థిరంగా వుంది. అనగా ఏ సందర్భంలో నైనా దాని విలువ మూడే. అందువల్ల ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీనిలో మొదటి పదము $a = 6$ మరియు సామాన్య భేదం $d = 3$.

మరిఒక జాబితా : 6, 3, 0, – 3, . . ., ను పరిశీలిద్దాం.

ఇచ్చట $a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$

$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$

$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$

అనగా ఇది కూడా ఒక అంకశ్రేఢియే. దీనిలో మొదటి పదము $a = 6$, మరియు సామాన్య భేదం $d = -3$.

అంటే ఒక సంఖ్యల జాబితాలో రెండు వరుస సంఖ్యల భేదం స్థిరమైన అది ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. అనగా సాధారణంగా $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ఒక అంకశ్రేఢి అయిన

$d = a_{k+1} - a_k$

ఇచ్చట a_{k+1}, a_k లు వరుసగా $(k + 1)$ మరియు k పదాలు మరియు $k \geq 1$

1, 1, 2, 3, 5, ... సంఖ్యల జాబితాను పరిశీలించండి. దీనిలో రెండు వరుస పదాల మధ్య భేదం స్థిరంగా (ఒకే విధంగా) లేదు. అందువల్ల ఇది అంకశ్రేఢి కాదు.

గమనిక : అంకశ్రేఢి 6, 3, 0, – 3, . . .,లో d ని కనుగొనుటకు మనము 3 నుంచి 6ను తీసివేసినాము. అంతేకానీ 6 నుంచి 3ను కాదు. అనగా $(k + 1)$వ పదము చిన్నదైనప్పటికీ దీని నుంచే k వ పదమును తీసివేయాలి. ఇంకా ఒక అంకశ్రేఢిలో d ని కనుగొనుటకు a_2-a_1, a_3-a_2,.... లను అన్నింటిని కనుగొనవలసిన అవసరం లేదు. వానిలో ఏదైనా ఒకదాని విలువను కనుగొంటే సరిపోతుంది.

ఇవి చేయండి

1. ఏదైనా ఒక అంకశ్రేఢిని తీసుకొనుము?
2. జాబితాలోని ప్రతి పదమునకు ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యను కలుపుము ? ఫలిత సంఖ్యలను జాబితా రూపంలో రాయుము?
3. అదే విధంగా అంకశ్రేఢిలో ప్రతి పదము నుంచి ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యను తీసివేసి ఫలిత సంఖ్యలను జాబితాగా రాయుము?
4. అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమును ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించి ఫలిత సంఖ్యలను జాబితాగా రాయుము? మరియు అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమును ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యచే భాగించి ఫలిత సంఖ్యలను జాబితాగా రాయుము.

5. క్రొత్తగా ఏర్పడిన జాబితాలన్ని అంకశ్రేఢులు అవుతాయేమో పరిశీలించుము?

6. చివరగా నీ అభిప్రాయం ఏమిటి?

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-1. అంకశ్రేఢి $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ ...., లో మొదటి పదము a ను సామాన్య భేదం d లను కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a = \frac{1}{4}$ మరియు $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

ఇచ్చినది అంకశ్రేఢి అని తెలుసు కనుక d ని కనుగొనుటకు $a_2 - a_1$ ను మాత్రమే ఉపయోగించాము.

ఉదాహరణ-2. క్రింది వానిలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయితే తరువాత వచ్చే రెండు పదాలను కనుగొనుము?

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) $x, 2x, 3x, 4x$ ......

సాధన : (i) ఇచ్చుట $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతీసారి స్థిరము / సమానము.

ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్య భేదం $d = 6$.

జాబితాలో తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు : 22 + 6 = 28 మరియు 28 + 6 = 34.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతిసారి స్థిరము లేదా సమానము.

ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్య భేదం $d = -2$.

జాబితాలో తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు

$$-5 + (-2) = -7 \text{ మరియు } -7 + (-2) = -9$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

ఇచ్చుట $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ఇచ్చుట, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

ఇచ్చుట అన్ని సందర్భాలలో $a_{k+1} - a_k$ సమానము. కనుక ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. తరువాతి రెండు పదాలు : $4x + x = 5x$ మరియు $5x + x = 6x$.

అభ్యాసము - 6.1

1. ఈ క్రింది సంఘటనలలో ఏ సంఘటనలో ఏర్పడే సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢి అవుతుంది? ఎందుకు?

   (i) ఒక టాక్సీకి మొదటి గంట ప్రయాణానికి ₹ 20 చొప్పున తరువాత ప్రతి గంటకు ₹ 8 చొప్పున చెల్లించవలసి వున్న ప్రతి కిలోమీటరుకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము.

   (ii) ఒక వాక్యూమ్ పంపు సిలెండరులో వుండే గాలి నుంచి $\frac{1}{4}$ వంతు తీసివేయును. అయిన ప్రతిసారీ సిలెండరులో మిగిలి వుండే గాలి పరిమాణము.

   (iii) ఒక బావిని తవ్వడానికి మొదట మీటరుకు ₹ 150 వంతున ఆపై ప్రతి మీటరుకు ₹ 50 వంతున చెల్లించాలి. అయిన ప్రతి మీటరుకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము.

   (iv) ఒక బ్యాంకులో ₹10000 లను సంవత్సరానికి 8 శాతం చక్రవడ్డీ ప్రకారం పొదుపు చేసిన ప్రతి సంవత్సరము చివరలో ఖాతాలో వుండే సొమ్ము.

2. అంకశ్రేఢుల యొక్క మొదటి పదము a మరియు సామాన్యభేదం d విలువలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. అయిన శ్రేఢిలోని మొదటి నాలుగు పదాలను కనుగొనుము?

   (i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

   (iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

   (v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢులకు మొదటి పదమును, సామాన్య భేదంను కనుగొనుము ?

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots.$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. క్రింది జాబితాలలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయిన సామాన్య భేదం d ను, తరువాత నచ్చే మూడు పదాలను కనుగొనుము?

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots.$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots.$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots.$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots..$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots..$

6.3 అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదము

శీర్షిక 6.1లో చర్చించిన 'ఉష' విషయాన్ని మరి ఒకసారి పరిశీలిద్దాం. ఈమెను నెలకు ₹ 8000 చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ 500 చొప్పున పెంచే విధంగా వున్న ఉద్యోగంలో నియమించటం జరిగింది. అయితే ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత 5 వ సం॥ములో ఆమె జీతం ఎంత వుండవచ్చు. దీనికి సమాధానం కనుగొనాలంటే ముందు ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత రెండవ సంవత్సరములో ఆమె జీతమును కనుగొనాలి.

అది ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500.

ఇదే విధంగా 3వ, 4వ, 5వ సం॥లలో ఆమె జీతమును ముందు సంవత్సరములో వున్న జీతానికి ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

∴ 3వ సం॥లో ఆమె జీతము = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (3వ సంవత్సరము)

= ₹ 9000

4వ సం॥లో ఆమె జీతము = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

$= ₹ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹ [8000 + \mathbf{(4-1)} \times 500]$ (4వ సంవత్సరము)

$= ₹ 9500$

5వ సం॥లో ఆమె జీతము $= ₹ (9500 + 500)$

$= ₹ (8000+500+500+500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹ [8000 + \mathbf{(5-1)} \times 500]$ (5వ సంవత్సరము)

$= ₹ 10000$

పై వాని నుంచి ఒక సంఖ్యల జాబితా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చును. అది క్రింది విధంగా వుంటుంది.

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి.

పై అమరిక ఆధారంగా 6 వ, 15వ సం॥లలో ఆమె యొక్క జీతమును కనుగొనగలమా? ఆమె ఒకవేళ 25 సంవత్సరముల పాటు అదే ఉద్యోగంలో కొనసాగితే 25 వ సంవత్సరములో ఆమె జీతమును కనుగొనగలమా? ప్రతి సంవత్సరము ఆమె జీతమును ముందున్న సంవత్సరములో ఆమె జీతానికి ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు. అయితే దీనిని వీలైనంత తక్కువ సమయంలో వీలైనంత సులభంగా కనుగొనగలమా? పై ప్రక్రియలలో జీతమును కనుగొనే విధానం మనకు కొంత అవగాహన అయినది కనుక దానిని ఉపయోగిద్దాం.

15వ సంవత్సరములో జీతము = 14వ సం॥ములు జీతము + ₹ 500

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ సార్లు}} \right] + ₹500$$

$= ₹ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹ [8000 + \mathbf{(15-1)} \times 500] = ₹ 15000$

అనగా మొదటి జీతం + (15 – 1) × సంవత్సరమునకు పెరిగేది.

అదేవిధంగా 25వ సంవత్సరములో ఆమె జీతం

$₹ [8000 + \mathbf{(25-1)} \times 500] = ₹ 20000$

= మొదటి జీతం + **(25 – 1)** × సంవత్సరమునకు పెరిగేది

ఈ ఉదాహరణ ఒక అంకశ్రేఢిలో 15వ పదమును, 25వ పదమును రాయుటకు కావలసిన ఒక సులువు పద్ధతిని ఇచ్చింది. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదమును కనుగొందాం.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ అనే ఒక అంకశ్రేఢిని తీసుకుందాం.

దీనిలో మొదటి పదం $a_1 = a$ మరియు సామాన్యభేదం $= d$ అనుకుందాం.

$\therefore$ **రెండవ** పదం $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\ d$

మూడవ పదం $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\ d$

నాల్గవ పదం $a_4 = a3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\ d$

. . . .

. . . .

పై అమరిక ఆధారంగా ***n*** వ పదం $a_n = a + (n - 1)\ d$ అని చెప్పవచ్చు.

అనగా మొదటి పదం ***a***, సామాన్య భేదం ***d*** గా వుంటే అంకశ్రేఢి యొక్క ***n***వ పదము

$a_n = a + (n - 1)\ d.$

$\boldsymbol{a_n}$ ను అంకశ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదము అనికూడా అంటాం.

ఒక అంకశ్రేఢిలో *m* పదాలున్న *m*వ పదము చివరి పదం అవుతుంది. దీనిని కొన్నిసార్లు '*l*' చేత కూడా సూచిస్తారు.

అంకశ్రేఢిలో పదాలను కనుగొనుట : పై సూత్రమును ఉపయోగించి ఒక అంకశ్రేఢిలోని వివిధ పదాలను కనుగొనవచ్చు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-3. 5, 1, –3, –7 . . .అంకశ్రేఢిలో 10వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 5, d = 1 - 5 = -4$ మరియు $n = 10$.

$a_n = a + (n - 1)\ d$ నుంచి

$a_{10} = 5 + (10 - 1)(-4) = 5 - 36 = -31$

$\therefore$ అంకశ్రేఢిలో 10వ పదము = – 31.

ఉదాహరణ-4. 21, 18, 15, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము '– 81' అవుతుంది?

ఏదైనా ఒక పదము '0' అవుతుందా? నీ సమాధానమునకు కారణాలిమ్ము ?

సాధన : ఇచ్చుట $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ మరియు $a_n = -81$,

$$a_n = a + (n - 1)\ d,$$
$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$
$$-81 = 24 - 3n$$
$$-105 = -3n$$
$$\therefore\ n = 35$$

అనగా పై అంకశ్రేఢిలో 35వ పదము – 81 అవుతుంది.

తరువాత $a_n = 0$ అయ్యే విధంగా *n* ను కనుగొనాలి.

$$\Rightarrow 21 + (n - 1)(-3) = 0,$$
$$3(n - 1) = 21$$
$$n = 8$$

అనగా అంకశ్రేఢిలో 8వ పదము సున్నా అవుతుంది.

ఉదాహరణ-5. 3వ పదము 5; 7 వ పదము 9గా వుండునట్లు ఒక అంకశ్రేఢిని కనుగొనుము.

సాధన :

$$a_3 = a + (3 - 1)\,d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

$$a_7 = a + (7 - 1)\,d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

సమీకరణాలు (1) మరియు (2) ల నుంచి

$$a = 3, d = 1$$

$\therefore$ కావలసిన అంకశ్రేఢి : 3, 4, 5, 6, 7, . . .

ఉదాహరణ-6. 5, 11, 17, 23, . . . జాబితాలో 301 వుంటుందో లేదో కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చట

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

అనగా $k = 1, 2, 3,....$ లకు $(a_{k+1} - a_k)$ స్థిరము.

$\therefore$ ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఈ అంకశ్రేఢిలో $a = 5$ మరియు $d = 6$

ఇక 301 ఈ జాబితాలో వుంటుందో? వుండదో ? కనుగొనాలి. దీనిని నిర్ణయించుటకు 301 ఈ జాబితాలో nవ పదంగా వుందనుకుందాం. అనగా $a_n = 301$.

అయితే

$a_n = a + (n - 1)\,d$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

లేదా $\quad 301 = 6n - 1$

$$\therefore \quad n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

అయితే n ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య కావలెను (ఎందుకు?)

కనుక 301ఇచ్చిన జాబితాలో వుండదు.

ఉదాహరణ-7. 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

సాధన : 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యల జాబితా :

$$12, 15, 18, . . . , 99$$

ఇది ఒక అంకశ్రేఢియేనా? అవును. ఇచ్చట, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

$a_n = a + (n-1)\,d$ అని మనకు తెలుసు.

$99 = 12 + (n-1) \times 3$

$87 = (n-1) \times 3$

$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

$n = 29 + 1 = 30$

అనగా 3చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు 30 గలవు.

ఉదాహరణ-8. 10, 7, 4, . . ., – 62 అంకశ్రేఢిలో చివరి నుంచి 11వ పదమును కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

చివరి నుంచి 11వ పదమును కనుగొనవలెనన్న ముందుగా శ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలు వున్నవో కనుగొనవలెను. అయితే

$l = a + (n-1)\,d$ అని మనకు తెలుసు.

$-62 = 10 + (n-1)(-3)$

$-72 = (n-1)(-3)$

$n - 1 = 24$

$n = 25$

అనగా ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢిలో 25 పదాలు వుంటాయి.

అంటే చివరి నుంచి 11వ పదము మొదటి నుంచి 15వ పదం అవుతుంది. (14వ పదం కాదు ఎందుకు?)

$\therefore\ a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

చివరి నుంచి 11వ పదము = – 32.

గమనిక : పై శ్రేఢిలో 11వ పదము; – 62 మొదటి పదంగా, సామాన్య భేదం 3 గా గల శ్రేఢిలో 11వ పదము సమానము.

ఉదాహరణ-9. ₹ 1000 లకు సంవత్సరానికి 8% బారు వడ్డీ ప్రకారము ప్రతి సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీని కనుగొనుము? ఈ వడ్డీల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుందా? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయితే 30 వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనుము?

సాధన : బారువడ్డీని కనుగొనుటకు సూత్రము $\frac{P \times R \times T}{100}$ అని మనకు తెలుసు.

1వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = \text{Rs } 80$

2వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹160$

3వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹\,240$

ఈ విధంగా 4వ, 5వ .... సం॥ల చివర అయ్యే వడ్డీలకు కనుగొనవచ్చు. అనగా 1వ, 2వ, 3వ, . . .సం॥ల చివర అయ్యే వడ్డీల విలువ వరుసగా

$$80, 160, 240, \ldots$$

పై జాబితాలో రెండు వరుస పదాల బేధము 80 స్థిరము కనుక ఇది ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఇచ్చుట $a = 80;\ d = 80.$

అనగా 30 సం॥ల చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనవలెనన్న మనము a_{30}ని కనుగొనవలె.

$\therefore \quad a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

$\therefore$ 30 సం॥ముల చివర అయ్యే వడ్డీ = ₹ 2400.

ఉదాహరణ-10. ఒక పూలపాదులో మొదటి వరుసలో 23 గులాబీ చెట్లు రెండవ వరుసలో 21, మూడవ వరుసలో 19 ...... వున్నాయి. చివరి వరుసలో 5 చెట్లు వున్న ఎన్ని వరుసలలో గులాబీ చెట్లు కలవు?

సాధన : 1వ, 2వ, 3వ, . . ., చివరి వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య వరుసగా

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి (ఎందుకు ?).

పూలపాదులోని వరుసల సంఖ్య n అనుకొనిన

$a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

$\therefore \quad a_n = a + (n - 1)\,d$

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

$\Rightarrow \quad -18 = (n - 1)(-2)$

$\Rightarrow \quad n = 10$

$\therefore$ పూల పాదులోని వరుసల సంఖ్య = 10.

అభ్యాసము - 6.2

1. మొదటి పదము a, సామాన్య బేధము d, nవ పదము a_n అయిన క్రింది పట్టికను పూరింపుము.

S. No.	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0

(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. కనుగొనుము

   (i) 10, 7, 4 ...... అంకశ్రేఢిలో 30వ పదము.

   (ii) $-3, \frac{-1}{2}, 2,.....$ అంకశ్రేఢిలో 11వ పదము.

3. క్రింది వానిని కనుగొనుము.

   (i) $a_1 = 2;\ a_3 = 26$ అయిన a_2 ను కనుగొనుము

   (ii) $a_2 = 13;\ a_4 = 3$ అయిన a_1, a_3 లను కనుగొనుము

   (iii) $a_1 = 5; a_4 = 9\frac{1}{2}$ అయిన a_2, a_3 లను కనుగొనుము

   (iv) $a_1 = -4; a_6 = 6$ అయిన a_2, a_3, a_4, a_5 లను కనుగొనుము

   (v) $a_2 = 38;\ a_6 = -22$ అయిన a_1, a_3, a_4, a_5 లను కనుగొనుము

4. 3, 8, 13, 18, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 78 అవుతుంది?

5. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢులలోని పదాల సంఖ్యను కనుగొనుము?

   (i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$

6. 11, 8, 5, 2 . . .అంకశ్రేఢిలో '–150' ఒక పదంగా వుంటుందో లేదో పరిశీలించుము/కనుగొనుము?

7. ఒక అంకశ్రేఢిలో 11వ పదము 38 మరియు 16వ పదము 73 అయిన 31వ పదమును కనుగొనుము?

8. ఒక అంకశ్రేఢిలో 3వ, 9 వ పదాలు వరుసగా 4, – 8 అయిన ఎన్నవ పదము '0' (సున్నా) అవుతుంది?

9. ఒక అంకశ్రేఢిలో 17వ పదము 10వ పదంకంటే 7 ఎక్కువ. అయిన సామాన్య భేదం ఎంత?

10. రెండు అంకశ్రేఢుల సామాన్య భేదం సమానము. వాని 100వ పదాల మధ్య భేదం 100 అయిన వాని 1000వ పదాల మధ్య భేదం మెంత?

11. 7 చే భాగించబడే మూడంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని కలవు?

12. 10 మరియు 250 ల మధ్యగల 4 యొక్క గుణిజాల సంఖ్యను కనుగొనుము?

13. 63, 65, 67, ... మరియు 3, 10, 17, . . . అంకశ్రేఢుల nవ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనుము?

14. 3 వ పదము 16 గా ; 7వ పదము, 5వ పదము కంటే 12 ఎక్కువ వుండునట్లుగా ఒక అంకశ్రేఢిని కనుగొనుము?

15. 3, 8, 13, . . ., 253 అంకశ్రేఢి యొక్క చివర నుంచి 20వ పదమును కనుగొనుము?

16. ఒక అంకశ్రేఢిలో 4వ, మరియు 8వ పదాల మొత్తము 24 మరియు 6వ, 10వ పదాల మొత్తము 44 అయిన మొదటి మూడు పదాలను కనుగొనుము?

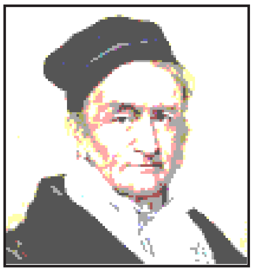
17. సుబ్బారావు 1995 వసం॥లో నెలకు ₹ 5000 జీతంతో ఉద్యోగంలో చేరాడు. అతని జీతము సం॥మునకకు ₹ 200 పెరిగిన అతని జీతము ఏ సం॥ములలో ₹ 7000 అవుతుంది?

6.4 ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి *n* పదాల మొత్తము

శీర్షిక 6.1 లో చర్చించిన హేమ విషయాన్ని మరియొక సారి పరిశీలిద్దాం. ఈమె తన కూతురు మొదటి పుట్టినరోజున ₹ 1000 లు రెండవ పుట్టిన రోజున ₹1500, మూడవ పుట్టిన రోజున ₹2000.... ఒక డబ్బులు పెట్టెలో వుంచుతూ పోయింది. అయితే ఆమె కూతురు యొక్క 21 వ పుట్టిన రోజు అనంతరము డబ్బుల పెట్టెలోని సొమ్ము మొత్తం ఎంత వుంటుంది?

ఇచ్చుట మొదటి, రెండవ, మూడవ ..... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచిన సొమ్ము విలువలు వరుసగా 1000, 1500, 2000, . . . ఇలా 21వ పుట్టిన రోజు వరకూ కొనసాగించబడింది. 21వ పుట్టిన రోజు అనంతరం పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనవలెనన్న పై జాబితాలో 21 పదాలను వరుసగా రాసి వాని మొత్తమును కనుగొనవలసి వుంటుంది. ఈ విధంగా చేయటం సమయం వృధా చేయటమే కాకుండా కష్టమైనదిగా మీరు భావించటం లేదా? దీనిని తక్కువ సమయంలో సులభంగా చేయలేమా?

6.4.1 'గాస్' పదాల మొత్తం కనుగొన్న విధానం



కార్ల్ ఫ్రెడరిక్ గాస్ (1777-1855) ప్రఖ్యాత జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు

గాస్ 10 సం॥ల వయస్సులో సాధించిన ఒక సమస్యను ఇపుడు మనము పరిశీలిద్దాం. ఇతను 10సం॥ల వయస్సులో వున్నపుడు 1 నుంచి 100 వరకూ గల అన్ని సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? అని ఇతనిని ప్రశ్నించటం జరిగింది. ఇతను దానికి సమాధానంగా 5050 అని చెప్పినాడు. అతను ఏవిధంగా సమాధానం చెప్పాడో ఊహించగలరా ?

అతను దానిని ఈ క్రింది విధంగా రాసాడు.

$$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$$

తిరిగి అతను దీనినే తిరిగి క్రింద విధంగా రాసాడు.

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

అతను ఈ రెండింటినీ కూడి సూక్ష్మీకరించి ఫలితమును ఈ క్రింది విధంగా కనుగొన్నాడు.

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \text{ (100 సార్లు)}$$

(దీనిని ఆలోచించుము మరియు సరిచూడుము)

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050, \quad \text{మొత్తము} = 5050.$$

6.4.2 అంకశ్రేఢిలో n పదాల మొత్తము

మనం కూడా $a, a+d, a+2d, \ldots$ శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు గాస్ పద్ధతినే పాటిద్దాం.

పై శ్రేఢి యొక్క nవ పదము a_n అనుకొనిన, $a_n = a+(n-1)d$

పై శ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము S_n అనుకొనిన

$$S_n = a+(a+a)+(a+2d)+\ldots+a+(n-1)d$$

$$S_n = (a+(n-1)d)+(a+(n-2)d+\ldots+a$$

కూడగా $2S_n = (2a+(n-1)d)+(2a+(n-1)d)+\ldots.+(2a+(n-1)d)$ (n సార్లు)

$$= n(2a+(n-1)d)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}\ [\text{మొదటిపదం} + n\text{వ పదం}] = \frac{n}{2}(a+\ a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \qquad [\because a_n = a+(n-1)d]$$

ఒక అంకశ్రేడిలో మొదటి పదము, చివరి పదములు మాత్రమే తెలిసి సామాన్య భేదం తెలియునపుడు

$S_n = \frac{n}{2}(a+\ a_n)$ సూత్రమును ఉపయోగించి S_nను సులభంగా కనుగొనవచ్చు.

హేమ కూతురు యొక్క సొమ్ము

తిరిగి మన ప్రశ్నకు పరిశీలిద్దాం.

హేమ కూతురు యొక్క 1వ, 2వ, 3వ, 4వ, . . ., పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా 1000, 1500, 2000, 2500, . . .,

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి. మనము హేమ కూతురు యొక్క 21వ పుట్టినరోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనాలి.

ఇచ్చుట, $a = 1000$, $d = 500$ మరియు $n = 21$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d],$$

$$S = \frac{21}{2}[2\times1000+(21-1)\times500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000+10000]$$

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

21వ పుట్టిన రోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్ము = ₹ 1,26,000.

S బదులుగా S_n ను వాడుదాం. దీనివల్ల ఎన్ని పదాల మొత్తం మనం కనుగొంటున్నామో తెలుస్తుంది. మొదటి 20 పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు మనం S_{20} ని వాడతాం. మనం అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రములో నాలుగు రాశులు కలవు. అవి S_n, a, d మరియు n. వీనిలో ఏవైనా మూడు రాశుల విలువలు తెలిపిన నాల్గవ రాశిని కనుగొనగలం.

గమనిక : ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తం నుంచి మొదటి $(n-1)$ పదాల మొత్తాన్ని తీసివేసిన ఆశ్రేఢి యొక్క nవ పదము వస్తుంది. అనగా $a_n = S_n - S_{n-1}$.

ఇవి చేయండి

క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి అంకశ్రేఢిలో పేర్కొన్న పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) 16, 11, 6 .....; 23 పదాలు

(ii) $-0.5, -1.0, -1.5, ...$; 10 పదాలు

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2} .....$, 10 పదాలు

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-11. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం 10 మరియు మొదటి 14 పదాల మొత్తము 1050 అయిన 20వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట $S_n = 1050; n = 14, a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a + 13d] = 140 + 91d$$

$$910 = 91\,d$$

$$\therefore\ d = 10$$

$$\therefore\ a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$$

ఉదాహరణ-12. 24, 21, 18, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలను తీసుకున్న వాని మొత్తం 78 అవుతుంది?

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. n యొక్క విలువను కనుగొనాలి.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ అని మనకు తెలుసు

$$78 = \frac{n}{2}[48 + (n - 1(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n-4)(n-13) = 0$$

$$\therefore \quad n = 4 \text{ or } 13$$

n యొక్క రెండు విలువలను పరిగణలోనికి తీసుకోవచ్చు. అనగా పదాల సంఖ్య = 4 లేదా 13.

గమనించిన అంశాలు

1. ఇచ్చట 4 పదాల మొత్తము = 13 పదాల మొత్తము = 78.

2. ఈ శ్రేఢిలో 5వ పదం నుంచి 13వ పదం వరకూ గల పదాల మొత్తం సున్నా (0). ఎందుకనగా ఇచ్చట సామాన్యభేధము యొక్క విలువ ఋణాత్మకము. దీనివల్ల కొన్ని పదాలు ధనాత్మకము, మరికొన్ని పదాలు ఋణాత్మకం అవుతూ ఫలితం శూన్యం కావచ్చు.

ఉదాహరణ-13. క్రింది వాని మొత్తాలను కనుగొనుము.

(i) మొదటి 1000 ధనపూర్ణ సంఖ్యలు (ii) మొదటి n ధన పూర్ణసంఖ్యలు

సాధన :

(i) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ అనుకొనుము.

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ను ఉపయోగించిన

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

మొదటి 1000 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం = 500500.

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ అనుకొనుము.

ఇచ్చట $a = 1$ మరియు చివరి పదము $l = n$.

$$\therefore\ S_n = \frac{n(1+n)}{2} \quad (\text{లేదా}) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

అనగా మొదటి n ధన పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం $\boldsymbol{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

ఉదాహరణ-14. $a_n = 3 + 2n$ ను n వ పదంగా కలిగిన శ్రేఢి యొక్క మొదటి 24 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుము?

సాధన :

$a_n = 3 + 2n,$

$a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

⋮

సంఖ్యల జాబితా : 5, 7, 9, 11, . . .

ఇచ్చుట, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ....

అనగా ఈ జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి. దీని మొదటి పదం $a = 5$, సామాన్య బేధము $d = 2$.

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12(10+46) = 672$$

ఇచ్చిన శ్రేఢిలో 24 పదాల మొత్తము = 672.

ఉదాహరణ-15. ఒక టెలివిజన్ తయారీ కంపెనీ 3వ సం॥లో 600 టెలివిజన్లను 7వ సం॥ము 700 సెట్లను తయారు చేసింది. ఇది తయారీ చేసే టెలివజన్ల సంఖ్య ప్రతీ సం॥ము స్థిరంగా పెరుగుతూ వుంటే

(i) 1వ సం॥లలో అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ల్ సంఖ్య

(ii) 10వ సం॥వ అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ సంఖ్య

(iii) మొదటి 7 సం॥ సంవత్సరాలలో అది తయారు చేసిన మొత్తం సెట్ల సంఖ్యను కనుగొనుము?

సాధన : (i) ప్రతి సంవత్సరము తయారుచేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య ఒక స్థిర విలువతో పెరుగుతూ వుంటే 1వ, 2వ, 3వ, . . ., సం॥లలో తయారయ్యే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది.

n వ సం॥లో తయారుచేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యను a_n అనుకొనిన

$a_3 = 600$ మరియు $a_7 = 700$ గా ఇవ్వబడినది.

$\Rightarrow$ $a + 2d = 600$

మరియు $a + 6d = 700$

పై సమీకరణాలను సాధించిన $d = 25$ మరియు $a = 550$ వచ్చును.

$\therefore$ మొదటి సం॥లో తయారైన టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య = 550.

(ii) $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

అనగా 10 వ సం॥లో తయారుచేసిన టెలివిజన్ల్ సంఖ్య = 775.

(iii)
$$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$
$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

మొదటి 7 సం॥లలో తయారైన మొత్తం టెలివిజన్ల్ సంఖ్య = 4375.

అభ్యాసము - 6.3

1. క్రింది అంకశ్రేఢులలో పేర్కొన్న పదాల మొత్తాలను కనుగొనుము?

   (i) 2, 7, 12, . . ., 10 పదాలు. (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 పదాలు.

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 పదాలు. (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, ..., పదాలు.

2. క్రింది వాని మొత్తాలను కనుగొనుము?

   (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$ (ii) 34 + 32 + 30 + . . . + 10

   (iii) –5 + (–8) + (–11) + . . . + (–230)

3. ఒక అంకశ్రేఢిలో

   (i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ అయిన n మరియు S_n లను కనుగొనుము ?
   (ii) $a = 7, a_{13} = 35$ అయిన d ని మరియు S_{13} ను కనుగొనుము?
   (iii) $a_{12} = 37, d = 3$ అయిన a ను మరియు S_{12} ను కనుగొనుము?
   (iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$ అయిన d మరియు a_{10} ను కనుగొనుము?
   (v) $a = 2, d = 8, S_n = 90$ అయిన n మరియు a_n ను కనుగొనుము?
   (vi) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$ అయిన n మరియు a ను కనుగొనుము ?
   (vii) $l = 28, S = 144$ మరియు పదాల సంఖ్య 9 అయిన a కనుగొనుము ?

4. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి చివరి పదాలు వరుసగా 17 మరియు 350. సామాన్య భేదం 9 అయిన శ్రేఢిలోని పదాల సంఖ్యను, పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

5. ఒక అంకశ్రేఢిలో 2వ, 3వ పదాలు వరుసగా 14 మరియు 18 అయిన 51 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

6. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి 7 పదాల మొత్తము 49 మరియు 17 పదాల మొత్తము 289 అయిన మొదటి n పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

7. a_n క్రింది విధంగా నిర్వచించబడితే $a_1, a_2, . . ., a_n$, అంకశ్రేఢి అవుతుందని చూపండి. మరియు మొదటి 15 పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.

   (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

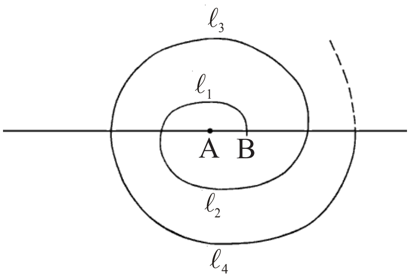
8. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $4n - n^2$ అయిన మొదటి పదం ఎంత? (S_1విలువే మొదటి పదము అవుతుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి) మొదటి రెండు పదాల మొత్తం ఎంత ? రెండవ పదము ఎంత? అదేవిధంగా 3వ పదమును, 10వ పదమును మరియు nవ పదమును కనుగొనుము?

9. 6 చే భాగించబడే మొదటి 40 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము?

10. ఒక పాఠశాలలో విద్యావిషయక సంబంధిత విషయాలలో అత్యున్నత ప్రతిభ కనపరిచిన వారికి మొత్తం 700 రూపాయలకు 7 బహుమతులు ఇవ్వాలని భావించారు. ప్రతి బహుమతి విలువ దాని ముందున్న దానికి ₹ 20 తక్కువ అయిన ప్రతి బహుమతి విలువను కనుగొనుము?

11. ఒక పాఠశాల ఆవరణలో పర్యావరణ పరిరక్షణకు విద్యార్థులు చెట్లు నాటాలని భావించారు. ప్రతి సెక్షను విద్యార్థులు వారు చదువుతున్న తరగతి సంఖ్యకు సమానమైన చెట్లను అనగా 1వ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షన్ విద్యార్థులు 1 చెట్టును, రెండవ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షన్ విద్యార్థులు 2చెట్లను నాటాలని ఈ విధంగా 12వ తరగతి వరకూ చేయాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ప్రతి తరగతిలో మూడు సెక్షన్లు వున్న మొత్తం నాటిన చెట్లు ఎన్ని?

12. అర్ధ వృత్తాలచే ఒక సర్పిలాకారము తయారుచేయబడింది. పటంలో చూపిన విధంగా అర్ధవృత్తాల కేంద్రాలు A వద్ద ప్రారంభించబడి A, B ల మధ్య మారుతూ వున్నాయి. అనగా మొదటి అర్ధవృత్త కేంద్రము A, రెండవ అర్ధవృత్త కేంద్రము B మూడవ అర్ధవృత్త కేంద్రము A ...... మరియు అర్ధవృత్తాల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 0.5 సెం.మీ, 1.0 సెం.మీ, 1.5 సెం.మీ, 2.0 సెం.మీ, . . . ఈ విధంగా మొత్తం 13 అర్ధవృత్తాలు వున్న సర్పిలం మొత్తం పొడవు ఎంత? ($\pi = \frac{22}{7}$)



[**సూచన :** వరుస అర్ధవృత్తాల పొడవులు $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ మరియు వీని కేంద్రాలు వరుసగా A, B, A, B, ...]

13. 200 చెక్క మొద్దులను క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చారు. అన్నింటి కంటే క్రింద వున్న వరుసలో 20 చెక్క మొద్దులను, దానిపై 19 మొద్దులను, దానిపైన 18 మొద్దులను ..... అమర్చిన మొత్తం 200 మొద్దులను అమర్చుటకు ఎన్ని వరుసలు కావాలి? అన్నింటికంటే పైన వున్న వరుసలో ఎన్ని చెక్క మొద్దులు కలవు ?

14. బంతి మరియు బకెట్ ఆటలో, ప్రారంభంలో ఒక బకెట్ దానికి 5మీ. దూరంలో ఒక బంతి వుంచబడినవి. మొత్తం 10 బంతులలో మిగిలిన బంతులు ఒకదానికొకటి 3మీ. దూరంలో పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చబడినవి. ఆటలో పాల్గొనే వ్యక్తి మొదట బకెట్ వద్ద నుంచి బయలుదేరి మొదటి బంతివద్దకు పోయి

దానిని తీసుకొని వెనుకకు వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. తరువాత తిరిగి బకెట్ నుంచి బయలుదేరి రెండవ బంతి వద్దకు పోయి దానిని తీసుకొని వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. ఈ విధంగా అన్ని బంతులను బకెట్‌లో వేయవలెనన్న ఆ వ్యక్తి పరిగెత్తవలసిన మొత్తం దూరం ఎంత?

[**సూచన :** మొదటి, రెండవ బంతులను తీసుకొని రావడానికి ఆట ఆడే వ్యక్తి పరిగెత్తవలసి దూరము వరుసగా $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

6.5 గుణశ్రేఢులు

క్రింది జాబితాలను పరిశీలించండి.

(i) 30, 90, 270, 810 ..... (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$.....

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

పై ప్రతి జాబితాలో తరువాత వచ్చే పదమును రాయగలమా?

(i)లో ప్రతి పదమును (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందువున్న పదమును 3చే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు.

(ii) లో ప్రతిపదమును(మొదటి పదం తప్ప)దాని ముందువున్న పదమును $\frac{1}{4}$ చే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు.

(iii) ప్రతి పదమును (మొదటి పదం తప్ప)దాని ముందున్న పదమును 0.8చే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు.

పై ప్రతి జాబితాలో ప్రతి పదమును (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమును ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించటం వల్ల పొందగలుగుతున్నాము. ఇలాంటి సంఖ్యల జాబితాను గుణశ్రేఢి అంటాము. ఆ స్థిర సంఖ్యను సామాన్య నిష్పత్తి 'r' అంటాము. అనగా పైన ఉదహరించిన (i), (ii), (iii) లలో సామాన్య నిష్పత్తి వరుసగా $3, \frac{1}{4}, 0.8$.

గుణశ్రేఢిలోని మొదటి పదమును a చేత, సామాన్య నిష్పత్తిని 'r' చేత సూచిస్తే రెండవ పదమును పొందవలెనన్న మొదటి పదము a ను సామాన్యనిష్పత్తి r చేత గుణించవలెను.

$\therefore$ రెండవ పదము = ar

అదే విధంగా మూడవ పదము = $ar \cdot r = ar^2$

a, ar, ar^2 ..... ను గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపము అంటాం.

పై గుణశ్రేఢిలో ఏదైనా ఒక పదము, దాని ముందున్న పదానికి గల నిష్పత్తి 'r'.

అనగా $\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \ldots\ldots\ldots = r$

ఒకవేళ ఒక గుణశ్రేఢిలోని మొదటి పదమును a_1 చేత, రెండవ పదమును a_2 చేత ..... nవ పదమును a_n చేత సూచిస్తే

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

$\therefore$ $a_1, a_2, a_3 \ldots. a_n \ldots$ ఒక గుణశ్రేఢి కావలెనన్న ప్రతి పదము శూన్యేతరము అవుతూ

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ కావలెను.

ఇచ్చట n ఏదైనా ఒక సహజసంఖ్య మరియు $n \geq 2$.

ఇవి చేయండి.

క్రింది వానిలో గుణశ్రేఢులు కానివేవో కనుగొనుము?

1. 6, 12, 24, 48, ...
2. 1, 4, 9, 16, ...
3. 1, −1, 1, −1, ...
4. −4, −20, −100, −500, ...

గుణశ్రేఢులకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు :

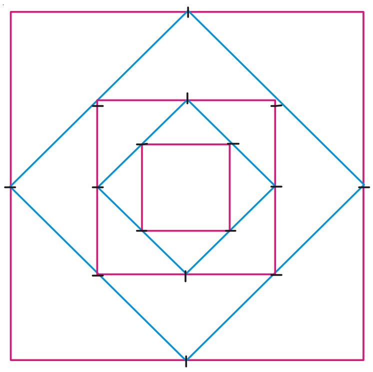
(i) ఒక వ్యక్తి తన నలుగురు మిత్రులకు విడివిగా ఉత్తరాలు రాసి, వారిని కూడా ప్రతి ఒక్కరు మరి నలుగురు వేరు వేరు వ్యక్తులకు ఇదే ఉత్తరాన్ని రాసి పంపించమని కోరాడు. ఈ గొలుసు ఇదేవిధంగా కొనసాగించబడితే మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ, ... స్థాయిలోని ఉత్తరాల సంఖ్య వరుసగా

1, 4, 16, 256 ....

(ii) ₹ 500 లను సంవత్సరమునకు 10 శాతం చక్రవడ్డీ ప్రకారం ఒక బ్యాంక్‌లో పొదుపు చేసిన మొదటి, రెండవ, మూడవ .... సం॥ల చివర దాని మొత్తం విలువలు వరుసగా

550, 605, 665.5 ......

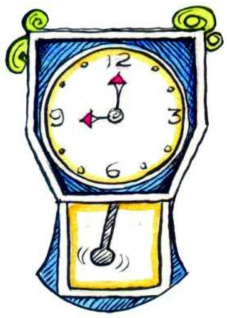
(iii) పటంలో చూపిన విధంగా మొదటి చతురస్రం యొక్క భుజాల మధ్య బిందువులను కలపటం వల్ల రెండవ చతురస్రము యొక్క భుజాల మధ్యబిందువులను కలపటం వల్ల మూడవ చతురస్రము ఏర్పడినవి. ఇదే విధానమును అనంతముగా కొనసాగించబడింది. మొదటి చతురస్రభుజము 16 సెం.మీ. అయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ ..... చతురస్రాల వైశాల్యాలు వరుసగా



256, 128, 64, 32, ...

(iv) ఒక గడియారం యొక్క లోలకం మొదటి డోలనంలో చేసిన వక్రం/చాపం పొడవు 18 సెం.మీ. తరువాత ప్రతి డోలనంలో ఏర్పడే చాపం పొడవు దాని ముందు డోలనంలో ఏర్పడ్డ చాపం పొడవులో 0.9 వ వంతు వుండును. అయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ .... డోలనాలలో ఏర్పడు చాపాల పొడవులు వరుసగా

18, 16.2, 14.58, 13.122......



ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పైన చర్చించిన ప్రతి జాబితా ఎందుకు గుణశ్రేఢి అవుతుందో వివరించుము?
2. ఒక గుణశ్రేఢిని నిర్ణయించుటకు కావలసిన అంశాలేమిటి?

ఇప్పుడు మొదటి పదము a, సామాన్య నిష్పత్తి r, తెలిసినపుడు ఒక గుణశ్రేఢిని ఎలా నిర్మించాలో మరియు ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా గుణశ్రేఢి అవుతుందో లేదో ఎలా నిర్ణయిస్తామో చూద్దాం.

ఉదాహరణ-16. మొదటి పదము $a = 3$, సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$ అయిన గుణశ్రేఢిని రాయుము ?

సాధన : మొదటి పదం 'a' కనుక దానిని సులభంగా రాయవచ్చు.

తరువాత గుణశ్రేఢిలో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదమును, సామాన్య నిష్పత్తిచే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు. అనగా రెండవ పదము కావలెనన్న మనము మొదటి పదము $a = 3$ ను సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$ చే గుణించవలెను.

$\therefore$ రెండవ పదము $= ar = 3 \times 2 = 6$

అదే విధంగా మూడవ పదము = రెండవ పదము × సామాన్యనిష్పత్తి

$= 6 \times 2 = 12$

ఇదే విధానాన్ని కొనసాగిస్తే ఏర్పడే గుణశ్రేఢి :

$3, 6, 12, 24, \ldots\ldots$.

ఉదాహరణ-17. $a = 256$, $r = \dfrac{-1}{2}$ అయిన గుణశ్రేఢిని రాయుము ?

సాధన : గుణశ్రేఢి సాధారణ రూపము $= a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), 256\left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32 \ldots\ldots$$

ఉదాహరణ-18. గుణశ్రేఢి $25, -5, 1, \dfrac{-1}{5}$ యొక్క సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

సాధన : ఒక గుణశ్రేఢిలో మొదటి, రెండవ, మూడవ .... పదాలు వరుసగా a_1, a_2, a_3 .... అయిన సామాన్య నిష్పత్తి $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots$

ఇచ్చుట $a_1 = 25$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$ కనుక.

సామాన్య నిష్పత్తి $r = \dfrac{-5}{25} = \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-1}{5}$.

ఉదాహరణ-19. క్రింది జాబితాలలో ఏవి గుణశ్రేఢులు అవుతాయి ?

(i) $3, 6, 12, \ldots\ldots$ (ii) $64, -32, 16,$

(iii) $\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{8}, \ldots\ldots$

సాధన : (i) $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ ..... లు గుణశ్రేఢి కావలెనన్న పదాలన్ని సున్నాలు కాకూడదు మరియు

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

ఇచ్చుట అన్నీ సున్నా కానీ పదాలే. ఇంకా

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

మరియు $\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$$

అనగా ఇవ్వబడిన జాబితా ఒక గుణశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది. దీని సామాన్యనిష్పత్తి = 2.

(ii) అన్ని పదాలు సున్నా కానీ పదాలే, మరియు

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$$

మరియు $\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$$

అనగా ఇవ్వబడిన జాబితా ఒక గుణశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది. దీని సామాన్య నిష్పత్తి = $\frac{-1}{2}$.

(iii) అన్ని పదాలు సున్నా కాని పదాలే. మరియు

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

ఇచ్చుట $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

అనగా ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జాబితా గుణశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

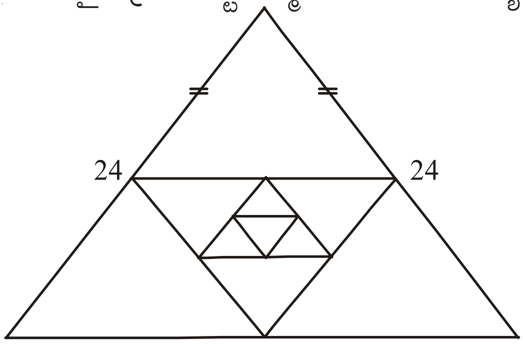
అభ్యాసము - 6.4

1. ఈ క్రింది సంఘటనలలో ఏర్పడే సంఖ్యల జాబితాలలో ఏవి గుణశ్రేఢులను ఏర్పరుస్తాయి?

(i) షర్మిల యొక్క మొదటి సం॥ము జీతము 5,00,000/- ఆ తరువాత ప్రతి సం॥ము ముందున్న సం॥ము యొక్క జీతములో 10% పెరుగుతుంది.

(ii) 30 మెట్లు వున్న ఒక మెట్ల వంతెనలో అన్నింటి కంటే క్రింద వున్న మెట్టు నిర్మాణానికి 100 ఇటుకలు అవసరం. ఆ పై ప్రతి పైమెట్టు నిర్మాణానికి దాని క్రింద మెట్టు నిర్మాణానికి కావలసిన వాని కంటే 2 ఇటుకల తక్కువ అవసరమైన ప్రతి మెట్టు నిర్మాణానికి అవసరమయ్యే ఇటుకల సంఖ్యల జాబితా.

(iii) 24 సెం.మీ భుజం పొడవుగల ఒక సమబాహు త్రిభుజము, యొక్క భుజాల మధ్య బిందువులను కలపటం వల్ల రెండవ త్రిభుజము, దాని భుజాల మధ్య బిందువులను కలపటం వల్ల మూడవ త్రిభుజమేర్పడును. ఈ విధానాన్ని అనంతంగా కొనసాగిస్తే మొదటి, రెండవ, మూడవ .... త్రిభుజాల చుట్టుకొలతలు.



2. గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము a, సామాన్యనిష్పత్తి r లు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన మొదటి మూడు పదాలను రాయుము?

(i) $a = 4 \quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5} \quad r = \frac{1}{5}$

(iii) $a = 81 \quad r = \frac{-1}{3}$ (iv) $a = \frac{1}{64} \quad r = 2$

3. క్రింది వానిలో ఏవి గుణశ్రేఢులు? గుణశ్రేఢి అయితే తరువాత వచ్చే మూడు పదాలను రాయుము?

(i) 4, 8, 16 ..... (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}$.....

(iii) 5, 55, 555, ... (iv) −2, −6, −18 .....

(v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$..... (vi) $3, -3^2, 3^3$, ...

(vii) $x, 1, \frac{1}{x}$,..... (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}$.....

(ix) 0.4, 0.04, 0.004, ...

4. $x, x + 2, x + 6$ లు ఒక గుణశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదాలైన x విలువను కనుగొనుము ?

6.6 గుణశ్రేఢి యొక్క n వ పదము

ఒక సమస్యను పరిశీలిద్దాం. ప్రతి గంటకు 3 రెట్లు అయ్యే ఒక బ్యాక్టీరియా కల్చర్‌లో మొదటి గంటలో 30 బ్యాక్టీరియాలు వున్న 4వ గంట సమయంలో వుండే బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య ఎంత ?

దీనికి సమాధానం కొరకు మొదట రెండవ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్యను కొనుగొందాం.

ప్రతి గంటకు 3 రెట్లు అవుతుంది కనుక

రెండవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య $= 3 \times$ మొదటి గంటలోని బ్యాక్టీరియా సంఖ్య

$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$

$= 30 \times 3^{(2-1)}$

$= 90$

మూడవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య $= 3 \times$ రెండవ గంటలోని బ్యాక్టీరియా సంఖ్య

$= 3 \times 90 \qquad = 30 \times (3\times3)$

$= 30 \times 3^2 \qquad = 30 \times 3^{(3-1)}$

$= 270$

నాల్గవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య $= 3 \times$ మూడవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య

$= 3 \times 270 \qquad = 30 \times (3\times3\times3)$

$= 30 \times 3^3 \qquad = 30 \times 3^{(4-1)}$

$= 810$

ఇచ్చట మనం ఒక సంఖ్యల జాబితాను పొందటం గమనించగలం. అది

30, 90, 270, 810, ...

పై జాబితా ఒక గుణశ్రేఢి (ఎందుకు ?)

పై అమరిక నుంచి 20 గంటల సమయములో వుండే బ్యాక్టీరియా సంఖ్యను కనుగొనగలవా ?

పై విధానాన్ని అనుసరించి లేదా పై అమరిక ఆధారంగా సులభంగా మనం 20 గం॥ల సమయంలో వుండే బ్యాక్టీరియా సంఖ్యను క్రింది విధంగా కనుగొనగలం.

$$= 30 \times \underbrace{(3 \times 3 \times \ldots \times 3)}_{19 \text{ సార్లు}}$$

$$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$$

ఈ ఉదాహరణ నుంచి మనం సులభంగా 25వ పదమును, 35వ పదమును ఇంకా n వ పదమును కూడా కనుగొనలం.

a_1, a_2, a_3 ..... ఒక గుణశ్రేఢి మరియు దీని సామాన్య నిష్పత్తిని r అనుకుందాం.

రెండవ పదం $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

మూడవ పదం $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

నాల్గవ పదం $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

....

....

పై అమరిక నుంచి n వ పదము $a_n = ar^{n-1}$ అని నిర్ధారించగలము.

అనగా మొదటి పదము a, సామాన్య నిష్పత్తి r గా గల ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క nవ పదము $a_n = ar^{n-1}$.

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-20. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$....... గుణశ్రేఢి యొక్క 20వ పదమును మరియు nవ పదమును కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a = \frac{5}{2}$ మరియు $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{10}}$$

మరియు $$a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$$

ఉదాహరణ-21. 2, $2\sqrt{2}$, 4 ..... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 128 అవుతుంది?

సాధన : ఇచ్చుట $a = 2 \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

nవ పదము = 128 అనుకొనిన

$$a_n = ar^{n-1} = 128$$

$$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$$

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$$

$$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \qquad n = 13.$$

అనగా 13వ పదము 128 అవుతుంది.

ఉదాహరణ-22. ఒక గుణశ్రేఢిలో 3వ పదము 24 మరియు 65 వ పదము 192 అయిన 10వ పదమును కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a_3 = ar^2 = 24$ ...(1)

$a_6 = ar^5 = 195$ ...(2)

(2) ను (1) భాగించగా $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{195}{24}$

$$\Rightarrow \qquad r^3 = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow \qquad r = 2$$

r విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా $a = 6$.

$\therefore\ a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072.$

అభ్యాసము -6.5

1. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతిగుణశ్రేఢికి సామాన్యనిష్పత్తిని, n వ పదమును కనుగొనుము ?

   (i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$......... (ii) 2, −6, 18, −54

   (iii) −1, −3, −9, −18 .... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}$.........

2. 5, 25, 125, ... అనే గుణశ్రేఢి యొక్క 10వ, nవ పదాలను కనుగొనుము ?

3. క్రింది గుణశ్రేఢిలలో పేర్కొన్న పదాలను కనుగొనుము?

   (i) $a_1 = 9;\ r = \frac{1}{3};$ అయిన a_7 (ii) $a_1 = -12;\ r = \frac{1}{3};$ అయిన a_6

4. (i) 2, 8, 32, ... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 512 అవుతుంది ?

   (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ ...... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 729 అవుతుంది ?

   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$..... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము $\frac{1}{2187}$ అవుతుంది ?

5. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క 8వ పదము 192 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 2 అయిన 12వ పదమును కనుగొనుము?

6. ఒక గుణశ్రేఢిలో నాల్గవ పదము $\frac{2}{3}$ మరియు 7వ పదము $\frac{16}{81}$ అయిన ఆ శ్రేఢిని కనగొనుము ?

7. 162, 54, 18 ..... గుణశ్రేఢి మరియు $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}$.... గుణశ్రేఢుల n వ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనుము ?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[ఇది పరీక్ష కొరకు ఉద్దేశించినది కాదు]

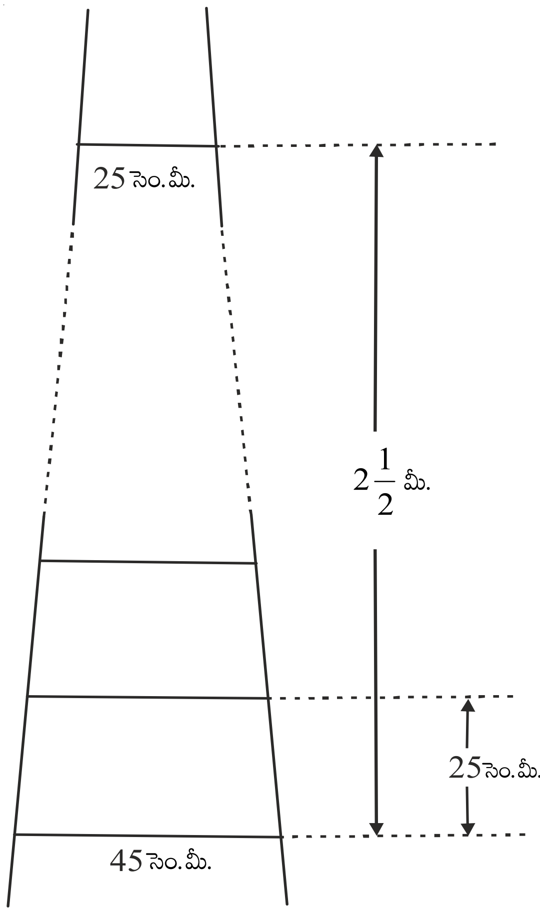
1. 121, 117, 113, . . ., అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము మొదటి ఋణపదము అవుతుంది.

[**సూచన :** $a_n < 0$ అయ్యే విధంగా n విలువ కనుగొనుము]

2. ఒక అంకశ్రేఢిలో 3వ, 7వ పదాల మొత్తము 6 మరియు వాని లబ్ధము 8 అయిన మొదటి 16 పదాల మొత్తము కనుగొనుము ?

3. ఒక నిచ్చెనకు 25 మెట్లు కలవు. మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింద నుంచి పైకి ఏకరీతిన తగ్గుతూ వుంచి, క్రింద నుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 45 సెం.మీ. మరియు పైనుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 25 సెం.మీ. ఈ రెండింటి మధ్య దూరము $2\frac{1}{2}$ మీ. అయిన అన్ని మెట్ల తయారీకి కావలసిన చెక్క పొడవు ఎంత?)

[**సూచన :** మెట్ల సంఖ్య = $\frac{250}{25}+1$]

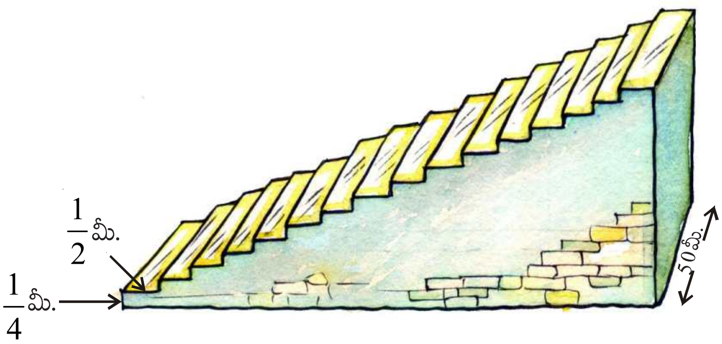


4. కొన్ని ఇండ్లు ఒక వరుసలో కలవు. దీనికి 1 నుంచి 49 వరకూ సంఖ్యలను కేటాయించటం జరిగింది. ఏదైనా ఒక ఇంటికి కేటాయించిన సంఖ్యను x అనుకొంటే; ఈ ఇంటికి ముందు (Preceeding) వున్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము, తరువాత వున్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము సమానం అయ్యే విధంగా ఆ ఇంటి సంఖ్య x వ్యవస్థితమని చూపండి? మరియు x విలువను కనుగొనుము.

[**సూచన :** $S_{n-1} = S_{49} - S_n$]

5. క్రింది పటములు చూపిన విధంగా ఒక ఫుట్‌బాల్ గ్రౌండ్‌లో 15 మెట్లు గల ఒక మెట్ల సోపానము కలదు. దీనిలో ప్రతి మెట్టు పొడవు 50 మీ. మరియు వెడల్పు $\frac{1}{2}$ మీ. మొదటి మెట్టు భూమి నుంచి $\frac{1}{4}$ మీ. ఎత్తులో మరియు ప్రతి మెట్టు దాని ముందున్న మెట్టుకు $\frac{1}{4}$ మీ. ఎత్తులో వున్న ఆ మెట్ల సోపానాన్ని నిర్మించడానికి కావలసిన కాంక్రీట్ యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము ?

[**సూచన :** మొదటి సోపానం నిర్మించుటకకు కావల్సిన కాంక్రీటు ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 50$ మీ.^{3}]



6. ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు 150 మంది కూలీలను నియమించారు. అయితే రెండవ రోజు వారితో 4 గురు పనిలోకి రావటం మానుకున్నారు. మూడవ రోజు మరి నలుగురు మానుకున్నారు. ప్రతిరోజూ ఈ విధంగా జరగటం వల్ల ఆ పని పూర్తి కావడానికి అనుకున్న రోజుల కంటే 8 రోజులు ఎక్కువ అవసరం అయ్యింది. అయిన ఆ పని పూర్తి కావడానికి పట్టిన మొత్తం రోజు ఎన్ని ?

[సూచన : ప్రారంభంలో పని పూర్తి కావడానికి అవసరమయ్యే రోజుల సంఖ్యను 'x' అనుకొంటే

$$150x = \frac{x+8}{2}[2\times150+(x+8-1)(-4)]$$

[జవాబు: $x = 17 \Rightarrow x + 8 = 17 + 8 = 25$]

7. ఒక యంత్రము వెల Rs. 5,00,000/-. మొదటి సంవత్సరము దీని వెలలో తగ్గుదల 15%, రెండవ సంవత్సరము $13\frac{1}{2}$%, మూడవ సం॥ము 12%.... ఈ విధానము కొనసాగించబడిన 10 సంవత్సరముల అనంతరము దాని వెల ఎంత? ఇవ్వబడిన శాతాలన్నీ ప్రారంభవెల పైననే పేర్కొనడం జరిగింది.

[సూచన : మొత్తం తగ్గుదల = 15 + $13\frac{1}{2}$ +12+....10 పదాలు

$$S_n = \frac{10}{2}[30-13.5] = 82.5\%$$

$\therefore$ 10 సం॥ అనంతరము దాని వెల =100 – 82.5 = 17.5 (అనగా 5,00,000 లో 17.5%)

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయంలో మనము చర్చించిన అంశాలు

1. ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదాలు అనన్ని వాని ముందున్న పదాలకు ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల ఏర్పడుతూ వుండే ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటారు. కలిపే స్థిర సంఖ్యను సామాన్యభేధము అంటారు.

   AP లో పదాలు వరుసగా $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ సంఖ్యల జాబితాలో $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, విలువలు సమానమైన అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ స్థిరమైన ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము.

3. మొదటి పదము a గా, పదాంతరము d గా గల ఒక అంకశ్రేఢిలో n వ పదము $a_n = a + (n - 1) d$.

4. అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము

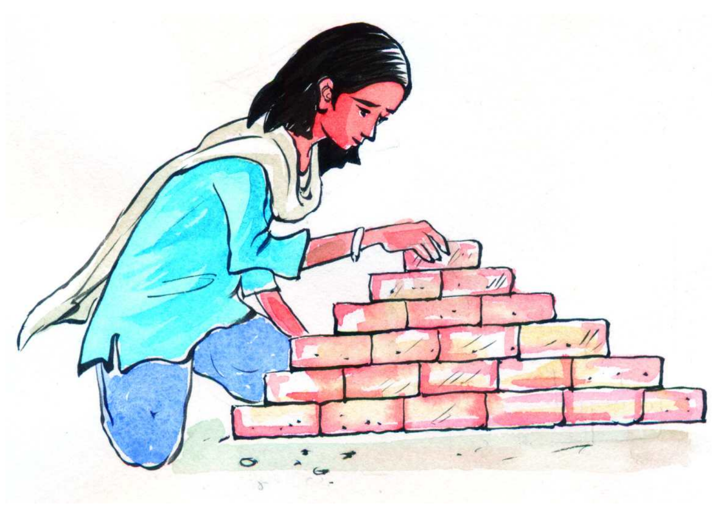
   $$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. ఒక అంకశ్రేఢిలో చివరి పదాల మొత్తము l అయిన పదాల మొత్తము

   $S = \frac{n}{2}(a + l)$. ఇచ్చ n పదాల సంఖ్య.

6. ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదాలు అన్నీ వాని ముందున్న పదాలను ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించటం వల్ల ఏర్పడుతూ వుంటే ఆ జాబితాను గుణశ్రేఢి అంటారు. ఆ స్థిర సంఖ్యను సామాన్య నిష్పత్తి అంటారు.

7. మొదటి పదము a, సామాన్య నిష్పత్తి r గా గల గుణశ్రేఢిలో nవ పదము $a_n = ar^{n-1}$.



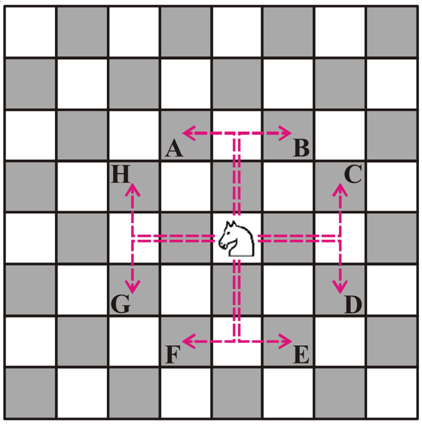
అధ్యాయము

7 నిరూపక రేఖాగణితం

(Coordinate Geometry)

7.1 పరిచయం

మీకు చదరంగం గురించి తెలుసు కదా! అందులో గుఱ్ఱం 'L' ఆకారంలో (రెండు సోపానాలు ముందుకు ఒక సోపానం ప్రక్కకు జరుగుతుంది) కదులుతుంది. పటం చూడండి. ఇంకా ఈ గుఱ్ఱం మిగతా పావులమీది నుండి దుమికి పోతుంది కూడా. అదేవిధంగా ఒంటె ఎన్ని సోపానాల వరకు వీలయితే అంతవరకు కర్ణాల వెంబడి కదులుతుంది.



చదరంగంలో మిగిలిన పావులు ఎలా కదులుతాయో తెలుసుకోండి. అదేవిధంగా గుఱ్ఱం, ఒంటె మరియు మిగిలిన పావుల స్థానాలను చదరంగం బోర్డుపై గుర్తించి అవి ఎలా కదులుతాయో గమనించండి.

i. గుఱ్ఱం యొక్క స్థానం మూలబిందువు (0, 0) వద్ద ఉన్నదను కొందాం. దాని యొక్క కదలిక నాలుగు వైపులా ఎలా ఉందో పటంలో చుక్కల గీతలతో చూపబడినది. గుఱ్ఱం యొక్క వివిధ కదలికల తర్వాత దాని స్థానాలను పరిశీలించి, ఆస్థానాల నిరూపకాలను కనుగొనండి.

ఇవి చేయండి

i. ప్రక్క పటం నుండి A, B, C, D, E, F, G, H బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనండి.

ii. 8 కదలికల తర్వాత గుఱ్ఱం కదిలిన దూరం కనుగొనండి.
అనగా మూలబిందువు (0, 0) నుండి A, B, C, D, E, F, G, H బిందువుల మధ్య దూరంను కనుగొనండి.

iii. బిందువులు H మరియు C ల మధ్య దూరమెంత? అలాగే బిందువులు A మరియు B ల మధ్య దూరమెంత ?

7.2 రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

బిందువులు A(2, 0) మరియు B(6, 0) X-అక్షంపై (పటంలో చూపినట్లుగా) ఉన్నట్లయితే బిందువులు A మరియు B మధ్యదూరం 4 యూనిట్లు అని పటం ద్వారా సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు.

ఏవైనా రెండు బిందువులు X-అక్షంపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువులలోని x-నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం ఆ బిందువుల మధ్యదూరాన్ని తెలుపుతుంది.

బిందువుల A(–2, 0) మరియు B(–6, 0) మధ్యదూరమెంత?

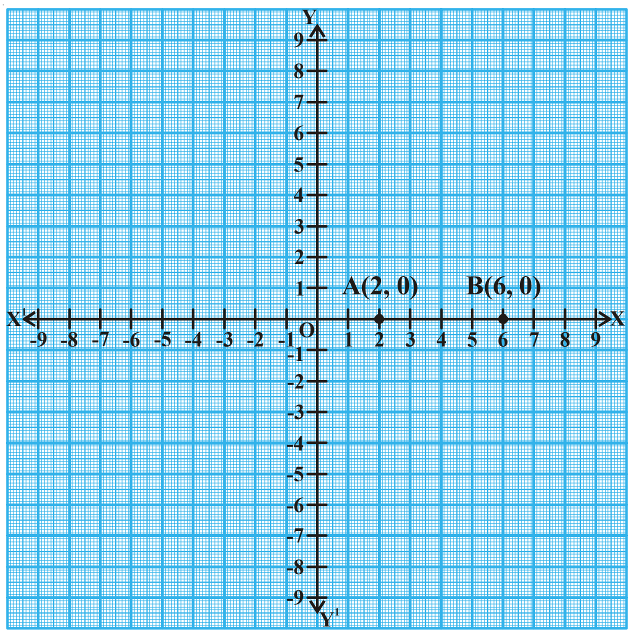
పై బిందువులలోని x నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం $(-6) - (-2) = -4$ (ఋణవిలువ)

దూరాన్ని మనమెప్పుడూ ఋణవిలువలలో సూచించము.

అందువల్ల, దూరం యొక్క పరమమూల్య విలువను లెక్కిస్తాము.

కాబట్టి పై A మరియు B బిందువుల మధ్యదూరం

$= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ యూనిట్లు



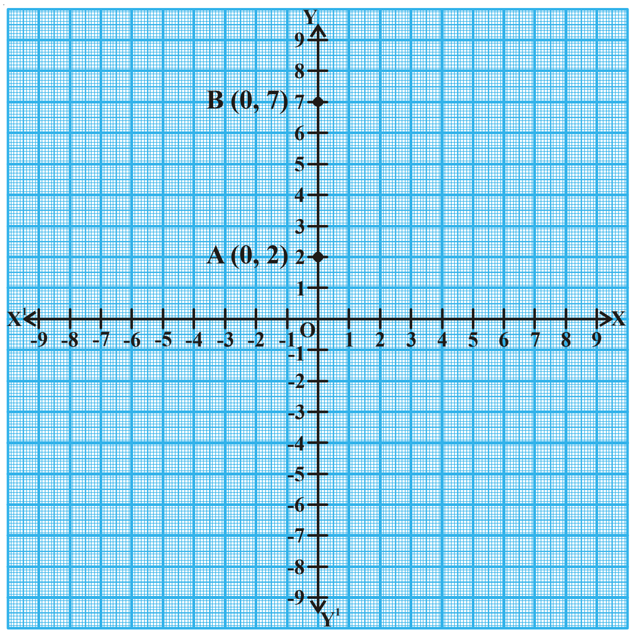
సాధారణంగా X-అక్షంపై ఉన్న బిందువులు $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ అయితే వాటి మధ్యదూరం $|x_2 - x_1|$

అదేవిధంగా, రెండు బిందువులు Y-అక్షంపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువులలోని Y నిరూపకాల మధ్యవ్యత్యాసాన్ని ఆ రెండు బిందువుల మధ్య దూరంగా తెలుపవచ్చు.

బిందువులు $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ ల మధ్యదూరం $|y_2 - y_1|$ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు రెండు బిందువులు A(0, 2) మరియు B(0, 7) ఉన్నాయనుకోండి.

A, B ల మధ్యదూరం $|7 - 2| = 5$ యూనిట్లు.



ఇవి చేయండి

1. (–4, 0), (2, 0), (6, 0), (–8, 0) బిందువులు నిరూపక తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయి?
2. (–4, 0), (6, 0) బిందువుల మధ్యదూరమెంత?

ప్రయత్నించండి.

1. (0, –3), (0, –8), (0, 6), (0, 4) బిందువులు నిరూపక తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయి?
2. (0, –3), (0, –8) బిందువుల మధ్యదూరమెంత? అలాగే Y-అక్షంపై ఉన్న బిందువుల మధ్యదూరం $|y_2 - y_1|$ అవుతుందని చెప్పగలవా?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

రెండు బిందువులలోని x లేదా y నిరూపకాలు సమానంగా (0 కాకుండా) ఉంటే వాటి మధ్య దూరం ఎలా కనుగొంటావు?

7.3 నిరూపక అక్షాలకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై గల బిందువుల మధ్యదూరం

రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_1)$ ఉన్నాయనుకుందాం. వీటిలో y నిరూపకాలు సమానం కాబట్టి ఈ బిందువులు X-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖపై ఉంటాయి.

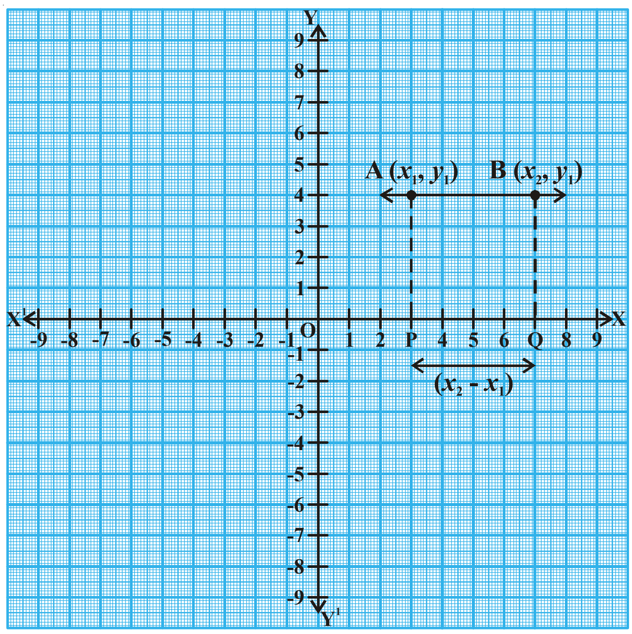
X అక్షంనకు లంబంగా AP మరియు BQ లను గీయండి.

పటాన్ని పరిశీలించండి. A మరియు B ల మధ్యదూరం అనేది P మరియు Q ల మధ్యదూరానికి సమానం అవుతుంది.

కాబట్టి,

A, Bల మధ్యదూరం=P, Q ల మధ్యదూరం

$= |x_2 - x_1|$ (x నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం)



అదేవిధంగా, రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_1, y_2)$ లను కలుపు రేఖ y – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

అపుడు వాటి మధ్య దూరం = $|y_2 - y_1|$

(yని నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం).

ఉదాహరణ-1. A (4,0) మరియు B (8, 0) బిందువుల మధ్యదూరం ఎంత?

సాధన : పై బిందువులలోని x – నిరూపకముల మధ్య వ్యత్యాసం $|x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$ యూనిట్లు.

ఉదాహరణ-2. A మరియు B బిందువులు వరుసగా (8, 3), (–4, 3). A , B ల మధ్యదూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : (8, 3), (–4, 3) బిందువులు నిరూపక తలంలో రెండు వేర్వేరు పాదాలలో ఉంటాయి. మరియు y నిరూపకాలు సమానం.

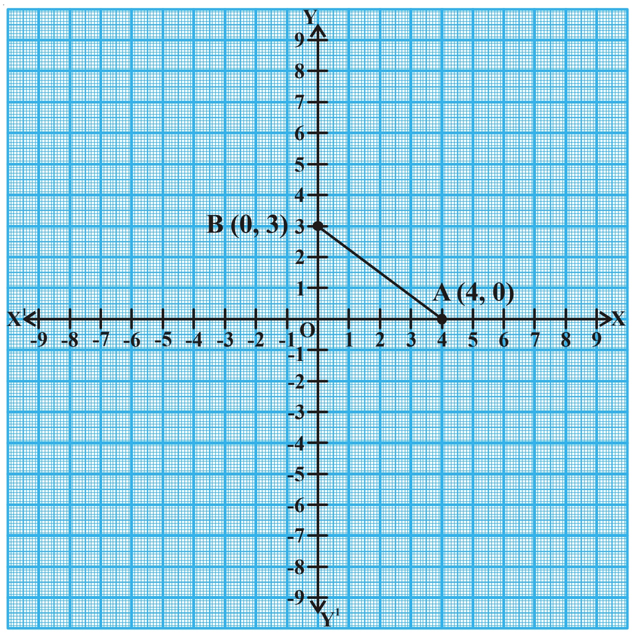
AB మధ్యదూరం $= |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$ యూనిట్లు.

ఇవి చేయండి.

కింది బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

i. (3, 8), (6, 8) ii. (–4,–3), (–8,–3) iii. (3, 4), (3, 8) iv. (–5,–8), (–5,–12)

A మరియు B బిందువులు వరుసగా (4, 0), (0, 3) మరియు మూలబిందువు 'O' ఉన్నాయనుకుందాం.



పటం నుండి ΔAOB లంబకోణత్రిభుజం

OA = 4 యూనిట్లు (x-నిరూపకం)

OB = 3 యూనిట్లు (y-నిరూపకం)

అయిన AB మధ్యదూరం = ?

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించిన

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 4^2 + 3^2$

$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow$ A, B ల మధ్యదూరం = 5యూనిట్లు.

ఇవి చేయండి

కింద బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

(i) A(–2, 0) మరియు B(0, 4) (ii) P(0, 5) మరియు Q(–12, 0)

ప్రయత్నించండి

మూలబిందువు 'O' మరియు బిందువు A (7, 4) ల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

రెండు బిందువులు నిరూపకతలంలోని వేర్వేరు పాదాలలో ఉంటే వాటి మధ్యదూరం ఎలా కనుగొంటారు?

7.4 నిరూకతలంలోని ఏవేని రెండు బిందువుల (ఒకరేఖపై గల) మధ్యదూరం

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$లు నిరూపకతలంలో ఒకరేఖపై ఉన్న బిందువులు అనుకొంటే (పటంలో చూపినట్లు)

X-అక్షం పైకి AP మరియు BQ లంబరేఖలను గీయండి.

బిందువు A నుండి BQ రేఖపైకి లంబరేఖ (R వద్దకు) AR ను గీయండి.

అపుడు $OP = x_1$, $OQ = x_2$(ఎందుకు?)

అలాగే $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

పటంలో APQR ఆకారాన్ని పరిశీలించండి. APQR ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

కాబట్టి $PQ = AR = x_2 - x_1$.

అలాగే $QB = y_2$, $QR = y_1$,

$BR = QB - QR = y_2 - y_1$

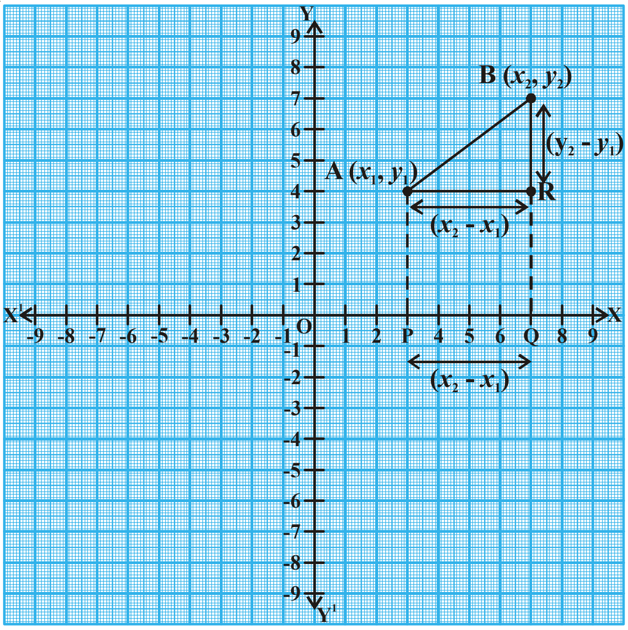
ΔARB లంబకోణత్రిభుజం నుండి

$$AB^2 = AR^2 + RB^2$$

(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



కాబట్టి A మరియు B బిందువుల మధ్యదూరంనకు

సూత్రం $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. రాము, బిందువు $P(x_1, y_1)$ మరియు మూలబిందువు $O(0, 0)$ ల మధ్యదూరం $\sqrt{x^2 + y^2}$ అని తెలిపెను. నీవు రాము తెలిపిన దానితో ఏకీభవిస్తున్నావా? లేదా? ఎందుకు?
2. రాము రెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని ఈవిధంగా రాశాడు.

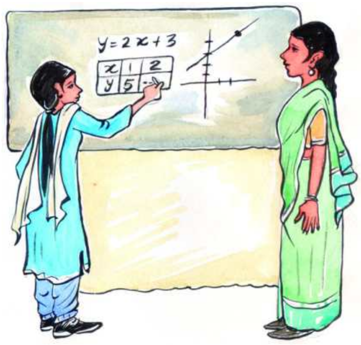
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ఎందుకు?

ఉదాహరణ-3. బిందువులు A(4, 2) మరియు B(8, 6) ల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : పై బిందువులను $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$లతో పోల్చగా

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$

రెండు బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొను సూత్రం ఉపయోగించిన



$$AB \text{ మధ్యదూరం} = d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(8-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{4^2+3^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ యూనిట్లు.}$$

ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

(i) (7, 8) మరియు (–2, 3) (ii) (–8, 6) మరియు (2, 0)

ప్రయత్నించండి

ఒక రేఖాఖండం $\overline{AB}$ యొక్క తొలి, చివరి బిందువులు A(1, –3) మరియు B(–4, 4). అయిన AB మధ్యదూరాన్ని దగ్గరి దశాంశాలకు కనుగొనండి.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

శ్రీధర్ రెండుబిందువులు T(5, 2) మరియు R(–4, –1) ల మధ్యదూరం 9.5 యూనిట్లుగా లెక్కించాడు.

ఇపుడు మీరు రెండు బిందువులు P (4, 1) మరియు Q (–5, –2)ల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి. మీరు కూడా శ్రీధర్ పొందిన సమాధానాన్నే పొందారా? ఎందుకు?

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-4. బిందువులు A (4, 2), B (7, 5) మరియు C (9, 7) ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయని చూపండి.

సాధన :A, B, C లు ఒకే రేఖపై ఉన్నవి అనుకొనిన దీని నుండి AB + BC = AC

ఇపుడు మనం AB, BC, AC ల మధ్య దూరం కనుగొందాం.

బిందువుల మధ్యదూరం సూత్రం = $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ను ఉపయోగించి

$$d = AB = \sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2} \text{ యూనిట్లు.}$$

$$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ యూనిట్లు}$$

$$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2} \text{ యూనిట్లు.}$$

ఇపుడు $AB + BC = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$.

దీని నుండి AB + BC = AC ని సంతృప్తిపరుస్తుంది. కాబట్టి బిందువులు (4, 2), (7, 5) మరియు (9, 7) లు ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నవి.

(ఒకే సరళరేఖపై ఉన్న బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటారు).

ఉదాహరణ-5. బిందువులు (3, 2), (–2, –3) మరియు (2, 3) లు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయా?

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులు P(3, 2), Q(–2, –3), R(2, 3) లతో సూత్రాన్నుపయోగించి PQ, QR, PR ల మధ్యదూరం కనుగొందాం.

$$PQ=\sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ యూనిట్లు (సుమారుగా)}$$

$$QR = \sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2+(6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ యూనిట్లు (సుమారుగా)}$$

$$PR = \sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ యూనిట్లు (సుమారుగా)}$$

పై వాటి యొక్క దూరములకు చెందిన విలువలలో ఏ రెండు విలువల మొత్తం మూడవదానికంటే ఎక్కువ. అని గమనించవచ్చు. ("త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజముల పొడవుల మొత్తం మూడవ దానికంటే ఎక్కువ".)

కాబట్టిపై బిందువులు P, Q మరియు R లు ఒక విషమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

ఉదాహరణ-6. బిందువులు (1, 7), (4, 2), (–1, –1) మరియు (–4, 4)లు ఒక చతురస్రం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులు A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) మరియు D(–4, 4) లు అనుకుందాం.

పై బిందువులు చతురస్రమును ఏర్పరచాలంటే వాటి ద్వారా ఏర్పడే చతుర్భుజంలోని అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం కావాలి మరియు కర్ణాల పొడవులు కూడా సమానం కావాలి.

కాబట్టి, భుజాల పొడవులు

$$AB = d = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \text{ యూనిట్లు}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ యూనిట్లు}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \text{ యూనిట్లు}$$

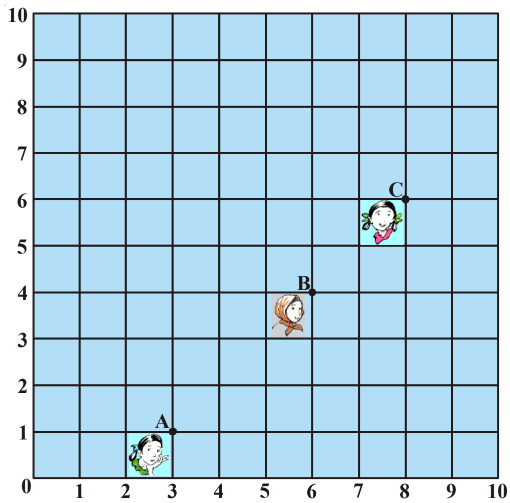
$$DA = \sqrt{(-4-1)^2+(4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ యూనిట్లు}$$

మరియు కర్ణాలు $AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ యూనిట్లు

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ యూనిట్లు

భుజాల $AB = BC = CD = DA$ మరియు కర్ణాలు $AC = BD$. కాబట్టి ఏర్పడిన చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాల పొడవులు సమానం మరియు కర్ణాల పొడవులు కూడా సమానం అని తెలుస్తుంది. కాబట్టి $\square ABCD$ అనేది ఒక చతురస్రం అవుతుంది.

ఉదాహరణ-7. ప్రక్క పటం ఒక తరగతి గదిలోని డెస్కుల యొక్క అమరికను చూపిస్తుంది.



మాధురి, మీన, పల్లవి లు వరుసగా A(3, 1), B(6, 4) మరియు C(8, 6) స్థానాలలో కూర్చున్నారు.

వారు ముగ్గురూ ఒకే సరళరేఖలో కూర్చున్నారని మీరు భావిస్తున్నారా ?

మీ సమాధానానికి సరైన కారణం తెలపండి.

సాధన : రెండు బిందువుల మధ్యదూరం సూత్రంనుపయోగించి

$AB=\sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ యూనిట్లు

$BC=\sqrt{(18-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ యూనిట్లు

$AC=\sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ యూనిట్లు

దీని నుండి $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = AC$. కాబట్టి A, B, C బిందువులు సరేఖీయాలు. కాబట్టి వారు ముగ్గురు ఒకే సరళరేఖలో కూర్చున్నారు.

ఉదాహరణ-8. బిందువు (x, y) అనునది బిందువులు (7, 1) మరియు (3, 5) లకు సమానదూరంలో ఉన్నది అయిన x మరియు y ల మధ్య సంబంధమును కనుగొనండి.

సాధన : బిందువు $P(x, y)$ అనునది బిందువులు A(7, 1) మరియు B(3, 5) లకు సమానదూరంలో ఉన్నది.

దీని నుండి $AP = BP$ కాబట్టి, $AP^2 = BP^2$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$$

$$\Rightarrow (x_2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$$

$\Rightarrow -8x + 8y = -16$

$\therefore\ x - y = 2$ (కావలసిన సంబంధము)

ఉదాహరణ-9. A(6, 5) మరియు B(– 4, 3) లకు సమానదూరంలో y-అక్షంపై నున్న బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.

సాధన : Y-అక్షంపై ఉన్న బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0, y)$ అవుతాయని మనకు తెలుసు. కాబట్టి A మరియు B బిందువులకు సమానదూరంలో నున్న బిందువు $P(0, y)$ అనుకొనిన, అపుడు

$$PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-4)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

కాబట్టి $(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

$\Rightarrow 36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

$\Rightarrow 4y = 36$

$\therefore\ y = 9$

కావలసిన బిందువు (0, 9).

దీన్ని సరిచూద్దాం : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

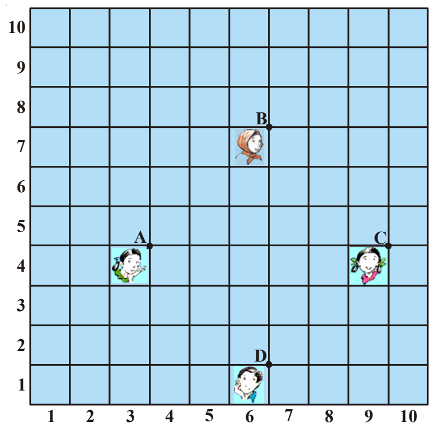
బిందువు (0, 9) అనే బిందువులు (6, 5) మరియు (4, 3) లకు సమానదూరంలో ఉంటుంది.

అభ్యాసం 7.1

1. కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల మధ్యదూరంను కనుగొనండి.
   (i) (2, 3) మరియు (4, 1)
   (ii) (–5, 7) మరియు (–1, 3)
   (iii) (–2, –3) మరియు (3, 2)
   (iv) (a, b) మరియు $(-a, -b)$
2. బిందువులు (0, 0) మరియు (36, 15) ల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి.
3. బిందువులు (1, 5), (2, 3) మరియు (–2, –1) లు సరేఖీయాలో కాదో సరిచూడండి.

4. బిందువులు (5, –2), (6, 4) మరియు (7, –2) లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయో? కావో? చూడండి.

5. పటంలో చూపినట్లు, ఒక తరగతిలో నలుగురు స్నేహితురాళ్ళు A, B, C, D స్థానాల్లో తరగతిలో అటూ ఇటూ తిరుగుతూ కొన్ని నిముషాలు పరిశీలించిన తర్వాత, జరీనా ఫణిని ఇలా అడిగింది. "ABCD ఒక చతురస్రం అవుతుందని నీవు భావించడం లేదా?" అందుకు ఫణి ఒప్పుకోలేదు.



బిందువుల మధ్య దూరంనకు సూత్రాన్నుపయోగించి ఎవరి సమాధానం సరైనది? ఎందుకు? తెలపండి.

6. బిందువులు $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, a\sqrt{3})$ అనునవి ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచగలవని చూపండి.

7. బిందువులు (–7, –3), (5, 10), (15, 8) మరియు (3, –5) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజానికి శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.

8. బిందువులు (–4, –7), (–1, 2), (8, 5) మరియు (5, –4) లు వరుసగా ఒక సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి. దాని వైశాల్యం కనుగొనండి.

(సూచన : రాంబస్ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × కర్ణముల లబ్ధం)

9. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులతో ఏర్పడే చతుర్భుజం ఏరకమైనదో? దాని పేరును తెలపండి. మీ సమాధానానికి సరైన కారణం తెలపండి.

(i) (–1, –2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0) (ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, –4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

10. x-అక్షంపై ఉంటూ బిందువులు (2, –5) మరియు (–2, 9) లకు సమాన దూరంలో నున్న బిందువును కనుగొనండి.

11. బిందువులు $(x, 7)$ మరియు (1, 15) ల మధ్యదూరం 10 యూనిట్లు, అయిన x విలువ ఎంత?

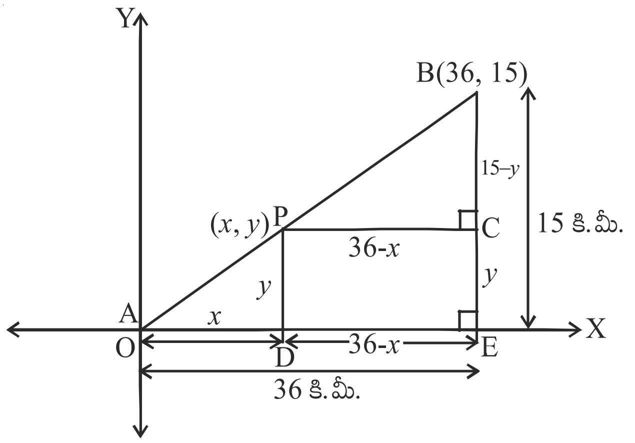
12. బిందువులు $P(2, -3)$ మరియు $Q(10, y)$ ల మధ్య దూరం 10 యూనిట్లు, అయిన y విలువ ఎంత?

13. బిందువు (–5, 6) గుండాపోవు వృత్తం యొక్క కేంద్రం (3, 2) అయిన దాని వ్యాసార్థంను కనుగొనండి.

14. బిందువులు (1, 5), (5, 8) మరియు (13, 14) లతో త్రిభుజమును గీయగలమా? కారణం తెల్పండి.

15. బిందువులు (x, y) (–2, 8) మరియు (–3, –5) లకు సమానదూరంలో ఉన్నది. అయిన x మరియు y ల మధ్య సంబంధమును కనుక్కోండి.

7.5 విభజన సూత్రం



ఒక టెలీఫోన్ కంపెనీ వారు A మరియు B మధ్యలో P వద్ద ఒక రిలే టవర్‌ను ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. ఆ టవర్‌ను వారు A నుండి P కి గల దూరం కన్నా రెట్టింపు దూరం P నుండి B మధ్య ఉండే విధంగా ఏర్పాటు చేద్దామనుకున్నారు. P అనే బిందువు AB రేఖపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువు AB రేఖను 1 : 2 నిష్పత్తిలో (పటంలో చూపినట్లు)విభజిస్తుంది.

A ను మూలబిందువు 'O' వద్ద ఉన్నదను కొనిన మరియు రెండు అక్షాలపై 1 కి.మీ దూరాన్ని 1 యూనిట్‌గా తీసుకొనిన, అలాగే బిందువు B నిరూపకాలు (36, 15) అయినచో రిలేటవర్ యొక్క స్థానాన్ని తెలుసుకోవాలంటే మనం బిందువు P యొక్క నిరూపకాలను తప్పక తెలుసుకోవాలి. మరి ఈ నిరూపకాలను ఎలా తెలుసుకుంటాం?

బిందువు P యొక్క నిరూపకాలను (x, y) అనుకుందాం. P నుండి మరియు B నుండి వరుసగా x-అక్షంపైకి D మరియు E వద్ద కలిసేలా లంబాలను గీయండి. P నుండి C వద్దకు BE కి లంబంగా ఉండేలా ఒకరేఖను గీయండి. ఇపుడు 6వ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న కోణము, కోణము సరూపకత నియమం ద్వారా ΔPOD మరియు ΔBPC లు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి.

అందువల్ల, $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ మరియు $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

కాబట్టి, $\dfrac{x}{36-x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{y}{15-y} = \dfrac{1}{2}$.

$2x = (36 - x)$ $\qquad$ $2y = 15 - y$

$3x = 36$ $\qquad$ $3y = 15$

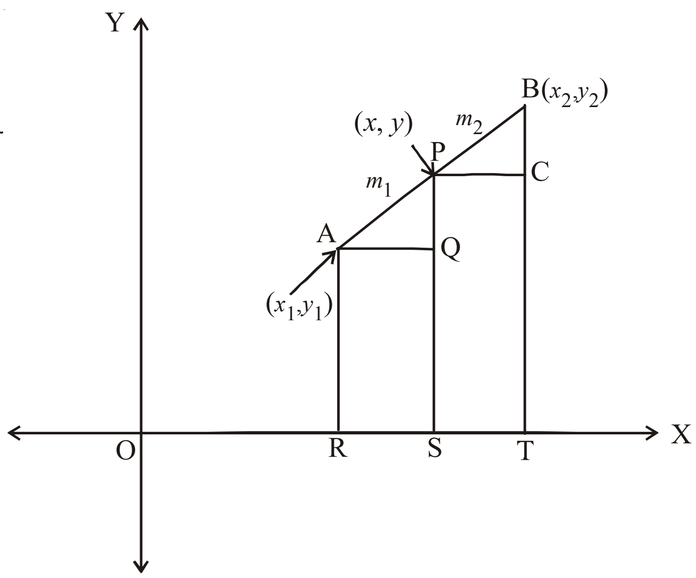
$x = 12$ $\qquad$ $y = 5$

ఈ సమీకరణాల ద్వారా $x = 12$ మరియు $y = 5$ అని తెలుస్తున్నది.

బిందువు P(12, 5) రేఖను OP : PB = 1 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందన్న నియమాన్ని మీరు సరిచూడవచ్చును.

ఏవేని రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము. ఏదేని బిందువు P (x, y) అనేది AB ని అంతరంగా $m_1 : m_2$, నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొని

$\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ (పటంలో చూడండి).

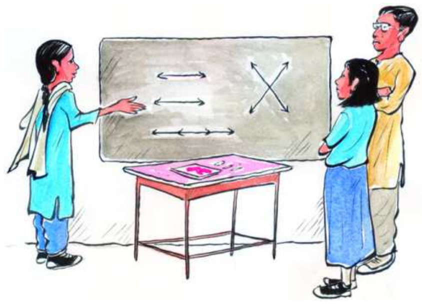


AR, PS మరియు BT లను x-అక్షంపైకి లంబంగా గీయండి.

AQ మరియు PC లను X-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండేలా గీయండి. ఇపుడు కోణం, కోణం సరూపకత నియమం నుండి

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

అందువల్ల, $\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$ .....(1)



ఇపుడు, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

పై విలువలను (1)లో, ప్రతిక్షేపించగా, మనకు

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ తీసుకొనిన $\Rightarrow$ $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

అదేవిధంగా $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, తీసుకొనిన $\Rightarrow$ $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

కాబట్టి $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడు రేఖను అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు $P(x, y)$ యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \quad .....(2)$$

ఇదే విభజన సూత్రము

Y - అక్షంపైకి A, P మరియు B ల నుండి లంబరేఖలను గీసి పై పద్ధతి ద్వారా కూడా ఈ సూత్రమును రాబట్టవచ్చును.

AB రేఖను P బిందువు $k : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తున్నట్లయితే అపుడు P బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

ప్రత్యేక సందర్భం : ఒకరేఖ యొక్క మధ్య బిందువు ఆ రేఖాఖండాన్ని 1 : 1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అందువల్ల బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడే రేఖ యొక్క మధ్యబిందువు P నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

ఇపుడు, విభజన సూత్రాన్నుపయోగించి కొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ-10. బిందువులు (4, –3) మరియు (8, 5) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును 3 : 1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.

సాధన : కావలసిన బిందు నిరూపకాలు $P(x, y)$ అనుకొనిన విభజనసూత్రం ద్వారా

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right),$$

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

కావలసిన బిందువు $P(x, y) = (7, 3)$.

ఉదాహరణ-11. బిందువులు (3, 0) మరియు (-1, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు (3, 0) మరియు (-1, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు $M(x, y)$ అనుకొనిన,

మధ్యబిందువు $M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$$\therefore \quad M(x, y) = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2).$$

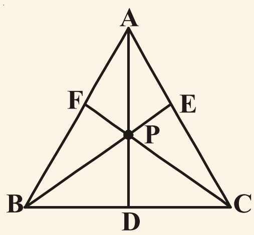
ఇవి చేయండి

1 బిందువులు (3, 5) మరియు (8, 10) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును 2 : 3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువును కనుగొనండి.

2. బిందువులు (2, 7) మరియు (12, –7) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి

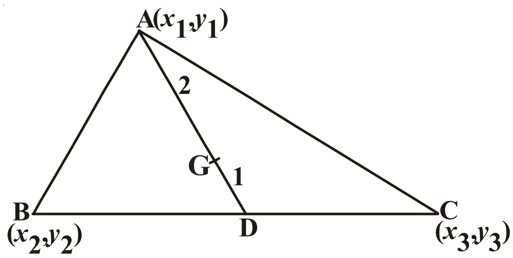
బిందువులు A(4, 2), B(6, 5) మరియు C(1, 4) లు ΔABC యొక్క శీర్షాలు.



1. A నుండి BC పైకి గీసిన మధ్యగత రేఖ Dవద్ద కలుస్తుంది. అయిన D బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.
2. AP : PD = 2 : 1 అయ్యేవిధంగా AD రేఖపై Pబిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
3. అదేవిధంగా BE మరియు CF మధ్యగత రేఖలపై Q మరియు R బిందువులను గుర్తించండి.
4. BE రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువును మరియు CF రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువును కనుగొనండి.
5. మీరేమి గమనించారు?

   "ఒక త్రిభుజంలోని ప్రతి మధ్యగత రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు ఆ త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రం అవుతుంది".

7.6 త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం



ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువును (ఖండన బిందువు) గురుత్వకేంద్రం అంటారు.

బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లు ΔABC యొక్క శీర్షాలు అనుకొనుము.

AD అనే మధ్యగత రేఖ త్రిభుజ భూమి BCని సమద్విఖండన చేయును.

కావున $$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

AD మధ్యగత రేఖపై 2 : 1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు (గురుత్వకేంద్రం) $G(x, y)$అనుకొనిన

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

గురుత్వ కేంద్రం యొక్క నిరూపకాలు

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right].$$

ఉదాహరణ-12. బిందువులు (3, –5), (–7, 4), (10, –2) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రంను కనుగొనండి.

సాధన : గురుత్వకేంద్రం నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2,-1)$$

∴ గురుత్వకేంద్రం (2, –1).

ఇవి చేయండి

బిందువులు (–4, 6), (2, –2) మరియు (2, 5) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రంను కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి

బిందువులు (2, 3), (x, y), (3, –2) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం మూలబిందువు అయిన (x, y)ని కనుగొనండి.

ఉదాహరణ-13. బిందువులు A(– 6, 10) మరియు B(3, – 8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును బిందువు (– 4, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

సాధన : AB రేఖాఖండమును బిందువు (– 4, 6) అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొనిన

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}\right) \qquad .....(1)$$

$(x, y) = (a, b)$ అయితే $x = a$ మరియు $y = b$ అని మనకు తెలుసు..

కావున, $-4 = \dfrac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}$ మరియు $6 = \dfrac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$

ఇపుడు, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ దీనినుండి

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

అనగా $7m_1 = 2m_2$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

అనగా $m_1 : m_2 = 2 : 7$

ఈ నిష్పత్తి y నిరూపకానికి కూడా సంతృప్తిపరుస్తుందని చూపవచ్చు.

ఇపుడు, $\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ (ఇరువైపులా m_2చే భాగించగా)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{-16}{7} + 10}{\frac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

కావున బిందువులు A(–6, 10) మరియు B (3, –8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండంను బిందువు (–4, 6) అనునది 2 : 7 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

బిందువులు A(6, 9) మరియు B(–6, –9) లను కలుపు రేఖాఖండమును

(a) మూలబిందువు ఏనిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది? ఆ రేఖఖండమునకు మూలబిందువును ఏమంటారు?

(b) బిందువు P(2, 3) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది ?

(c) బిందువు Q(-2, -3) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

(d) బిందువులు P, Q లు $\overline{AB}$ ని ఎన్ని సమానభాగాలుగా విభజిస్తాయి ?

(e) P, Q లను ఏమంటారు ?

7.7 రేఖ యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు

ఒక రేఖాఖండమును మూడు సమానభాగాలుగా విభజించు బిందువులను "త్రిథాకరణ బిందువులు" అంటాం.

ఉదాహరణ-14. బిందువులు A(2,−2) మరియు B(−7, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు కనుగొనండి.

సాధన : AB రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు P మరియు Qలు అనుకొనిన

AP=PQ=QB (పటంలో చూపినట్లు).

అందువల్ల AB రేఖాఖండాన్ని బిందువు P అంతరంగా 1 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

కావున విభజన సూత్రం నుండి

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

ఇపుడు బిందువు Q కూడా AB రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

అందువల్ల బిందువు Q యొక్క నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

అనగా $\left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$

కాబట్టి, AB రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు P(-1, 0) మరియు Q(-4, 2)

ఇవి చేయండి.

1. బిందువులు (2, −6) మరియు (−4, 8) లను కలుపు రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులను కనుగొనండి.
2. బిందువులు (−3, −5), (−6, −8) లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ-15. బిందువులు (5, –6) మరియు (1, –4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును Y-అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది? ఆ ఖండన బిందువును కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు A(5, –6) మరియు B(1, –4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము AB ని Y-అక్షంపైనున్న బిందువు K : 1. నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొనిన ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1}\right)$$

అనగా, $\left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$

కాని Y-అక్షంపై నున్న బిందువు యొక్క నిరూపకాలలో x-నిరూపకం సున్న '0' అని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి $\frac{-K+5}{K+1} = 0$

$-K + 5 = 0 \Rightarrow K = 5.$

అందువల్ల $K : 1 = 5 : 1$

K = 5 విలువను పై బిందువు నిరూపకాలలో ప్రతిక్షేపించగా

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

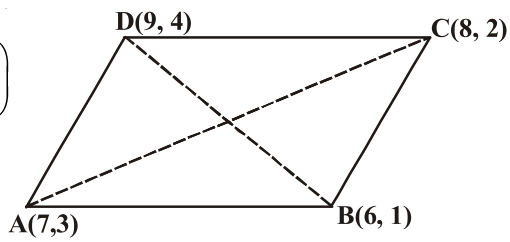
ఉదాహరణ-16. బిందువులు A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) మరియు D(9, 4) లు వరుసగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలని చూపండి.

సాధన : బిందువులు A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) మరియు D(9, 4) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం శీర్షాలు అనుకొనిన

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని తెలుసు.

$\therefore$ అందువల్ల కర్ణాలు AC మరియు DB ల మధ్య బిందువులు సమానం కావాలి.

ఇపుడు $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ సూత్రమునుపయోగించి కర్ణాలు AC మరియు DB ల మధ్య బిందువును కనుగొందాం.



AC మధ్యబిందువు $= \left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

DB మధ్యబిందువు $= \left(\frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

దీని నుండి, AC మధ్యబిందువు = DB మధ్యబిందువు.

కాబట్టి బిందువులు A, B, C, D లు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయి.

ఉదాహరణ-17. బిందువులు A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) మరియు D(p, 3) లు వరుసగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలయిన P యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని మనకు తెలుసు.

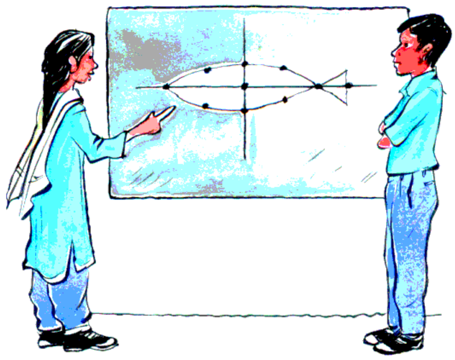
కాబట్టి AC మధ్యబిందువు = BD మధ్యబిందువు

అనగా $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7.$$



అభ్యాసం - 7.2

1. బిందువులు (–1, 7) మరియు (4, –3) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును 2 : 3 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
2. బిందువులు (4, –1) మరియు (–2, –3) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క త్రిధాకరణ బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనండి.
3. బిందువులు (–3, 10) మరియు (6, –8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును బిందువు (–1, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుగొనండి.
4. బిందువులు (1, 2), (4, y), (x, 6) మరియు (3, 5) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలయిన x, yల విలువలు కనుగొనండి.
5. AB వ్యాసంగా గల వృత్తం యొక్క కేంద్రము (2, –3) మరియు వృత్తంపై నున్న ఒక బిందువు B(1, 4) అయిన A బిందువు యొక్క నిరూపకాలు కనుగొనండి.
6. బిందువులు A, Bలు వరుసగా (–2, –2) మరియు (2, –4). AB రేఖాఖండంపై AP = $\frac{3}{7}$ అయ్యే విధంగా P బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
7. బిందువులు A(–4, 0) మరియు B(0, 6) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును నాలుగు సమభాగాలుగా విభజించు బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనండి.

8. బిందువులు A(–2, 2) మరియు B(2, 8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనండి.

9. బిందువులు $(a + b, a - b)$ మరియు $(a - b, a + b)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును అంతరంగా 3 : 2 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.

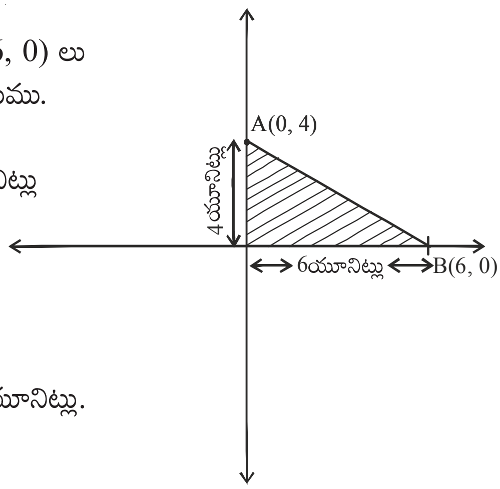
10. కింద ఇవ్వబడిన బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రమును కనుగొనండి.
    i. (-1, 3), (6, -3) మరియు (-3, 6)   ii. (6, 2), (0, 0) మరియు (4, -7)
    iii. (1, -1), (0, 6) మరియు (-3, 0)

7.8 త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం

పటంలో చూపినట్లు బిందువులు A(0, 4) మరియుB(6, 0) లు మూలబిందువు O తో ఒక త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తుందని అనుకొనుము.

ΔAOB త్రిభుజ వైశాల్యము ఎంత ?

ΔAOB ఒక లంబకోణత్రిభుజం. దాని భూమి 6 యూనిట్లు (x నిరూపకం) మరియు ఎత్తు 4 యూనిట్లు (y నిరూపకం).



$\therefore$ ΔAOB త్రిభుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ చదరపు యూనిట్లు.

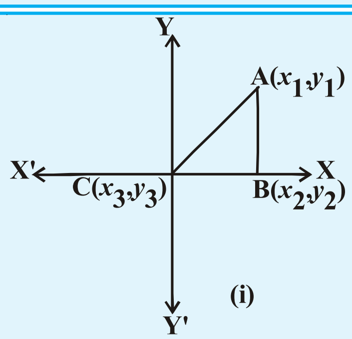
ప్రయత్నించండి

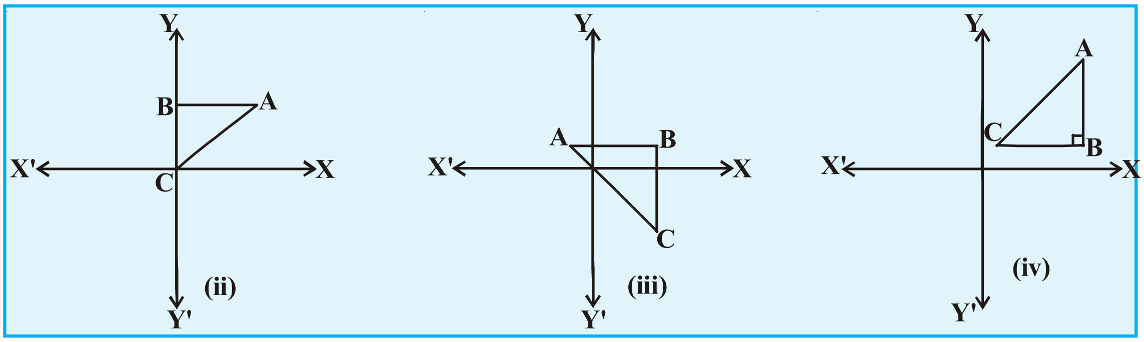
ఏదేని ఒక బిందువు Aను X–అక్షంపై, మరొక బిందువు Bను Y–అక్షంపై తీసుకొని త్రిభుజం వైశాల్యం కనుగొనండి. మీ మిత్రులు చేసిన వాటిని గమనించండి. మీరేం గమనించారు?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

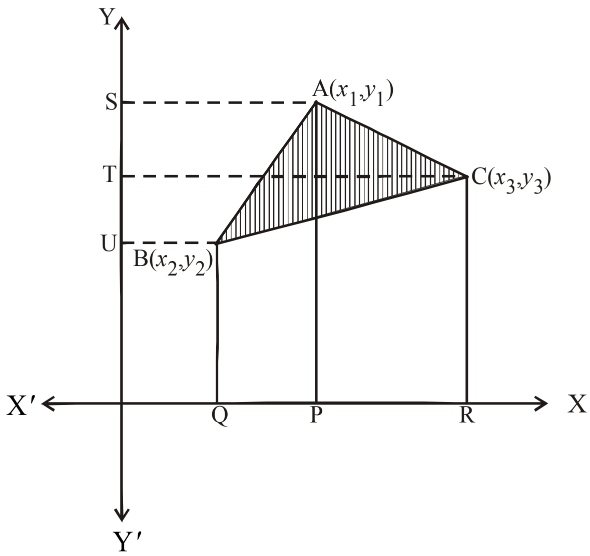
నిరూపకతలంపై ఉన్నవనుకొనుము. అయిన కింది త్రిభుజాల యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. మరియు వాటి వైశాల్యముల గురించి గ్రూపులలో మీస్నేహితులతో చర్చించండి.





త్రిభుజ వైశాల్యం :-

ఏదేని ఒక త్రిభుజం ABC గా తీసుకుందాం. అది బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం అనుకుందాం. A, B మరియు C ల నుండి వరుసగా x-అక్షంపైకి AP, BQ మరియు CR అనే లంబరేఖలు గీయండి.



పటంలో చూపినట్లుగా ABQP, APRC మరియు BQRC లు ట్రెపిజియంలను ఏర్పరుస్తాయి.

ఇప్పుడు పటం నుండి

ΔABC వైశాల్యం = ట్రెపీజియం ABQP వైశాల్యం + ట్రెపీజియం APRC వైశాల్యం – ట్రెపీజియం BQRC వైశాల్యం

ఇప్పుడు పటం నుండి

$$\Delta ABC \text{ వైశాల్యం } = \frac{1}{2}(BQ+AP)QP+\frac{1}{2}(AP+CR)PR-\frac{1}{2}(BQ+CR)QR$$

($\because$ ట్రెపీజియం వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) (వాటి మధ్య లంబదూరం))

ఇపుడు, పటం నుండి

$BQ = y_2,\ AP = y_1,\ QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3,\ PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

కాబట్టి,

$$= \frac{1}{2}\left|(y_2+y_1)\ (x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_1+y_3)\ (x_3-x_1)-\frac{1}{2}(y_3+y_3)\ (x_3-x_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

కాబట్టి, ΔABC వైశాల్యంను దాని విలువను కనుగొనుటకు సూత్రం

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణ సమస్యల సాధన పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-18. బిందువులు (1, –1), (–4, 6) మరియు (–3, –5) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : ΔABC త్రిభుజ శీర్షాలు $A(1,-1), B(-4, 6), C(-3,-5)$, లు అనుకొని దాని వైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రం

$$=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|11+16+21\right|=24$$

కాబట్టి ΔABC వైశాల్యం 24 చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ-19. బిందువులు A(5, 2), B(4, 7) మరియు C(7, –4)లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు A(5, 2), B(4, 7) మరియు C(7, –4) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజవైశాల్యం

$$\frac{1}{2}\left|5(7+4)+4(-4-2)+7(2-7)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|55-24-35\right|=\frac{-4}{2}=\left|-2\right|$$

వైశాల్యము అనేది కొలతలకు సంబంధించినది. దీనిని ఋణవిలువలతో సూచించలేము కాబట్టి దీని పరమమూల్య విలువతో సూచిస్తాము. అందువల్ల

$$|-2|=2.$$

అందువల్ల, త్రిభుజవైశాల్యం = 2 చదరపు యూనిట్లు.

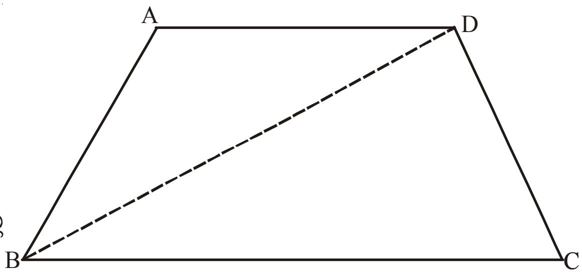
ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన శీర్షాలు గల త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనండి.

1. (5, 2) (3, –5) మరియు (–5, –1)
2. (6, –6), (3, –7) మరియు(3, 3)

ఉదాహరణ-20. బిందువులు A(–5, 7), B(–4,–5), C(–1, –6) మరియు D(4,5) లు ఒక చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు అయిన □ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు B, D లను కలిపినచో మనకు ΔABD మరియు ΔBCD అనే రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి.



ΔABD త్రిభుజవైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left|-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|50+8+48\right| = \frac{106}{2} = 53$$ చదరపుయూనిట్లు

అదేవిధంగా ΔBCD వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|44-10+4\right| = 19$ చదరపు యూనిట్లు.

ఇపుడు ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం= 53+19 = 72 చదరపు యూనిట్లు

అందువల్ల □ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం = 72 చదరపు యూనిట్లు

ప్రయత్నించండి

బిందువులు (0, –1), (2, 1) (0, 3) మరియు (–2, 1) లు శీర్షాలుగా గల చతురస్రము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనండి.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

కింది బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజవైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

(i) (2, 0), (1, 2) (–1, 6)

(ii) (3, –1), (5, 0), (1, –2)

(iii) (–1.5, 3), (6, –2), (–3, 4)

మీరేం గమనించారు ?

ఈ బిందువులను మూడు వేర్వేరు గ్రాఫులలో గుర్తించండి.

మీరేం గమనించారు. మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

వైశాల్యం 0(సున్నా) చ.యూనిట్లు గల త్రిభుజమును గీయగలమా? మరి దీని అర్థమేమిటి ?

7.8.1. బిందువుల సరేఖీయత

బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ ఒకే రేఖపై ఉన్నవనుకుందాం. అపుడు అవి త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచలేవు. అనగా ΔABC త్రిభుజవైశాల్యం సున్నా '0'.

ఎప్పుడైతే మూడు బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యం సున్నా '0' అవుతుందో అప్పుడు ఆ మూడు బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటాం.

ఉదాహరణ-21. ఒక తలంలో ఉన్న బిందువులు (3, –2) (–2, 8) మరియు (0, 4)లు సరేఖీయ బిందువులు అని చూపండి.

సాధన : త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొను సూత్రంనుపయోగించి

$$= \frac{1}{2}|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)|$$

$$= \frac{1}{2}|12-12| = 0$$

త్రిభుజవైశాల్యం సున్నా '0'. కాబట్టి పైన పేర్కొన్న బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు.

ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయాలు అవుతాయా? కావా? సరి చూడండి.

(i) (1, –1) (4, 1), (–2, –3)

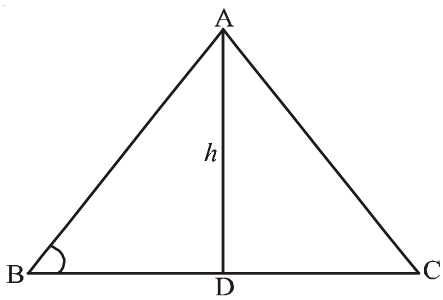
(ii) (1, –1), (2, 3), (2, 0)

(iii) (1, –6), (3, –4), (4, –3)

7.8.2. త్రిభుజవైశాల్యం – "హెరాన్ సూత్రం"

త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రం $\frac{1}{2}$ ×భూమి × ఎత్తు అని మనకు తెలుసు.

ఒకవేళ ఇచ్చిన త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం, సమబాహు త్రిభుజం, సమద్విబాహు త్రిభుజాలతో ఏదైనా కావచ్చు. అపుడు ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం మనం కనుగొనగలమా ?



త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు తెలిసినపుడు వాటి విలువలను పై సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించి సులభంగా ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంను మనం తెలుసుకుంటాం.

ఉదాహరణకు ఇచ్చిన త్రిభుజం విషమబాహు త్రిభుజం అయితే దాని యొక్క భుజాల పొడవులు మాత్రమే తెలుస్తాయి. కాని ఎత్తు తెలియదు.

అపుడు, దాని వైశాల్యం ఎలా కనుగొంటాం ?

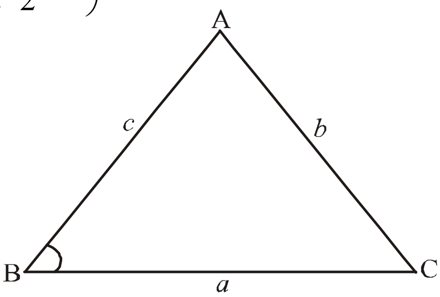
పైన తెలిపిన వైశాల్యం సూత్రంలో విలువలు ప్రతిక్షేపించాలంటే తప్పకుండా త్రిభుజం ఎత్తు మనకు తెలిసి ఉండాలి.

కాబట్టి, "హెరాన్" అనే గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త a, b, c భుజాల పొడవులు కలిగిన త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రమును కనుగొన్నాడు. అది

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \qquad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

ఉదాహరణకు, 12మీ, 9మీ, 15మీ పొడవులు గల భుజాలతో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యంను "హెరాన్ సూత్రం" ను ఉపయోగించి కనుక్కొందాం.

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \qquad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$



$$S = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ మీ}$$

అపుడు $S - a = 18 - 12 = 6$మీ.

$S - b = 18 - 9 = 9$మీ

$S - c = 18 - 15 = 3$మీ.

$$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54 \text{ చదరపు మీటర్లు.}$$

ఇవి చేయండి

(i) 15మీ, 17మీ, 21మీ భుజాలుగా గల త్రిభుజం వైశాల్యం (హెరాన్ సూత్రం ద్వారా) కనుగొనండి. మరియు మీ సమాధానాన్ని $A = \frac{1}{2}bh$ లో ప్రతిక్షేపించి సరిచూసుకోండి.

(ii) బిందువులు (0, 0), (4, 0) మరియు (4, −3)లతో ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యంను హెరాన్ సూత్రం ద్వారా కనుగొనండి.

ఉదాహరణ-22. బిందువులు (1, 2), (−1, b), (−3, −4) సరేఖీయాలైతే 'b' విలువను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులు A(1, 2), B(−1, b), C(−3, −4) అనుకొనుము.

$x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = -1, y_2 = b, x_3 = -3, y_3 = -4$ అవుతాయి.

ఇక ΔABC వై $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ అని తెలుసు.

$\therefore \frac{1}{2}\left|1(b+4) + (-1)(-4-2) + (-3)(2+b)\right| = 0$ అవుతుంది. ($\because$ ఇచ్చిన బిందువులు సరేఖీయాలు)

$$|b+4+6-6+3b| = 0$$

$$|4b+4| = 0$$

$$4b+4 = 0$$

$$b = -1.$$

అభ్యాసం - 7.3

1. కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు శీర్షాలుగా కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

   (i) (2, 3) (–1, 0), (2, –4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)

   (iii) (0, 0), (3, 0) మరియు (0, 2)

2. కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయాలైతే 'K' విలువను కనుగొనండి.

   (i) (7, –2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, –4), (2, –5)

   (iii) (K, K) (2, 3) మరియు (4, –1).

3. బిందువులు (0, –1), (2, 1) మరియు (0, 3) శీర్షాలు కలిగిన త్రిభుజవైశాల్యం, మరియు దాని భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

4. బిందువులు (–4, –2), (–3, –5), (3, –2) మరియు (2, 3) శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.

5. బిందువులు (8, –5), (–2,7) మరియు (5, 1) లచే ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యాన్ని హెరాన్ సూత్రాన్నుపయోగించి కనుక్కోండి.

7.9 సరళరేఖ

భరద్వాజ్ మరియు మీనాలు రెండు చలరాశులు కల్గిన రేఖీయ సమీకరణంనకు సాధనలు కనుగొనడం గురించి చర్చించుకొంటున్నారు.

భరద్వాజ్ : నీవు $2x + 3y = 12$ కు సాధనలు కనుగొనగలవా?

మీన : అవును, నేను ఇలా చేశాను, చూడు

x	0	3	6	–3
y	4	2	0	6

$$2x+3y = 12$$

$$3y = 12 - 2x$$

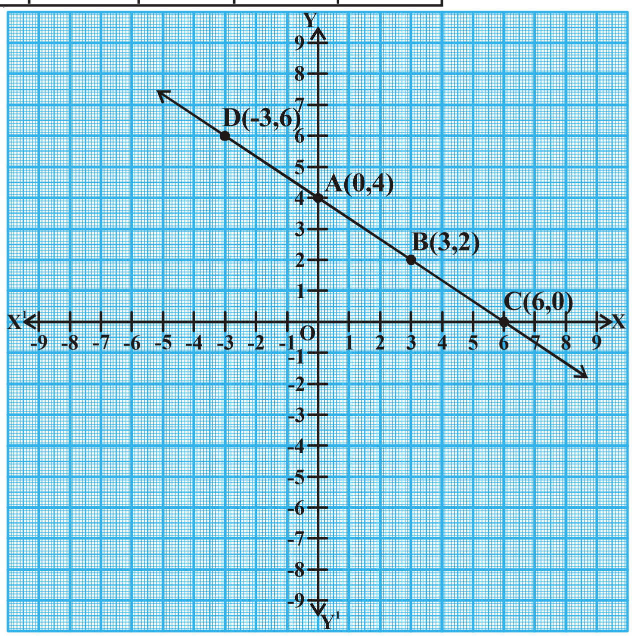
$$y = \frac{12-2x}{3}$$

మీన : నీవు ఈ సాధనలను క్రమయుగ్మాల రూపంలో రాయగలవా?

భరద్వాజ్ : అవును (0, 4), (3, 2), (6, 0), (–3, 6)

మీనా, నీవు ఈ బిందువులను నిరూపక తలంపై గుర్తించగలవా ?

మీన: నేను ఇలా చేశాను. ఈ బిందువులను కలుపుతూ రేఖను గీసాను. చూడు



భరద్వాజ్ : ఈ రేఖ దేనిని సూచిస్తుంది
మీన : ఇది ఒక సరళరేఖ
భరద్వాజ్ : ఈ రేఖపై మరికొన్ని బిందువులను గుర్తించగలవా ?

ఈ రేఖపై మరికొన్ని బిందువులు గుర్తించడంలో మీరు మీనాకు సహాయపడగలరా?

..................., ..., ..., ...

ఈ రేఖలో $\overline{AB}$ ని ఏమంటారు?

$\overline{AB}$ అనునది ఒక సరళరేఖాఖండము

ఇవి చేయండి

క్రిందనీయబడిన బిందువులను నిరూపకతలంపై గుర్తించి వాటిని కలుపుము

(1) A(1, 2), B(–3, 4), C(7, –1)

(2) P(3, –5) Q(5, –1), R(2, 1), S(1, 2)

ఇందులో ఏది సరళరేఖను సూచిస్తుంది ? ఏది సూచించదు? ఎందుకు?

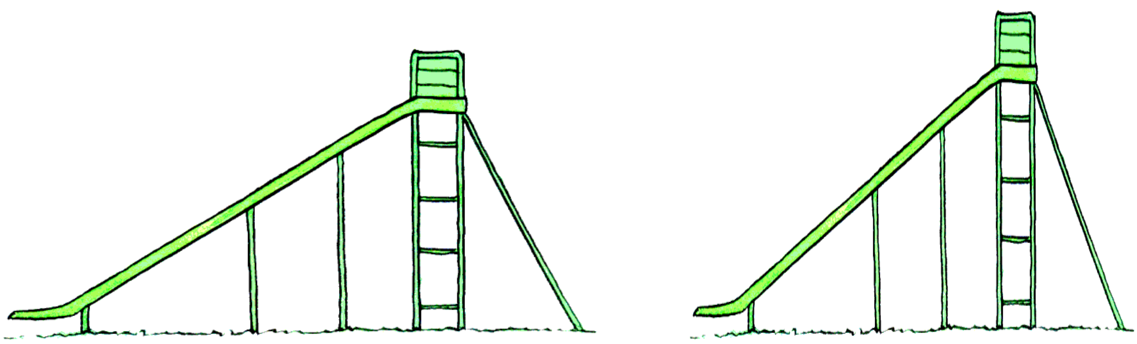
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

$y = x + 7$ సమీకరణం ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుందా? నిరూపకతలంలో గీసి చూడండి.

ఈ సరళరేఖ X –అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది? అదే విధంగా ఈ సరళరేఖ Y–అక్షంతో ఎంత కోణం చేస్తుంది? మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

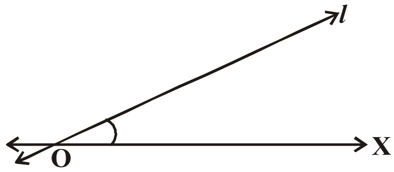
7.9.1 సరళరేఖవాలు

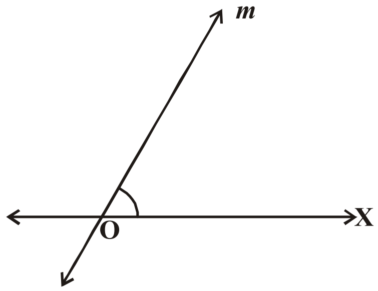
మీరు పార్కులో జారుడు నిచ్చెన చూసే వుంటారు. ఇక్కడ రెండు జారుడు నిచ్చెనలు ఇవ్వబడినవి. దేని మీది నుండి మీరు వేగంగా జారగలరు?



మీరు చెప్పేది “రెండవది” అని అవును కదూ! ఎందుకు ?

కింది రేఖలను పరిశీలించండి.





OX తో ఏ రేఖ ఎక్కువ కోణం చేయుచున్నది ?

OX తో రేఖ "*l*" చేసే కొణం కన్నా రేఖ '*m*' చేసే కోణం ఎక్కువ. అందువల్ల

OX దృష్ట్యా రేఖ '*l*' కన్నా రేఖ '*m*' వాలు ఎక్కువ.

ఒక రేఖ యొక్క వాలును ఎలా కనుగొంటాం?

కృత్యం

పటంలోని రేఖను పరిశీలించి దానిపై గల బిందువులను గుర్తిస్తూ కింది పట్టికను పూరించండి.

x నిరూపకం	1	-	-	4	-
y నిరూపకం	2	3	4	-	6

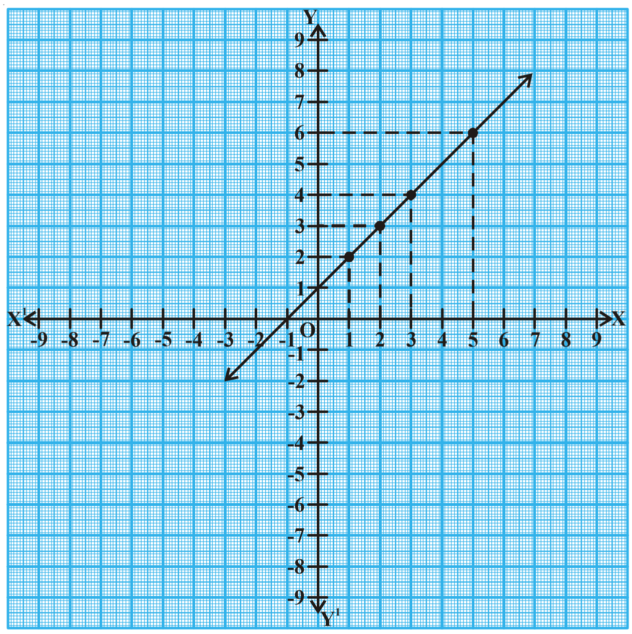
x నిరూపకాలు మారుతున్న కొలది y నిరూపకాలు మారుతున్నవని మనం గమనించవచ్చు.

y నిరూపకాలు $y_1 = 2$ నుండి $y_2 = 3$కు పెరిగినపుడు

y నిరూపకంలో భేదం = ...

అప్పుడు x నిరూపకంలో భేదం = ...

$\therefore \dfrac{y \text{ నిరూపకంలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}} =$ ....



y నిరూపకాలు $y_1 = 2, y_3 = 4$ కు పెరిగినపుడు

y నిరూపకంలో భేదం = ...

అప్పుడు x నిరూపకంలో భేదం ....

$\therefore \dfrac{y \text{ నిరూపకంలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}} =$...............

ఇంకా ఆరేఖపై మరికొన్ని బిందువులను గుర్తించి ఏవైనా రెండు బిందువులలో నిరూపకాలను గమనిస్తూ కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

y నిరూపకం		y నిరూపకంలో భేదం	x	x నిరూపకంలో భేదం		$\frac{y \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}$
2	4	-	1	2	1	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

పై కృత్యం నుండి మీరేమి గ్రహించారు ?

ఒకరేఖపై నున్న బిందువుల నిరూపకాలలో y నిరూపకాల మార్పుకు మరియు x నిరూపకాలలో మార్పుకు గల నిష్పత్తికి, ఆరేఖ X-అక్షంతో చేయిచున్న కోణానికి సంబంధం ఉంది.

త్రికోణమితి అధ్యాయంలో మీరు $\tan\theta$ భావనను నేర్చుకుంటారు.

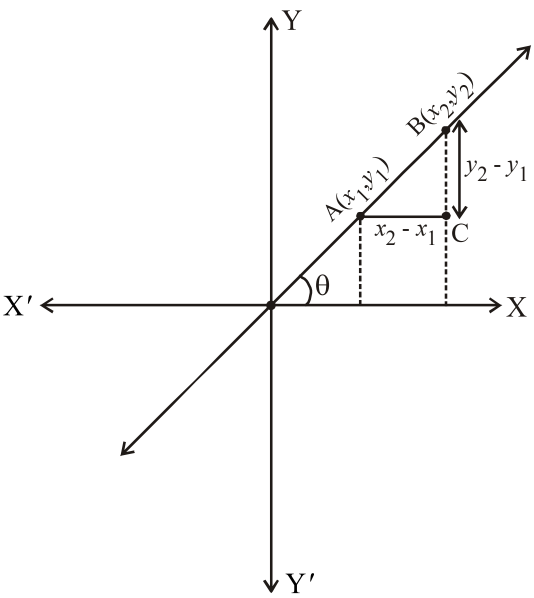
$$\text{అనగా} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{కోణం '}\theta\text{' కు ఎదుటిభుజం}}{\text{కోణం '}\theta\text{' కు ఆసన్నభుజం}} = \frac{y \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}$$

7.9.2 రెండు బిందువులను కలిపే రేఖ వాలు

రేఖ 'l' పై $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ రెండు బిందువులను కుందాం (పటంలో చూపినట్లు)

$$\text{రేఖ యొక్క వాలు} = \frac{y \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}$$

$$\text{రేఖాఖండం } \overline{AB} \text{ వాలు} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



వాలును 'm' తో సూచిస్తారు. మరియు రేఖ 'l' X –అక్షంతో 'θ' కోణం చేస్తుంది.

అందువల్ల రేఖాఖండం $\overline{AB}$ అనునది రేఖ $\overline{AC}$ తో కూడా 'θ' కోణం చేస్తుంది.

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{కోణం '}\theta\text{' కు ఎదుటిభుజం}}{\text{కోణం '}\theta\text{' కు ఆసన్నభుజం}}$$

$$= \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\therefore m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ఇది బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడిన రేఖాఖండం $\overline{AB}$ యొక్క వాలును కనుగొనుటకు సూత్రం.

X-అక్షంతో రేఖ చేయు కోణం 'θ' అయితే, అపుడు వాలు $m = \tan\theta$.

ఉదాహరణ-23. ఒక రేఖాఖండం యొక్క తొలి, చివరిబిందువులు వరుసగా (2, 3), (4, 5). ఆ రేఖాఖండం యొక్క వాలును కనుగొనండి.

సాధన : రేఖాఖండం యొక్క తొలి, చివరి బిందువులు (2, 3), (4, 5) అయిన ఆ రేఖాఖండం వాలు

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

ఇచ్చిన రేఖాఖండం యొక్క వాలు = 1.

ఇవి చేయండి.

కింది బిందువులతో ఏర్పడు రేఖాఖండము $\overline{AB}$ వాలును కనుగొనండి.

1. A(4, –6) B(7, 2)
2. A(8, –4), B(–4, 8)
3. A(–2, –5), B(1, –7)

ప్రయత్నించండి

కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు $\overline{AB}$ రేఖపై ఉన్నవి. $\overline{AB}$ రేఖ వాలు కనుగొనండి.

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(–4, 2), B(–4, –2)
3. A(–2, 8), B(–2, –2)
4. "ఇచ్చిన బిందువులతో ఏర్పడు $\overline{AB}$ రేఖాఖండం Y–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది". ఈ వాక్యము సరైనదేనా? ఎందుకు? అయితే వాలు ఏవిధంగా ఉంటుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

బిందువులు A(3, 2), (–8, 2) లు $\overline{AB}$ రేఖపై ఉన్నచో ఆ రేఖ వాలును కనుగొనండి.

$\overline{AB}$ రేఖ ఎప్పుడు X-అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది? ఎందుకు? మీ స్నేహితులతో గ్రూపులలో చర్చించండి.

ఉదాహరణ-24. బిందువులు P(2, 5) మరియు Q(x, 3) ల గుండా పోయే రేఖవాలు 2 అయిన x విలువను కనుగొనుము.

సాధన : బిందువులు P(2, 5) మరియు Q(x, 3) ల గుండా పోయేరేఖ వాలు 2.

ఇక్కడ, $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $x_2 = x$, $y_2 = 3$

$$\text{PQ రేఖవాలు} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2 = \frac{3-5}{x-2} = \frac{-2}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-2} = 2 \Rightarrow -2 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

అభ్యాసం - 7.4

1. రెండు బిందువులను కలుపుచూ గీయబడిన రేఖవాలు కనుగొనండి

 (i) $(4, -8)$ మరియు $(5, -2)$

 (ii) $(0, 0)$ మరియు $(\sqrt{3}, 3)$

 (iii) $(2a, 3b)$ మరియు $(a, -b)$

 (iv) $(a, 0)$ మరియు $(0, b)$

 (v) $A(-1.4, -3.7)$, $B(-2.4, 1.3)$

 (vi) $A(3, -2)$, $B(-6, -2)$

 (vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$

 (viii) $A(0, 4)$, $B(4, 0)$

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[ఈ అభ్యాసంలోని ప్రశ్నలు పరీక్షలో ఇవ్వడం కోసం కాదు]

1. వృత్తం 'Q' యొక్క కేంద్రం Y-అక్షంపై ఉన్నది. మరియు ఈ వృత్తం బిందువులు (0, 7) మరియు (0, −1)ల గుండా పోతుంది. వృత్తం 'Q' ధన X-అక్షాన్ని బిందువు (P, 0) వద్ద ఖండించిన 'P' విలువ ఎంత?
2. బిందువులు $A(2, 3)$, $B(-2, -3)$ మరియు $C(4, 23)$ శీర్షాలతో త్రిభుజం ΔABC ఏర్పడినది. భుజం BC మరియు శీర్షం A యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువును కనుగొనండి.
3. సమబాహు త్రిభుజం ΔABC యొక్క భుజం BC X- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంది. దాని భుజాలు BC, CA, ABల గుండా పోయే సరళరేఖల వాలులు కనుగొనుము.
4. $a > b$ అయ్యేటట్లు భుజాలు 'a', 'b' లు కలిగిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔABC ఉంది. దానిలో లంబకోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖ ద్వారా ఏర్పడిన రెండు చిన్న త్రిభుజాల లంబకేంద్రాల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనుము.
5. $2x + 3y - 6 = 0$ అను సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రంను కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. రెండు బిందువులు $P(x, y)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ ల మధ్యదూరం $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. మూలబిందువు నుండి ఒక బిందువు (x, y)ల మధ్యదూరం $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Y-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండి (x_1, y_1) మరియు (x_1, y_2) బిందువుల మధ్యదూరం $|y_2 - y_1|$.
4. X- అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండి (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల మధ్యదూరం $|x_2 - x_1|$.
5. బిందువులు A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును బిందువు P(x, y) $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తే P బిందువు నిరూపకాలు $\left[\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right]$.
6. రెండు బిందువులు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
7. ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యగతరేఖలను 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు దాని గురుత్వకేంద్రం.
8. ఒక త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువును ఆ త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రం అంటారు. గురుత్వకేంద్రం నిరూపకాలు $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.
9. బిందువులు (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) లచే ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$$

10. త్రిభుజ వైశాల్యం – హెరాన్ సూత్రం

$$A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)} \qquad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

(a, b, c లు ΔABC యొక్క భుజాలు)

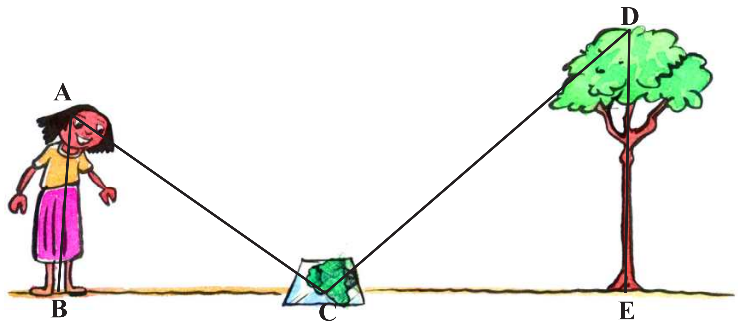
11. సరళరేఖ వాలు $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

అధ్యాయము

8 సరూప త్రిభుజాలు

(Similar Triangles)

8.1 పరిచయం

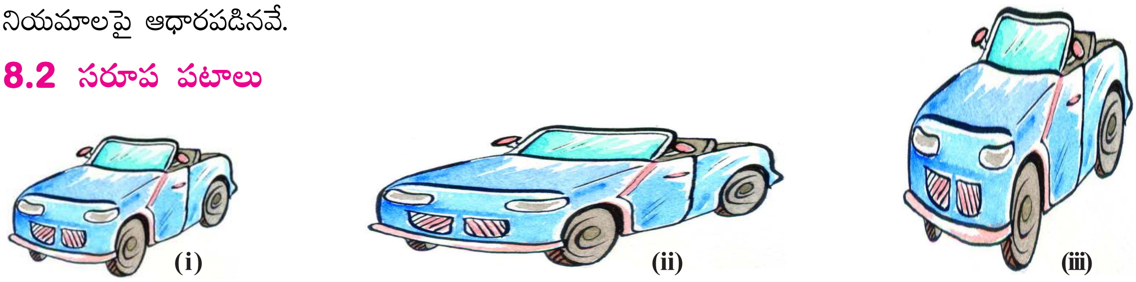


స్నిగ్ధ వాళ్ళ ఇంటి పెరట్లో ఒక పొడవైన చెట్టు వుంది. స్నిగ్ధ దాని పొడవు ఎంతో తెలుసుకోవాలని అను కొంది, కాని దానిని ఎలా కనుక్కోవాలో ఆమెకు తెలియదు. ఇంతలో ఆమె మావయ్య యింటికి వచ్చాడు. స్నిగ్ధ వాళ్ళ మావయ్యను యీ చెట్టు పొడవు కనుక్కోవడంలో సహాయం చేయమని అడిగింది. అతను కొంతసేపు ఆలోచించి, ఆమెను ఒక అద్దం తెమ్మని చెప్పాడు. అతను ఆ అద్దాన్ని నేలపై చెట్టు మొదలు నుండి కొంత దూరంలో వుంచాడు. అపుడు స్నిగ్ధను అద్దానికి అవతలివైపు ఏ స్థానం నుండి అద్దంలో చెట్టుపై భాగాన్ని చూడగలదో అక్కడ నిలబడమని చెప్పాడు.

మనం పటాన్ని గీసినపుడు, బాలిక (AB) నుండి అద్దం (C) మరియు అద్దం నుండి చెట్టు (DE) వరకు గీసిన పై పటంలో వలె త్రిభుజములు ABC మరియు DEC లను గమనించవచ్చును. మరి యీ రెండు త్రిభుజాల గురించి మీరు ఏమీ చెప్పగలరు ? అవి సర్వసమాన త్రిభుజాలా ? కాదు కదా ఎందుకంటే వాటి ఆకారాలు ఒకటే కాని పరిమాణాలు మాత్రం వేరుగా వున్నాయి. ఇలా ఆకారాలు ఒకటే వుండి ఒకే పరిమాణం వుండనవసరం లేని జ్యామితీయ పటాలను ఏమంటారో మీకు తెలుసా ? అవి సరూప పటాలు.

చెట్లు మరియు కొండల ఎత్తును, సూర్యుడిలా దూరంగా నున్న వాటి మధ్య దూరాలను ఎలా కనుగొంటారో నీవు ఊహించగలవా ? వీటిని మనం ప్రత్యక్షంగా టేపు సహాయంతో కొలవగలమా ? నిజానికి ఈ ఎత్తులు మరియు దూరాలను మనం పరోక్ష పద్ధతుల ద్వారా కనుగొంటాము. ఈ పరోక్ష పద్ధతులన్నీ సరూప పటాల నియమాలపై ఆధారపడినవే.

8.2 సరూప పటాలు



పైన ఇచ్చిన వస్తువు (కారు) పటాన్ని పరిశీలించండి.

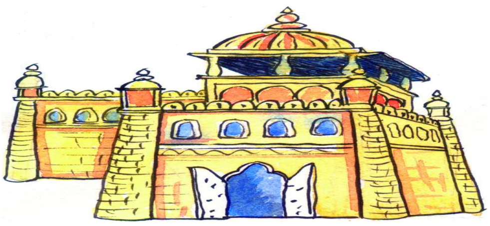
దానివెడల్పును మార్చకుండా, పొడవును రెట్టింపు చేసినపుడు అది పటము (ii)లో వలె కనిపిస్తుంది.

అదే పటము (i)లోని పొడవును అలాగే వుంచి, వెడల్పును రెట్టింపు చేసినపుడు అది పటము(iii)లో వలె కనిపిస్తుంది.

మరి పటము (ii) మరియు పటము (iii) ల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? అవి పటము(i)ని పోలి వున్నాయా? పటము విరూపమవడాన్ని గమనించవచ్చును. అవి సరూపాలని మీరు చెప్పగలరా? లేదుకదా ఎందుకంటే అవి ఒకే ఆకారాన్ని కలిగి వున్నప్పటికీ సరూపాలు కావు.

ఒక ఫోటోగ్రాఫర్ ఒకే ఫిల్మ్ (నెగెటివ్) నుండి వేరు వేరు పరిమాణాలు గల ఫోటోలను ఎలా ముద్రించగలుగుతుందో ఆలోచించండి. మీరు యీ ఫోటోలలో స్టాంప్ సైజు, పాస్‌పోర్ట్ సైజు, కార్డు సైజు ఫోటోల గురించి వినే వుంటారు. ఆమె సాధారణంగా ఫోటోను 35 మి.మీ. పరిమాణం కలిగిన చిన్న ఫిల్మ్‌పై తీసుకొంటుంది. తరువాత దానిని 45 మి.మీ (లేదా 55 మి.మీ)కు పెద్దదిగా చేస్తుంది. ఆ చిన్న ఫోటోగ్రాఫ్‌లోని ప్రతీ రేఖా ఖండము 35 : 45 (లేదా 35 : 55) నిష్పత్తిలో పెద్దది కావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. ఇంకా రెండు వేరువేరు పరిమాణాలు కల ఆ ఫోటోగ్రాఫ్‌లలో కోణాలు సమానంగా వుండడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. అంటే ఆ ఫోటోగ్రాఫ్‌లు సరూపాలు.

(i)


(ii)

(iii)

అదే విధంగా జ్యామితిలో, భుజాల సంఖ్య సమానంగా వున్న రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి మరియు అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (లేదా) అనుపాతంలో వుండాలి.

ఒక బహుభుజిలో భుజాలన్నీ మరియు కోణాలన్నీ సమానంగా వుంటే దానిని క్రమ బహుభుజి అంటారు.

అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని సాధారణంగా స్కేలు (లేదా) స్కేలు గుణకం (లేదా) ప్రత్యామ్నాయ గుణకం అంటారు. నిజజీవితంలో ఒక భవనాన్ని నిర్మించడానికి ముందుగా దానిని కాగితముపై స్కేలునకు గీయుదురు. దానినే మనం బ్లూప్రింటు అంటాము.

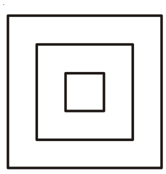
ఆలోచించండి, చర్చించండి.

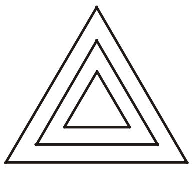
నిజ జీవితంలో ఇలా 'స్కేలు'ను వుపయోగించే సందర్భాలకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చెప్పగలరా?

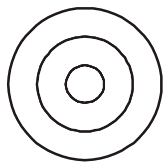
సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల అన్ని క్రమ బహుభుజులు ఎప్పుడూ సరూపాలే. ఉదాహరణకు అన్ని చతురస్రాలు సరూపాలు అలాగే అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు సరూపాలు మొదలైనవి.

ఒకే వ్యాసార్థము కలిగిన వృత్తాలు సర్వసమానాలు, కాని వేరువేరు వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలు సర్వసమానాలు కాదు. కాని ఆ వృత్తాలన్నింటికీ ఒకే ఆకారముంటుంది కావున అవి అన్నీ సరూపాలు.

ఇంకా సర్వసమాన పటాలన్నీ సరూపాలని మనం చెప్పగలము, కానీ అన్ని సరూప పటాలు, సర్వసమాన పటాలు కానవసరంలేదు.

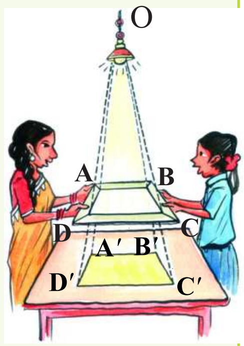

సరూప చతురస్రాలు


సరూప సమ బాహు త్రిభుజాలు


సరూప వృత్తాలు

ఈ సరూప పటాల గురించి మరింత స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

కృత్యము



మీ తరగతి గదిలోని పై కప్పుకు అమర్చిన బల్బుకు సరిగ్గా క్రిందకు వచ్చేటట్లు బల్లను అమర్చుము. ఒక సమతలంగా నున్న దళసరి అట్ట నుండి ఒక బహుభుజి (ABCD అనుకొనుము)ని కత్తిరించుము. దానిని నేలకు సమాంతరంగా బల్బుకు మరియు బల్లకు మధ్యలో అమర్చుము. అపుడు బల్లపై చతుర్భుజము ABCD నీడ ఏర్పడును. ఆ నీడ యొక్క అంచులను గీసి ఆ చతుర్భుజానికి $A'B'C'D'$ అని పేరు పెట్టుము.

ఈ చతుర్భుము $A'B'C'D'$ అనేది చతుర్భుజము ABCD కన్నా పెద్దది లేదా వృద్ధి చెందినది. ఇంకా బల్బు స్థానము ‘O’ అనుకుంటే A' అనేది కిరణము OA పై వుండును. అలాగే B' అనేది $\overrightarrow{OB}$ పై, C' అనేది $\overrightarrow{OC}$ పై మరియు D' అనేది $\overrightarrow{OD}$ పై వుండును. చతుర్భుజములు ABCD మరియు $A'B'C'D'$ లు ఒకే ఆకారము మరియు వివిధ పరిమాణము లకు చెందిన పటములు.

A' అనేది శీర్షము A కు అనురూపము. దీనిని మనం గణిత చిహ్నాలలో $A' \leftrightarrow A$ అని వ్రాస్తాము. అలాగే $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ మరియు $D' \leftrightarrow D$.

నిజంగా కోణాలను మరియు భుజాలను కొలిచి మనం

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ మరియు

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$ అని నిర్ధారించుకొనవచ్చును.

దీని నుండి సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలన్నీ సమానంగా వుండాలి.

(ii) వాటి అనురూపభుజాలన్నీ ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి (అనుపాతంలో వుండాలి) అని ధృవపడుతుంది.

ఒక చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రానికి సరూపమా? ఆ రెండు పటాలలలో అనురూపకోణాలు సమానము కాని అనురూపభుజాలు ఒకే నిష్పత్తి లో వుండవు. కనుక అవి సరూపాలు కావు. రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే పై రెండు నియమాల్లో ఏ ఒక్క నియమం సరిపోదు. రెండు నియమాలు తప్పని సరిగా పాటింపబడాలి.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఒక చతురస్రము, రాంబస్ సరూపాలని నీవు చెప్పగలవా ? నీ మిత్రులతో చర్చించుము. ఆ నియమాలు ఎందుకు సరిపోతాయి లేదా ఎందుకు సరిపోవో కారణాలు వ్రాయుము.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది ఖాళీలను సరూపాలు / సరూపాలు కావు చే పూరించండి.
   (i) అన్ని చతురస్రాలు ఎల్లప్పుడూ ....
   (ii) అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు ఎల్లప్పుడూ ....
   (iii) అన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజాలు ....
   (iv) సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజులలో అనురూపకోణాలు సమానము మరియు అనురూపభుజాలు సమానము అయిన అవి ....
   (v) పరిమాణము తగ్గించబడిన లేదా పెంచబడిన ఒక వస్తువు యొక్క ఫోటోగ్రాఫ్‌లు ....
   (vi) రాంబస్ మరియు చతురస్రాలు ఒకదానికొకటి........................
2. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమో, అసత్యమో రాయండి.
   (i) రెండు సరూపపటాలు సర్వసమానాలు
   (ii) రెండు సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు
   (iii) రెండు బహుభుజులకు అనురూపకోణాలు సమానాలైన అవి సరూపాలు.
3. ఈ క్రింది వాటికి రెండు వేరువేరు ఉదాహరణలివ్వండి.
   (i) సరూప పటాలు (ii) సరూప పటాలు కానివి

8.3 త్రిభుజాల సరూపత

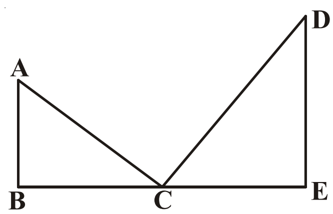
ముందు గీచిన త్రిభుజాలలో రెండు త్రిభుజాలు సరూపక ధర్మాన్ని ప్రదర్శించాయి. రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి.

(ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి (అనుపాతంలో వుండాలి) అని మనకు తెలుసు.

పరిచయంలో ΔABC మరియు ΔDEC లలో

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle DCE$



ఇంకా $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} = K$ (స్కేలు గుణకం)

అపుడు ΔABC, ΔDEC లు సరూపాలు అవుతాయి.

దీనినే మనం గుర్తులలో $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ అని వ్రాస్తాము.

('~' గుర్తును మనం 'సరూపము' అని చదువుతాము)

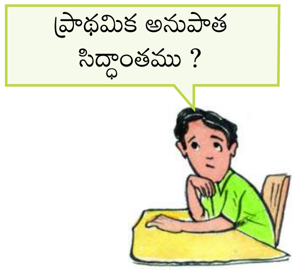
K అనేది స్కేలు గుణకం కావున

$K > 1$ అయిన పెద్దవి చేయబడిన పటాలు

$K = 1$ అయిన సర్వసమాన పటాలు

$K < 1$ అయిన చిన్నవి చేయబడిన పటాలు ఏర్పడతాయి.

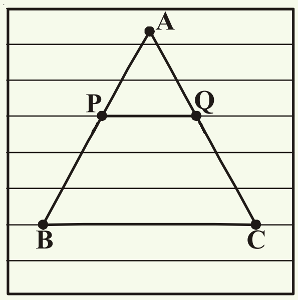
ఇంకా ΔABC మరియు ΔDEC లలో అనురూప కోణాలు సమానము. అందుకే వాటిని సమకోణీయ త్రిభుజములు అంటారు. రెండు సమకోణ త్రిభుజాలలో రెండు అనురూపభుజాల నిష్పత్తి యైనా ఒకేలా వుంటుంది. దీని నిరూపణకు ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము అవసరము. దీనినే మనము థేల్స్ సిద్ధాంతము అని కూడా అంటాము.



ఈ ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము లేదా థేల్స్ సిద్ధాంతమును అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

కృత్యము

ఒక రూళ్ళ కాగితాన్ని తీసుకొని, దానిలో ఏదైనా ఒక గీతతో భూమి ఏకీభవించేటట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి. ఈ త్రిభుజము ABC అనేక గీతలను తాకుతూ వుంటుంది. ఈ గీతలలో ఏదైనా ఒక గీతను ఎంచుకొని అది త్రిభుజ భుజాలు AB, AC లను తాకు బిందువులకు P, Q అని పేరు పెట్టుము.



$\frac{AP}{PB}$, $\frac{AQ}{QC}$ నిష్పత్తులను కనుగొనుము. మీరు ఏమి గమనించారు? ఆ నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. ఎందుకు? ఇది ఎప్పుడూ నిజమేనా? ఆ త్రిభుజమును తాకు వివిధ గీతలను తీసుకొని ప్రయత్నించుము. ఒక రూళ్ళ కాగితముపై అన్ని గీతలు సమాంతర రేఖలు అని మనకు తెలుసు. ఇంకా ప్రతీసారీ ఆ నిష్పత్తులు సమానంగా వుండటాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

కావున ΔABC లో, $PQ \parallel BC$ అయిన $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

ఇదే ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము యొక్క ఫలితము.

8.3.1 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము (థేల్స్ సిద్ధాంతము)

సిద్ధాంతము-8.1 : ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.

దత్తాంశము : ΔABC లో $DE \parallel BC$, DE రేఖ AB, AC భుజాలను వరుసగా D మరియు E వద్ద ఖండించును.

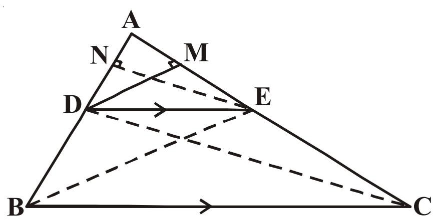
సారాంశము: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

నిర్మాణము : B, E మరియు C, D లను కలుపుము

మరియు $DM \perp AC$, $EN \perp AB$ గీయుము.

ఉపపత్తి : ΔADE వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDE వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$



$$\text{కావున } \frac{(\Delta ADE) \text{ వైశాల్యము}}{(\Delta BDE) \text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \frac{AD}{BD} \quad ...(1)$$

$$\text{మరల} \quad \Delta ADE \text{ వైశాల్యము} = \frac{1}{2} \times AE \times DM$$

$$\Delta CDE \text{ వైశాల్యము} = \frac{1}{2} \times EC \times DM$$

$$\frac{(\Delta ADE) \text{ వైశాల్యము}}{(\Delta CDE) \text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad ...(2)$$

ΔBDE, ΔCDE లు ఒకే భూమి DE మరియు సమాంతర రేఖలు BC మరియు DEల మధ్య వున్నట్లు గమనించవచ్చును..

కావున ΔBDE వైశాల్యము $= \Delta CDE$ వైశాల్యము ...(3)

(1), (2), (3) ల నుండి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము కూడా సత్యమేనా ? దీనిని నిర్ధారించుకొనుటకు మరొక కృత్యాన్ని చేద్దాము.

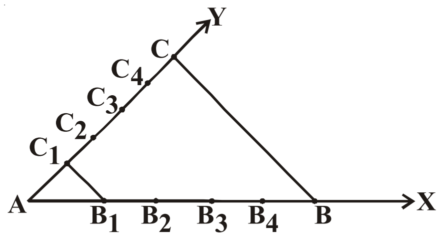
కృత్యము

మీ నోటు పుస్తకంలో కోణము XAY ని గీయండి. ఇంకా కిరణము AX పై $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$సెం.మీ (అనుకొనుము) వుండునట్లు బిందువులు B_1, B_2, B_3, B_4 మరియు B లను గుర్తించుము. అలాగే కిరణము AY పై , $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ సెం.మీ (అనుకొనుము) వుండునట్లు బిందువులు C_1, C_2, C_3, C_4 మరియు C లను గుర్తించుము.

B_1, C_1 మరియు B, C బిందువులను కలుపుము.

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ అని గమనించుము. మరియు $B_1C_1 \parallel BC$

అదే విధంగా B_2C_2, B_3C_3 మరియు B_4C_4 లను కలుపుము.



$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ మరియు $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ మరియు $B_3C_3 \parallel BC$

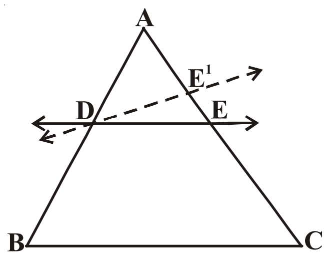
$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ మరియు $B_4C_4 \parallel BC$ అని మీరు చూడవచ్చును.

దీని నుండి ఈ క్రింది సిద్ధాంతము అనగా థేల్స్ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయమును పొందవచ్చును.

సిద్ధాంతము-8.2 : ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా వుండును.

దత్తాంశము : ΔABCలో, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగునట్లు గీయబడిన సరళరేఖ DE.

సారాంశము : $DE \parallel BC$



ఉపపత్తి : DE, BC కి సమాంతరము కాదు అనుకొనుము.

అపుడు BC కి సమాంతరంగా DE^1 ను గీయుము

అపుడు $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు ?)

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు ?)

ఇరువైపులా '1' కలుపగా, E మరియు E' లు తప్పనిసరిగా ఏకీభవించాలి అని తెలుస్తుంది. (ఎందుకు ?)

ప్రయత్నించండి

1. ΔPQR లో భుజాలు PQ మరియు PR లపై బిందువులు వరుసగా E మరియు F. ఈ క్రింది వాటిలో ప్రతి సందర్భంలో $EF \parallel QR$ అవునో, కాదో తెల్పండి.

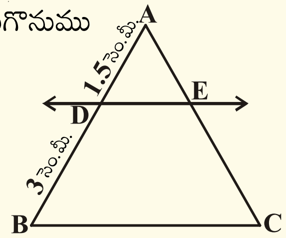
   (i) PE = 3.9 సెం.మీ EQ = 3 సెం.మీ PF = 3.6 సెం.మీ, FR = 2.4 సెం.మీ

   (ii) PE = 4 సెం.మీ, QE = 4.5 సెం.మీ, PF = 8 సెం.మీ, RF = 9 సెం.మీ.

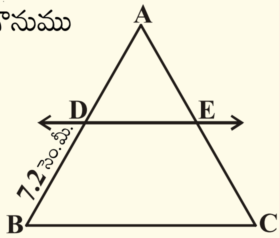
   (iii) PQ = 1.28 సెం.మీ PR = 2.56 సెం.మీ PE = 1.8 సెం.మీ, PF = 3.6 సెం.మీ.

2. ఈ క్రింది పటాలలో DE || BC.

(i) EC ని కనుగొనుము

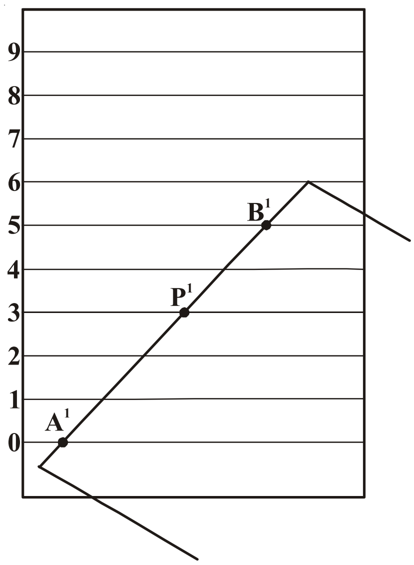


(ii) AD ని కనుగొనుము



నిర్మాణము : రేఖాఖండమును విభజించుట (థేల్స్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి)

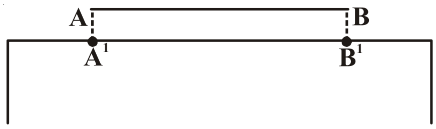
మాధురి ఒక రేఖాఖండమును గీసినది. దానిని 3 : 2 నిష్పత్తిలో విభజించాలనుకొంది. స్కేలు సహాయంతో ఆ రేఖాఖండమును కొలిచి దానిని కావలసిన నిష్పత్తిలో విభజించినది. ఇంతలో ఆమె అక్క వచ్చి ఆమెను ఆరేఖా ఖండమును కొలవకుండా కావలసిన నిష్పత్తిలో విభజించగలవా ? అని అడిగింది. కాని మాధురికి ఎలా చేయాలో తెలియక వాళ్ళ అక్కనే చెప్పమని అడిగింది. అప్పుడు వాళ్ళ అక్క ఇలా చెప్పింది. మీరు కూడా ఈ కృత్యాన్ని చేయవచ్చును.



కృత్యము

ఒక రూళ్ళ కాగితమును తీసుకొనుము. అడుగున వున్న గీతకు '0' యిచ్చి అన్ని గీతలకు వరుసగా సంఖ్యలు 1, 2, 3, 4, ...లను వ్రాయుము.

ఒక దళసరి అట్టను తీసుకొని ఇచ్చిన రేఖాఖండము AB వెంబడి వుంచి, ఆ రేఖా ఖండము చివరలను అట్టపై గుర్తించుము. ఆ బిందువు లను A^1, B^1 అని తీసుకొనుము.



ఇప్పుడు A^1 బిందువును రూళ్ళకాగితముపై 'O' రేఖ వద్ద వుంచి కార్డును A^1 చుట్టూ భ్రమణం చేస్తూ B^1 బిందువు 5వ రేఖపై వచ్చునట్లు చేయవలెను. (3 + 2).

అపుడు మూడవ రేఖ ఆ దళసరి అట్టను ఎక్కడ తాకునో ఆ బిందువును P^1 గా గుర్తించుము.

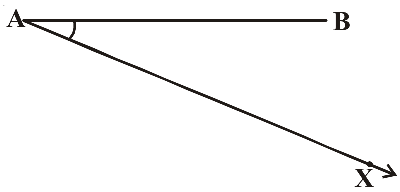
మరల ఈ అట్టను ఇచ్చిన రేఖాఖండము వెంబడి A^1 మరియు A, B^1 మరియు B లు ఏకీభవించునట్లు వుంచి, P^1 బిందువుకు అనుగుణంగా రేఖాఖండముపై 'P' బిందువును గుర్తించుము.

మనకు కావలసిన బిందువు 'P' . ఇది ఇచ్చిన రేఖా ఖండమును 3:2 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు.

యిపుడు ఈ నిర్మాణము ఎలా చేస్తారో నేర్చుకుందాము.

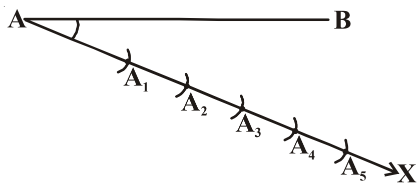
రేఖాఖండము AB ఇచ్చిన, దానిని మనం m : n నిష్పత్తిలో విభజించాలి. (m, n లు ధనపూర్ణ సంఖ్య) m = 3 మరియు n = 2 అనుకొనుము.

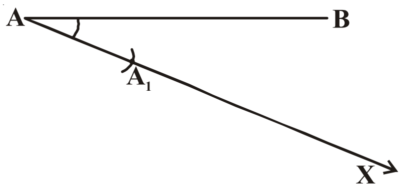
సోపానాలు :



1. రేఖా ఖండము AB తో అల్పకోణము చేయునట్లు కిరణము AX ను గీయుము.

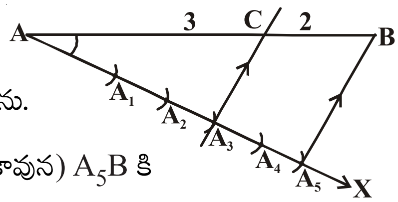
2. ‘A’కేంద్రముగా ఏదైనా కొలతల కిరణము AX పై ఒక చాపమును గీయుము. చాపము, కిరణమును ఖండించిన బిందువు A_1.





3. A_1 కేంద్రంగా అదే కొలతతో మరల కిరణముపై చాపమును గీయుము. చాపము, కిరణమును ఖండించిన బిందువు A_2.

4. ఈ విధంగా 5 బిందువులను గుర్తించుము ($5=m+n=3+2$) ఆ 5 బిందువులు A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 మరియు ఇవి $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ అయ్యేటట్లు వుండును.

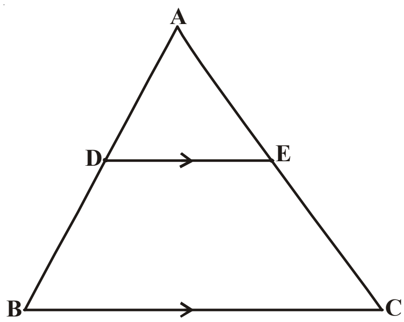


5. A_5, B బిందువులను కలుపుము. A_3 బిందువు గుండా($m = 3$ కావున) A_5B కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయుము ($\angle A\ A_5B$కి సమానమైన కోణము నిర్మించుట ద్వారా). ఇది AB ని C బిందువు వద్ద తాకును మరియు $AC : CB = 3 : 2$.

ఇపుడు మనం థేల్స్ సిద్ధాంతము మరియు దాని విపర్యయములపై కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం.

ఉదాహరణ-1. ΔABC లో, $DE \parallel BC$ మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$.

$AC = 5.6$. అయిన AE విలువ ఎంత?



సాధన : ΔABC లో, $DE \parallel BC$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి)

కాని $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ కావున $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

$AC = 5.6$ మరియు $AE : EC = 3 : 5$.

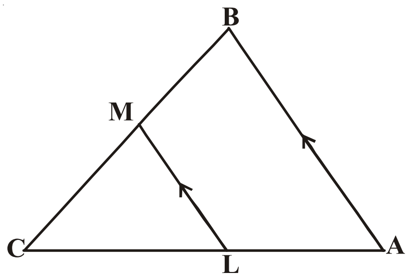
$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} = \frac{3}{5} \text{ (అడ్డగుణకారం చేయగా)}$$

$5AE = (3 \times 5.6) - 3AE$

$8AE = 16.8$

$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ సెం.మీ.



ఉదాహరణ-2. ఇచ్చిన పటంలో $LM \parallel AB$

$AL = x - 3$, $AC = 2x$, $BM = x - 2$

మరియు $BC = 2x + 3$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC లో, $LM \parallel AB$

$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC}$$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి)

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5}$$ (అడ్డగుణకారం చేయగా)

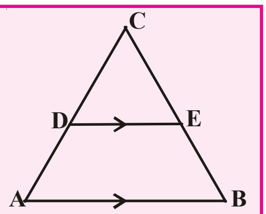
$$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3)$$

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

$$\Rightarrow 2x - 15 = x - 6$$

$$x = 9$$

ఇవి చేయండి



1. ఇచ్చిన పటంలో x యొక్క ఏ విలువ(లు)కు $DE \parallel AB$ అగును ?

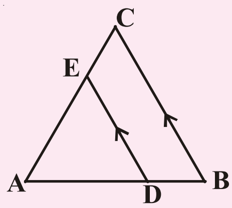
   $AD = 8x + 9$, $CD = x + 3$

   $BE = 3x + 4$, $CE = x$.

2. ΔABC లో $DE \parallel BC$. $AD = x$, $DB = x - 2$,

   $AE = x + 2$ మరియు $EC = x - 1$.

   అయిన x విలువను కనుగొనుము.



ఉదాహరణ-3. ఒక చతుర్భుజము ABCD లో కర్ణములు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును మరియు $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అయిన అది ఒక ట్రెపీజియం అని చూపండి.

సాధన : దత్తాంశము : చతుర్భుజము ABCD లో, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

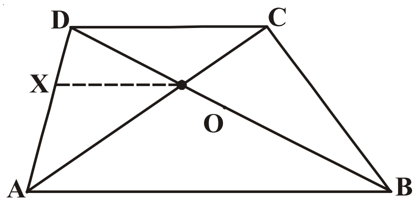
సారాంశము : ABCD ఒక ట్రెపీజియం.

నిర్మాణము : 'O' బిందువు గుండా ABకి సమాంతరంగా రేఖను గీసిన అది DA ను బిందువు 'X' వద్ద ఖండించును.

ఉపపత్తి : ΔDABలో, $XO \parallel AB$ (నిర్మాణము నుండి)

$$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB}$$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి)

$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD}$ ..... (1)



మరల $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (దత్తాంశము)

$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD}$ ..... (2)

(1) (2) ల నుండి

$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$

ΔADC లో, $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$ అగునట్లు XO రేఖ వున్నది

$\Rightarrow XO \parallel DC$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము విపర్యయము నుండి)

$\Rightarrow AB \parallel DC$

చతుర్భుజము ABCD లో, $AB \parallel DC$

$\Rightarrow$ ABCD ఒక ట్రెపీజియం (నిర్వచనం ప్రకారం)

కావున రుజువు చేయబడినది.

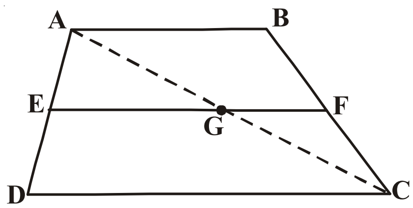
ఉదాహరణ-4. ట్రెపీజియం ABCDలో, $AB \parallel DC$. E మరియు F బిందువులు వరుసగా $EF \parallel AB$ అగునట్లు, సమాంతరం కాని భుజాలు AD, BC లపై నున్నవి. అయిన $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ అని చూపండి.

సాధన : A, C బిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన రేఖాఖండము EF ను G వద్ద ఖండించినది.

$AB \parallel DC$ మరియు $EF \parallel AB$ (దత్తాంశము)

$\Rightarrow EF \parallel DC$ (ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా నున్న రేఖలు సమాంతరాలు)

ΔADC లో, $EG \parallel DC$



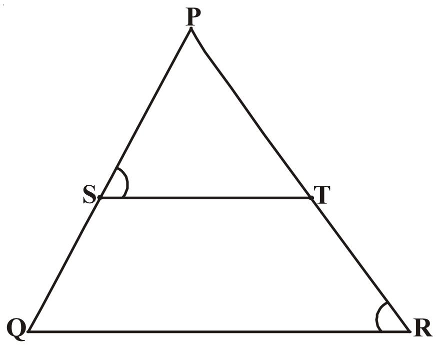
కావున $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత ప్రకారం) ...(1)

అదేవిధంగా, ΔCAB లో, $GF \parallel AB$

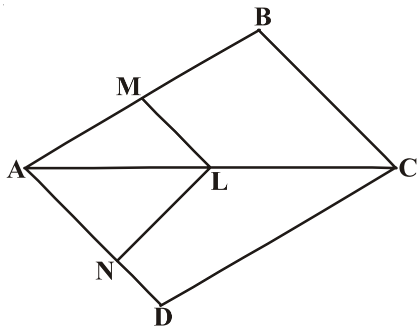
$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత ప్రకారం) అనగా $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ...(2)

(1), (2) ల నుండి, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

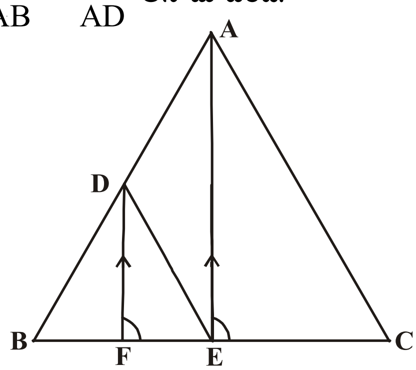
అభ్యాసము - 8.1



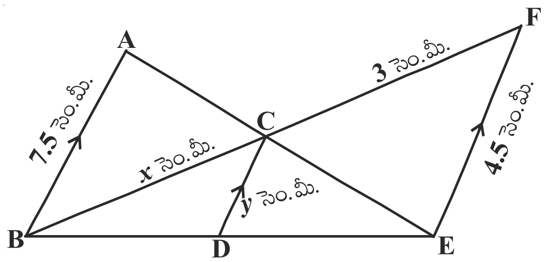
1. ΔPQR లో $\dfrac{PS}{SQ} = \dfrac{PT}{TR}$ అగునట్లు ST ఒక సరళరేఖ. ఇంకనూ $\angle PST = \angle PRQ$. అయిన ΔPQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.



2. ఇచ్చిన పటంలో, $LM \parallel CB$ మరియు $LN \parallel CD$ అయిన $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD}$ అని చూపండి.



3. ఇచ్చిన పటంలో, $DE \parallel AC$ మరియు $DF \parallel AE$ అయిన $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$ అని చూపండి.

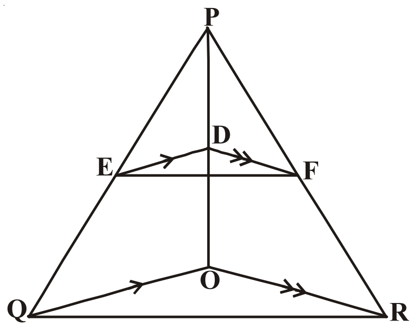


4. ఇచ్చిన పటంలో, $AB \parallel CD \parallel EF$.
   $AB = 7.5$ సెం.మీ $DC = y$ సెం.మీ
   $EF = 4.5$ సెం.మీ, $BC = x$ సెం.మీ.
   అయిన x , y విలువలను కనుగొనండి.

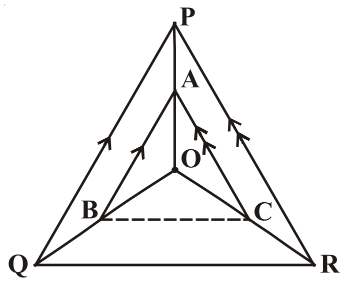
5. ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మధ్య బిందువు గుండా పోయేరేఖ, రెండవ భుజానికి సమాంతరంగా వుంటే అది మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి. (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుపయోగించి)

6. ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా వుంటుందని చూపండి. (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము నుపయోగించి)

7. ఇచ్చిన పటములో, $DE \parallel OQ$ మరియు $DF \parallel OR$ అయిన $EF \parallel QR$ అని చూపండి.



8. ప్రక్క పటంలో A, B, C లు వరుసగా OP, OQ మరియు OR లపై బిందువులు. AB || PQ మరియు AC||PR అయిన BC || QR అని చూపండి.



9. ట్రెపీజియం ABCD లో AB||DC. దాని కర్ణములు పరస్పరం బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. అయిన $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అని చూపండి.

10. 7.2 సెం.మీ పొడవు గల ఒక రేఖాఖండమును గీసి దానిని 5 : 3 నిష్పత్తిలో విభజించండి. ఏర్పడిన రెండు భాగముల పొడవులను కొలిచి రాయండి.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

త్రిభుజముల సరూపత అనేది మిగిలిన బహుభుజుల సరూపత కంటే ఏవిధంగా భిన్నమైనదో మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

8.4 త్రిభుజాల సరూపత నియామాలు

రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే వాటి అనురూపకోణాలు సమానంగా వుండాలి మరియు అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో వుండాలి అని మనకు తెలుసును. రెండు త్రిభుజాల సరూపకతను పరిశీలించడానికి అనురూప కోణాలు సమానంగా వున్నాయేమో పరిశీలించాలి ఇంకా అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమేమో పరిశీలించాలి. రెండు త్రిభుజాల సరూపకతను పరిశీలించడానికి కొన్ని నియమాలను ఏర్పరచే ప్రయత్నము చేద్దాము. ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేయండి.

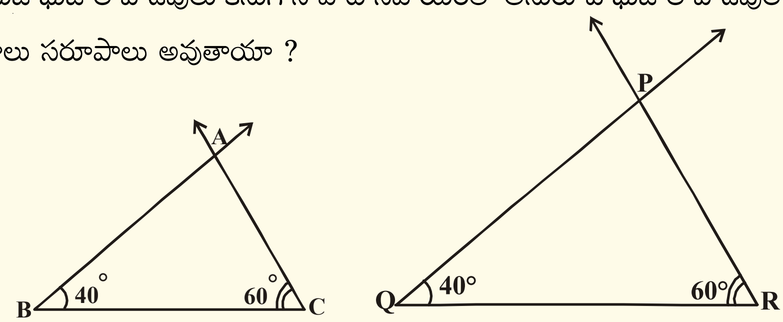
కృత్యము

ఒక కోణ మానిని మరియు స్కేలును ఉపయోగించి సర్వసమానము కాని రెండు త్రిభుజాలను గీయండి. ప్రతీ త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు 40° మరియు 60° వుండాలి. ప్రతీ త్రిభుజములోని మూడవకోణము కొలతను పరిశీలించండి.

అది 80° ఉంటుంది (ఎందుకు?)

ఇపుడు త్రిభుజ భుజాల పొడవులు కనుగొని వాటి సహాయంతో అనురూప భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

ఈ త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయా ?



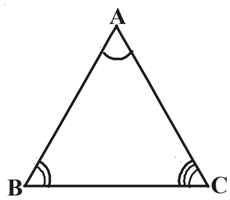
ఈ కృత్యము ద్వారా త్రిభుజాల సరూపతకు మనం ఈ క్రింది నియమాన్ని చెప్పవచ్చును.

8.4.1 త్రిభుజాల సరూపకతకు కో.కో.కో నియమము

సిద్ధాంతము-8.3 : రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా వుంటే, వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. (అనుపాతంలో వుంటాయి). ఇంకా ఆ రెండు భుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి.

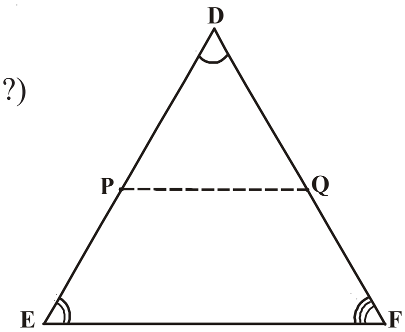
దత్తాంశము : ΔABC, ΔDEF లలో,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$



సారాంశము : $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

నిర్మాణము : AB = DP మరియు AC = DQ అగునట్లు DE మరియు DF లపై వరుసగా బిందువులు P మరియు Q లను గుర్తించుము. P, Q లను కలుపుము.



ఉపపత్తి : $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎందుకు ?)

దీని నుండి $\angle B = \angle P = \angle E$ మరియు PQ || EF (ఎలా ?)

$\therefore \dfrac{DP}{PE} = \dfrac{DQ}{QF}$ (ఎందుకు ?)

అనగా $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ఎందుకు ?)

అదేవిధంగా $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ కాబట్టి $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$.

గమనిక : ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజము లోని రెండు కోణములకు సమానమైన, త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం, ఆరెండు త్రిభుజాలలోని మూడవ కోణాలు కూడా సమానము అవుతాయి.

దీని నుండి కో.కో. సరూప నియమాన్ని ఈ విధంగా చెబుతాము. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

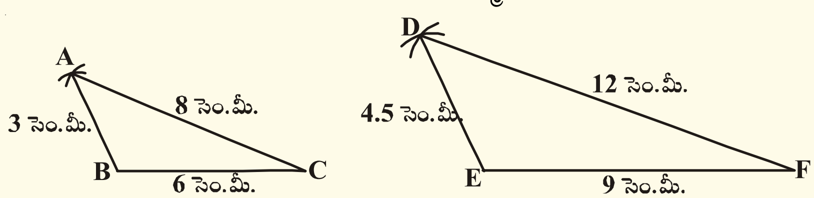
మరి పై ప్రవచనము యొక్క విపర్యయము ఏమిటి?

ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని అనురూపభుజాలతో అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానమనుట సరియేనా ?

దీనిని మనము ఈ క్రింది కృత్యము ద్వారా పరిశీలిద్దాము.

కృత్యము

AB = 3 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, CA = 8 సెం.మీ కొలతలతో ΔABCని, DE = 4.5 సెం.మీ, EF = 9 సెం.మీ, FD = 12 సెం.మీ కొలతలతో Δ DEF ను నిర్మించుము.



ఆ రెండు త్రిభుజాలలో $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$.

ఇప్పుడు ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని కోణాలను కోణమానినితో కొలిచిన, మీరు ఏమి గమనిస్తారు? వాటి అనురూప కోణాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? అవి సమానాలు కదా, యింకా రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. వివిధ త్రిభుజాలను గీసి ఈ ఫలితాన్ని మీరు సరిచూడవచ్చును.

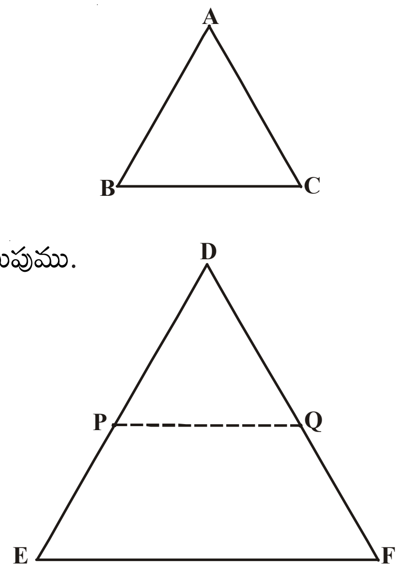
పై కృత్యము ద్వారా త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి ఈ క్రింది నియమాన్ని చెప్పవచ్చును.

8.4.2. త్రిభుజాల సరూపకతకు భు.భు.భు. నియమము

సిద్ధాంతము-8.4 : రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

దత్తాంశము : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) అగునట్లు

ΔABC మరియు ΔDEF లను తీసుకొనుము.



సారాంశము : $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

నిర్మాణము : $AB = DP$ మరియు $AC = DQ$ అగునట్లు DE, DF లపై వరుసగా P మరియు Q బిందువులను గుర్తించుము. P,Q లను కలుపుము.

ఉపపత్తి : $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ మరియు $PQ \parallel EF$ (ఎందుకు ?)

కావున $\angle P = \angle E$ మరియు $\angle Q = \angle F$ (ఎందుకు ?)

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

కాని $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ఎందుకు ?)

కాని $BC = PQ$ (ఎందుకు ?)

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎందుకు ?)

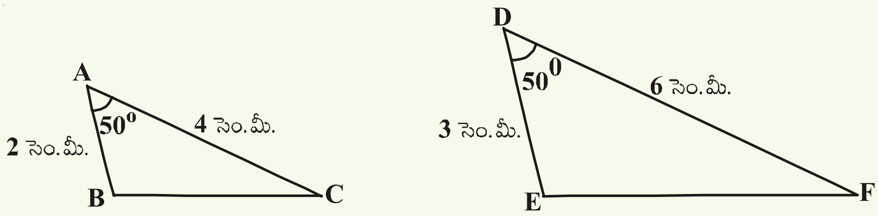
కావున $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ (ఎలా ?)

బహుభుజుల సరూపకతకు సంబంధించి ఒక్క నియమం సరిపోదని మనం చదివాము. కాని త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి రెండు నియమాలు అవసరం లేదు. ఎందుకంటే ఒక నియమం వుంటే రెండవ నియమం వున్నట్లే. ఇపుడు మనం భు.కో.భు. సరూపనియమాన్ని నేర్చుకుందాం. దాని కొరకు ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

కృత్యము

AB = 2 సెం.మీ, $\angle A = 50^0$ AC = 4 సెం.మీ.

వుండునట్లు ΔABCని DE = 3 సెం.మీ., $\angle D = 50^0$, DF = 6 సెం.మీ. వుండునట్లు ΔDEF ను గీయుము.



$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ మరియు $\angle A = \angle D = 50^0$ అని పరిశీలించుము.

ఇపుడు $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle F$ లను మరియు BC, EF లను కొలుచుము.

$\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ ఇంకా $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ అని పరిశీలించవచ్చును.

కావున ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. వివిధ కొలతలు గల త్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. దీని నుండి త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి క్రింది నియమం వస్తుంది.

8.4.3 త్రిభుజాల సరూపకతకు భు.కో.భు నియమము

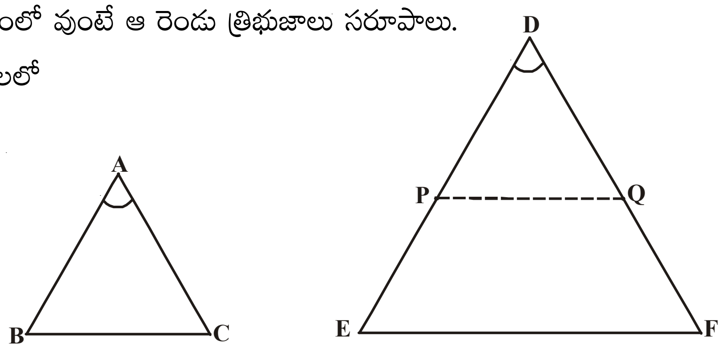
సిద్ధాంతము-8.5 : ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి వున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

దత్తాంశము : ΔABC మరియు ΔDEF లలో

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (<1) మరియు

$\angle A = \angle D$

సారాంశము : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



నిర్మాణము : AB = DP మరియు AC = DQ అగునట్లు DE, DF భుజాలపై వరుసగా P, Q బిందువులను గుర్తించుము. P, Q లను కలుపుము.

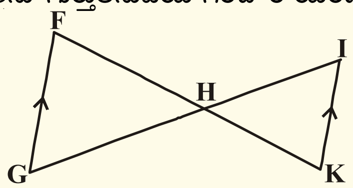
ఉపపత్తి : PQ || EF మరియు $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎలా ?)

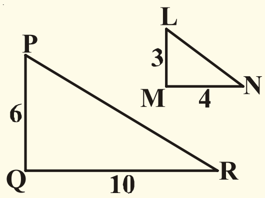
కావున $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle Q$

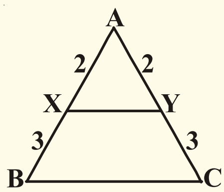
$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ఎందుకు ?)

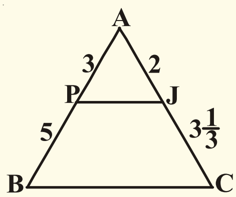
ప్రయత్నించండి.

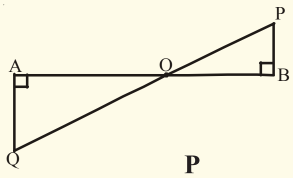
1. క్రింది త్రిభుజాలు సరూపాలా ? సరూపాలయితే ఏ నియమం ఆధారంగానో వివరించండి. త్రిభుజాల సరూపకతను గుర్తులనుపయోగించి రాయండి.

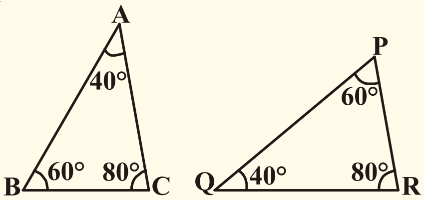
(i)


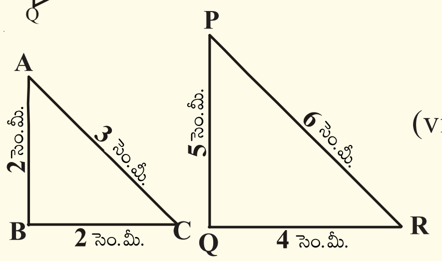
(ii)


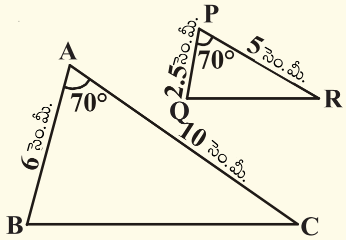
(iii)


(iv)


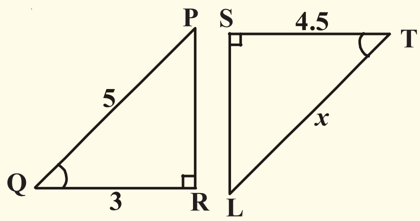
(v)


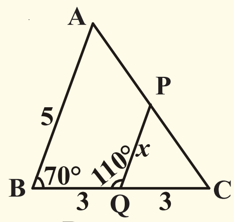
(vi)


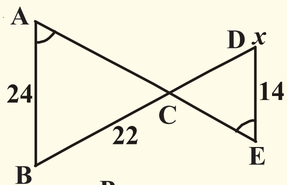
(vii)


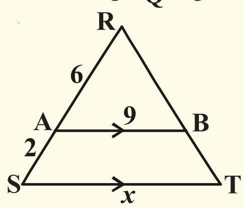
(viii)


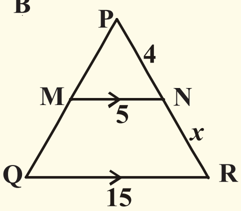
2. ఈ క్రింది త్రిభుజాలు ఎందుకు సరూపాలో వివరించి అపుడు 'x' విలువను కనుగొనండి.

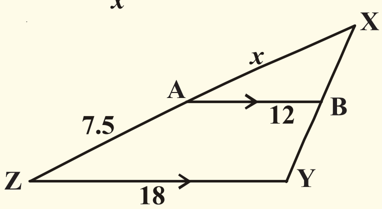
(i)


(ii)


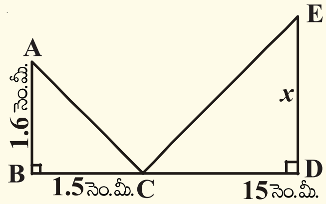
(iii)


(iv)


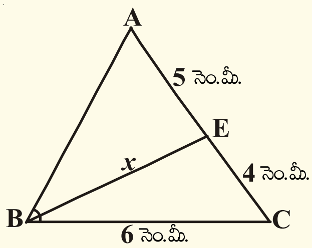
(v)


(vi)


(vii)

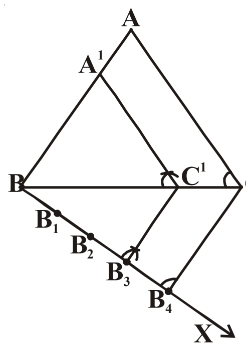


(viii)



నిర్మాణము : ఇచ్చిన స్కేలు ప్రకారము ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపంగా వుండేటట్లు త్రిభుజాన్ని నిర్మించడము.

a) ఇచ్చిన త్రిభుజము ABC కి సరూపంగా వుంటూ, ΔABC భుజాలలో $\frac{3}{4}$ వంతు వుండేటట్లు అనురూప భుజాలు కలిగిన త్రిభుజమును నిర్మించుము. (స్కేలు గుణకము $\frac{3}{4}$)



సోపానములు 1. BC భుజానికి శీర్షము A వున్న వైపుకు వ్యతిరేఖదిశలో దానితో అల్పకోణము చేయునట్లు BX కిరణమును గీయుము.

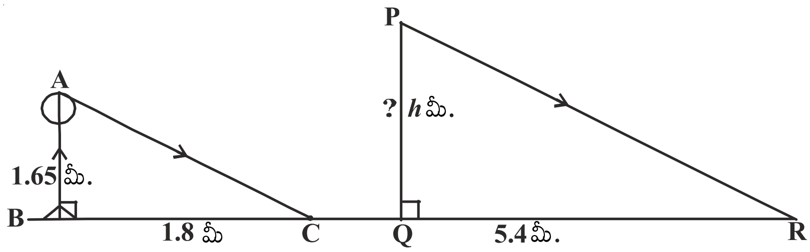
2. ఈ BX పై $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ అగునట్లు నాలుగు బిందువులు B_1, B_2, B_3, B_4 లను గుర్తించుము.

3. B_4C ని కలుపుము. B_3 గుండా B_4C కి సమాంతరంగా వుండేటట్లు రేఖను గీసిన అది BC ని C' వద్ద ఖండించును.

4. C' గుండా CA కు సమాంతరంగా గీసిన రేఖ BA ను A'. వద్ద ఖండించును. కావున $\Delta A'BC'$ మనకు కావలసిన త్రిభుజము.

ఈ సరూప త్రిభుజాల నియమాలనుపయోగించుకొనే మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ-5. 1.65మీ పొడవు గల ఒక వ్యక్తి నీడ పొడవు 1.8 మీ. అదే సమయంలో, ఒక దీపస్తంభము 5.4 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ దీప స్తంభము పొడవు ఎంత?



సాధన: ΔABC మరియు ΔPQR లలో

$\angle B = \angle Q = 90^0$.

$\angle C = \angle R$ (AC || PR, ఏ సమయంలోనైనా సూర్యకిరణాలు సమాంతరాలు)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (కోకో సరూపనియమం ప్రకారం)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (సరూపత్రిభుజాల అనురూపభుజాలు)

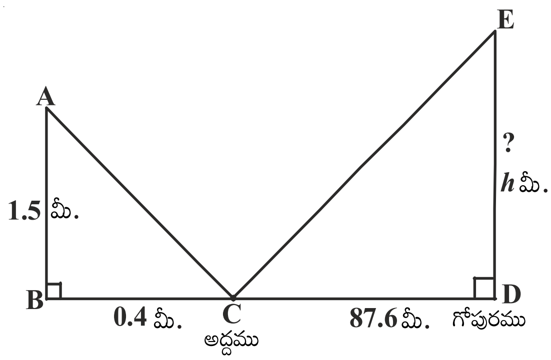
$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$$

ఆ దీప స్తంభము ఎత్తు 4.95మీ.

ఉదాహరణ-6. ఒక గోపురము నుండి 87.6 మీటర్ల దూరములో వుంచిన అద్దములో ఒక వ్యక్తి గోపుర శిఖరమును చూసెను. అద్దము నేలపై ఊర్ధ్వ దిశలో వుంచబడినది మరియు ఆ వ్యక్తి అద్దము నుండి 0.4మీ దూరములో వున్నాడు. అతని కంటి చూపు భూమి నుండి 1.5 మీటర్ల ఎత్తులో నున్న ఆ గోపురము ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC మరియు ΔEDC లలో



$\angle ABC = \angle EDC = 90°$

$\angle BCA = \angle DCE$ (పతన కోణము మరియు పరావర్తన కోణములు సమానము)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (కోకో సరూప నియమం)

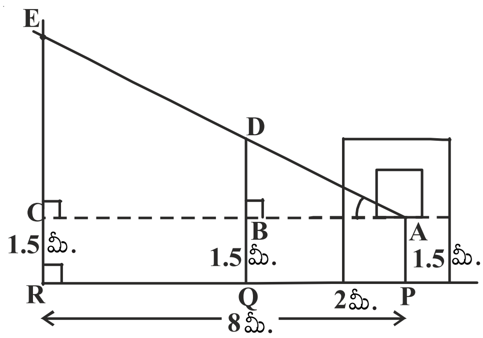
$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5 \text{ మీ.}$$

కావున, ఆగోపురము ఎత్తు 328.5మీ.

ఉదాహరణ7. గోపాల్ తన ఇంటి హాలు ప్రక్క అపార్టుమెంటు పై అంతస్థులోని కిటికీ వద్ద నిలుచునే వ్యక్తులకు ఎప్పుడూ కనిపిస్తూ వుంటోందని ఆందోళన పడుతున్నాడు. దాని కొరకు వారికి కనిపించకుండా వుండేటందుకు తన యింటి ప్రహరి గోడ ఎత్తు పెంచాలను కొన్నాడు. కొలతలు పటంలో ఈయబడ్డాయి. ప్రహరి గోడను ఎంత ఎత్తు వరకు నిర్మించాలి ?

సాధన : ΔABD మరియు ΔACE లలో



$\angle B = \angle C = 90°$

$\angle A = \angle A$ (ఉమ్మడికోణం)

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (కోకో సరూపనియమం)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{1.2}$$

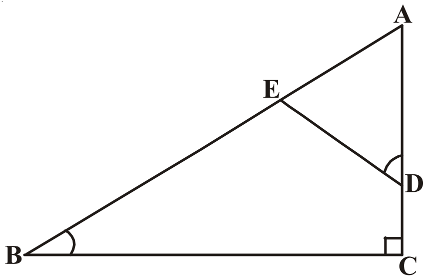
$$BD = \frac{2 \times 1.2}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3\text{మీ}$$

ప్రహరిగోడ కావలసిన ఎత్తు = 1.5 మీ + 0.3 మీ

1.8 మీ ఎత్తు నిర్మించిన, ప్రహరీగోడ హాలు ప్రక్క యింటి వారికి కన్పించకుండా చేయవచ్చును.

అభ్యాసము - 8.2

1. ఇచ్చిన పటంలో, $\angle ADE = \angle B$



   (i) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ అని చూపండి.

   (ii) $AD = 3.8$ సెం.మీ, $AE = 3.6$ సెం.మీ

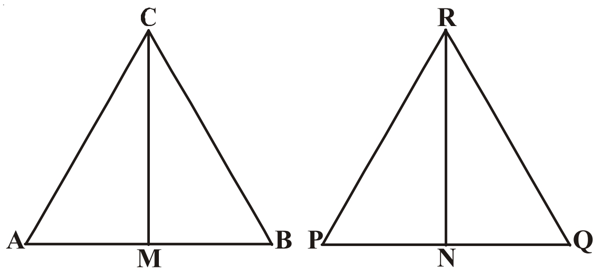
   $BE = 2.1$ సెం.మీ $BC = 4.2$ సెం.మీ

   అయిన DE పొడవును కనుగొనండి.

2. రెండు సరూప త్రిభుజాల చుట్టు కొలతలు వరుసగా 30 సెం.మీ మరియు 20 సెం.మీ మొదటి త్రిభుజములోని ఒక భుజము కొలత 12 సెం.మీ అయిన రెండవ త్రిభుజములో దాని అనురూపభుజము కొలతను కనుగొనండి.

3. 90 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక బాలిక దీపస్తంభము నుండి దూరముగా 1.2 మీ/సె. వేగముతో నడుచుచున్నది. దీప స్తంభము ఎత్తు 3.6 మీ అయిన 4 సెంకడ్ల తరువాత ఏర్పడే ఆ బాలిక నీడ పొడవును కనుగొనుము.

4. CM మరియు RN లు వరుసగా ΔABC మరియు ΔPQR లలో గీయబడిన మధ్యగత రేఖలు. అయిన



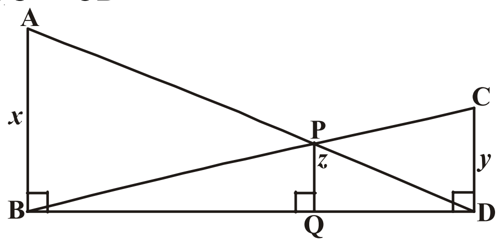
   (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

   (ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

   (iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ అని చూపండి.

5. ట్రెపీజియం ABCDలో $AB \parallel DC$. కర్ణములు AC మరియు BD లు బిందువు 'O' వద్ద ఖండిచుకొనును. త్రిభుజముల సరూప నియమాలను పయోగించుకొని $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ అని చూపండి.

6. AB, CD, PQ లు BD కి గీసిన లంబాలు. $AB = x$, $CD = y$ మరియు $PQ = Z$ అయిన $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ అని చూపండి.



7. 4మీ. పొడవు గల ఒక జెండా స్తంభము 6 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచును. అదే సమయంలో దగ్గరలో గల ఒక భవనం 24మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ భవనము ఎత్తు ఎంత?

8. ABC మరియు FEG త్రిభుజాలలో AB మరియు FE భుజాలపై D మరియు H బిందువులు వరుసగా ఏర్పడునట్లు $\angle ACB$ మరియు $\angle EGF$ లకు గీసిన కోణ సమద్విఖండన రేఖలు వరుసగా CD మరియు GHలు. ఇంకా $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ అయిన

   (i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGF$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

   అని చూపండి.

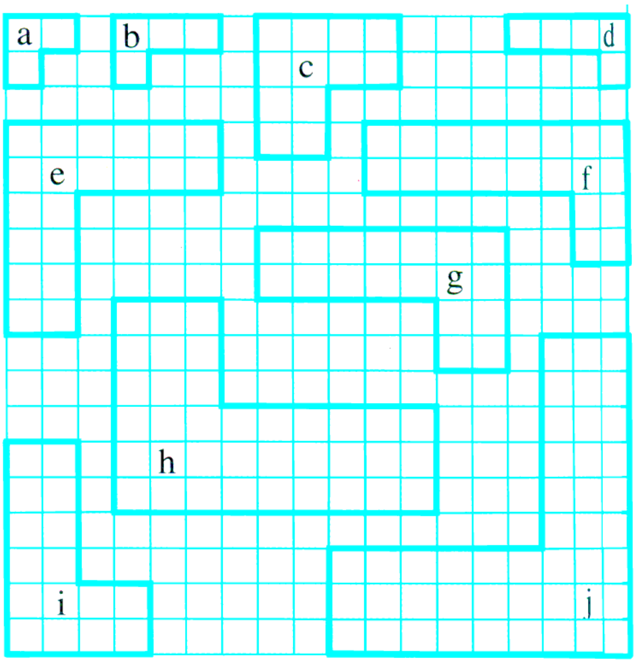
9. ΔABC మరియు ΔDEF సరూపత్రిభుజాలలో గీసిన లంబాలు AX మరియు DY అయిన AX : DY = AB : DE అని నిరూపించండి.

10. ఇచ్చిన త్రిభుజము ABCకి సరూపంగా వుంటూ, దాని భుజాలకు $\frac{5}{3}$ రెట్లు వుండే అనురూప భుజాలు కలిగిన త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

11. 4సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 6 సెం.మీ. కొలతలతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. దీనితో సరూపంగా వుంటూ ఈ త్రిభుజ భుజాలకు $\frac{2}{3}$ రెట్లు అనురూప భుజాల కొలతలు కలిగిన త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

12. భూమి 8 సెం.మీ మరియు దానికి గీసిన లంబము 4 సెం.మీ. వుండునట్లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమును గీయండి. ఈ త్రిభుజభుజాలకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు అనురూప భుజాల పొడవులు కలిగి యిచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపంగా వుండేటట్లు వేరొక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

8.5 సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు



రెండు సరూప త్రిభుజాలకు వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం. మరి ఈ అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి, వాటి వైశాల్యాలకు ఏదైనా సంబంధము వుందని నీవు భావిస్తున్నావా? ఇది అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

కృత్యము : ఇచ్చిన పటంలో సరూప బహుభుజుల జతలను ఒక జాబితాగా తయారుచేయండి.

వాటి

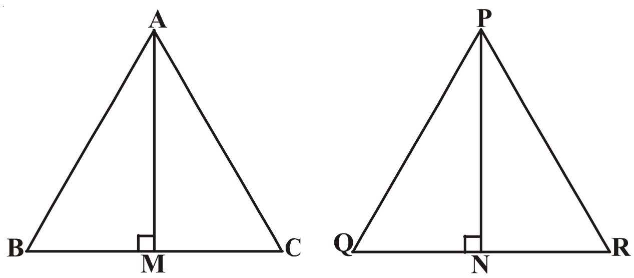
(i) సరూపకత నిష్పత్తిని

(ii) వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి వర్గమని మీరు గమనిస్తారు.

దీనిని మనం ఈ క్రింది విధంగా సిద్ధాంతంలా నిరూపించవచ్చును.

సిద్ధాంతము-8.6 : రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి వర్గమునకు సమానము.



దత్తాంశము : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

సారాంశము : $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$.

నిర్మాణము: $AM \perp BC$ మరియు $PN \perp QR$ గీయండి.

ఉపపత్తి : $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \dfrac{BC \times AM}{QR \times PN}$ ...(1)

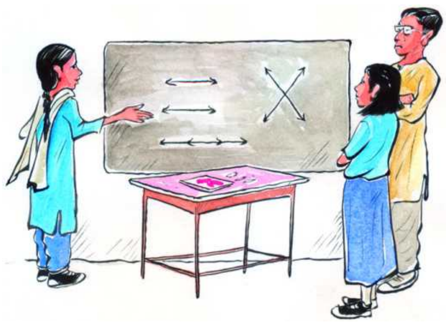
ΔABM మరియు ΔPQN లలో

$\angle B = \angle Q$ ($\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$)

$\angle M = \angle N = 90^0$

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (కో.కో.సరూపనియమం)

$\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ ...(2)



ఇంకా $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (దత్తాంశము)

$\boxed{\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}} = \dfrac{AC}{PR}$ ...(3)

$\therefore \dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AB}{PQ}$ (1), (2), (3) ల నుండి

$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$.

సమీకరణము (3) నుండి

$\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

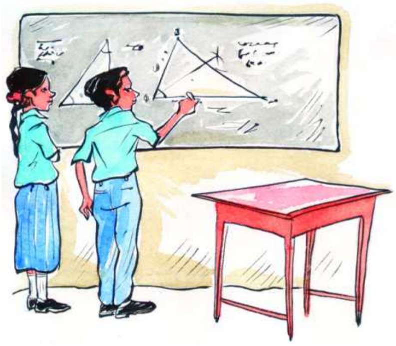
ఉదాహరణ-8. రెండు సరూపత్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమైన అవి సర్వసమాన త్రిభుజాలని చూపండి.

సాధన : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

కావున $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

కాని $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = 1$ ($\because$ వైశాల్యాలు సమానము కావున)

$\left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2 = 1$



కావున $AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

దీని నుండి మనకు $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$ లభిస్తుంది

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (భు.భు.భు. సర్వసమాన నియమం)

ఉదాహరణ-9. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ మరియు వాటి వైశాల్యాలు వరుసగా 64 చ.సెం.మీ మరియు 121 సెం.మీ. ఇంకా $EF = 15.4$ సెం.మీ అయిన BC కొలతను కనుగొనుము.

సాధన : $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta DEF \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

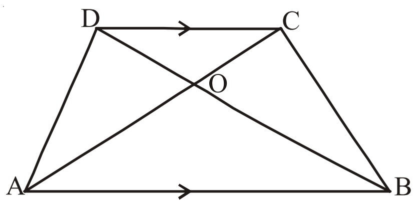
$\dfrac{64}{121} = \left(\dfrac{BC}{15.4}\right)^2$

$\dfrac{8}{11} = \dfrac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \dfrac{8 \times 15.4}{11} = 11.2$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ-10. ట్రెపీజియం ABCD లో $AB \parallel DC$. ఇంకా కర్ణములు AC, BD లు 'O' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. $AB = 2CD$ అయిన త్రిభుజములు AOB మరియు CODల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

సాధన : ట్రెపీజియం ABCDలో $AB \parallel DC$ ఇంకా $AB = 2CD$.

ΔAOB, ΔCOD లలో



$\angle AOB = \angle COD$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\angle OAB = \angle OCD$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (కోకో సరూప నియమం)

$$\frac{\Delta\, AOB \text{ వైశాల్యము}}{\Delta\, COD \text{ వైశాల్యము}} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ ΔAOB వైశాల్యము : ΔCOD వైశాల్యము = 4 : 1.

అభ్యాసము - 8.3

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము మూడు భుజాలపై సమబాహు త్రిభుజాలు గీయబడ్డాయి. కర్ణము మీద గీసిన త్రిభుజవైశాల్యము మిగిలిన రెండు భుజాల మీద గీసిన త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తమునకు సమానమని చూపండి.
2. ఒక చతురస్రము భుజముపై గీసిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము, ఆ చతురస్ర కర్ణముపై గీసిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యములో సగము వుంటుందని చూపండి.
3. ΔABC లో BC, CA, AB భుజాల మధ్యబిందువులు వరుసగా D, E, F. అయిన ΔDEF మరియు ΔABCల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
4. ΔABCలో, $XY \parallel AC$ మరియు XY ఆ త్రిభుజాన్ని రెండు సమాన వైశాల్యాలు కల భాగాలుగా విభజించును. అయిన $\dfrac{AX}{XB}$ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
5. రెండు సరూపత్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప మధ్యగతాల నిష్పత్తి వర్గానికి సమానమని చూపండి.
6. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. $BC = 3$ సెం.మీ $EF = 4$ సెం.మీ ΔABC వైశాల్యము $= 54$ చ.సెం.మీ అయిన ΔDEF వైశాల్యమును కనుగొనుము.
7. త్రిభుజము ABCలో AB భుజాన్ని P వద్ద, AC ని Q వద్ద తాకునట్లు PQ ఒక సరళరేఖ, ఇంకా $AP = 1$ సెం.మీ., $BP = 3$సెం.మీ. $AQ = 1.5$సెం.మీ. $CQ = 4.5$సెం.మీ. అయిన

   ΔAPQ వైశాల్యము $= \dfrac{1}{16}(\Delta ABC$ వైశాల్యాము) అని చూపండి.
8. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు 81 చ.సెం.మీ మరియు 49 చ.సెం.మీ పెద్ద త్రిభుజములో గీసిన లంబము పొడవు 4.5 సెం.మీ అయిన చిన్న త్రిభుజములో దాని అనురూప లంబము పొడవును కనుగొనండి.

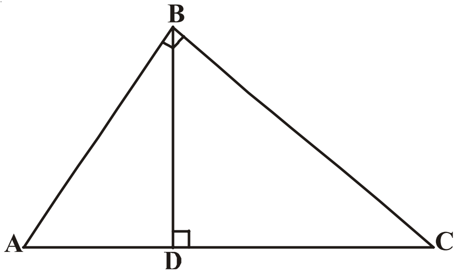
8.6 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

మీకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతము గురించి బాగా తెలుసును. దీనిని మీరు కొన్ని కృత్యముల ద్వారా సరిచూసి వున్నారు. సరూపత్రిభుజాల భావన నుపయోగించుకొని ఈ సిద్ధాంతాన్ని మనం రుజువు చేద్దాము. దాని కొరకు మనం ఈ క్రింది ఫలితాన్ని ఉపయోగించుకొంటాము.

సిద్ధాంతము-8.7 : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో, లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆ లంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు, ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు మరియు అవి ఒకదానికొకటి కూడా సరూపాలు.

ఉపపత్తి : ABC లంబకోణ త్రిభుజములో, లంబకోణము కలిగిన శీర్షము B.

B నుండి కర్ణము AC కి గీసిన లంబము BD.



ΔADB మరియు ΔABC లలో

$\angle A = \angle A$

మరియు $\angle ADB = \angle ABC$ (ఎందుకు ?)

కావున $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ఎలా ?) ...(1)

అదేవిధంగా, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ఎలా ?) ...(2)

(1), (2) ల నుండి లంబము BD కి ఇరువైపులా నున్న త్రిభుజాలు మొత్తము త్రిభుజము ΔABCకి సరూపాలు.

ఇంకా $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

కావున $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

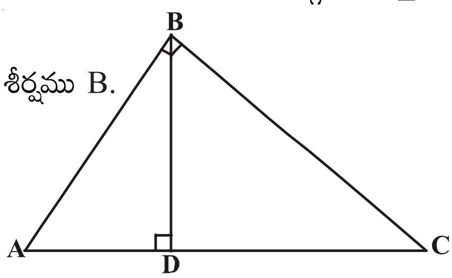
ఇది ఈ క్రింది సిద్ధాంతానికి దారి తీస్తుంది.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజము మూడు భుజాల కొలతలు పూర్ణ సంఖ్యలైనపుడు కనీసము ఒకటి తప్పనిసరిగా సరిసంఖ్య అవుతుంది. ఎందుకు ? మీ మిత్రులతో మరియు ఉపాధ్యాయులతో చర్చించుము.

8.6.1 బౌధాయన సిద్ధాంతము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

సిద్ధాంతం-8.8 : ఒక లంబ కోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం.



దత్తాంశము: లంబకోణ త్రిభుజము ABCలో లంబకోణాన్ని కలిగిన శీర్షము B.

సారాంశము : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

నిర్మాణము : $BD \perp AC$ గీయుము.

ఉపపత్తి : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (భుజాలు అనుపాతంలో వుంటాయి)

$AD \,.\, AC = AB^2$ ...(1)

ఇంకా, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$CD \,.\, AC = BC^2$ ...(2)

(1), (2) లను కలుపగా

$AD \,.\, AC + CD \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

ఈ సిద్ధాంతమును ప్రాచీన భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త బౌధాయనుడు (సుమారు క్రీ.పూ 800) ఈ క్రింది రూపములో చెప్పెను.

"ఒక దీర్ఘ చతురస్ర కర్ణము దానితో అది ఏర్పరచిన వైశాల్యము దాని రెండు భుజాలు (అనగా పొడవు మరియు వెడల్పులు) ఏర్పరచిన వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. అందుకే దీనిని మనం బౌధాయన సిద్ధాంతముగా పేర్కొనడం జరిగింది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము ఏమిటి ? దానిని కూడా మనం ఒక సిద్ధాంతములా రుజువు చేద్దాము.

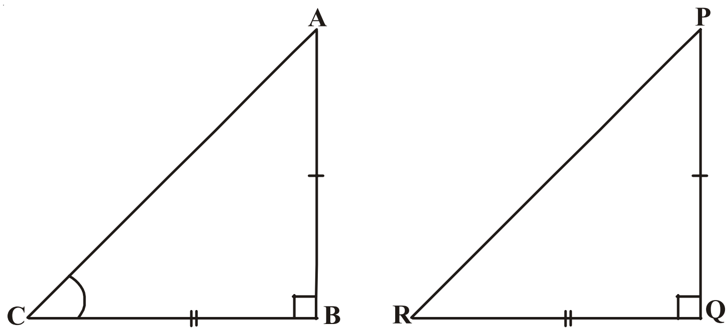
సిద్ధాంతం-8.9 : ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన, మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము అనగా ఆ త్రిభుజము లంబ కోణ త్రిభుజమవుతుంది.

దత్తాంశము : ΔABC లో,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

సారాంశము : $\angle B = 90^0$.

నిర్మాణము : $PQ = AB$ మరియు $QR = BC$ అగునట్లు Q వద్ద లంబకోణము వుండే లంబకోణ త్రిభుజము PQR ని నిర్మించుము.



ఉపపత్తి : ΔPQR లో $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ($\angle Q = 90^0$ కావున పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (నిర్మాణము నుండి) ...(1)

కాని $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (దత్తాంశము) ...(2)

$\therefore$ $AC = PR$ (1), (2) ల నుండి

ఇప్పుడు ΔABC, ΔPQR లలో

$AB = PQ$ (నిర్మాణము)

$BC = QR$ (నిర్మాణము)

$AC = PR$ (నిరూపితము)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం)

$\therefore \angle B = \angle Q$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భాగాలు)

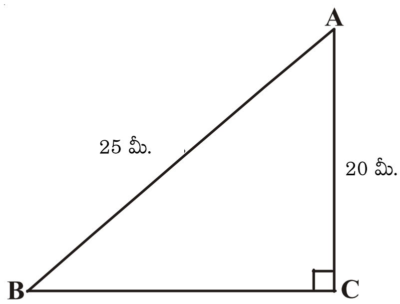
కాని $\angle Q = 90°$ (నిర్మాణము నుండి)

$\therefore \angle B = 90°$.

సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ-11. 25మీ. పొడవుగల ఒక నిచ్చెన, గోడపై 20మీ ఎత్తున గల ఒక కిటికీని తాకుచున్నది. అయిన ఆ నిచ్చెన అడుగుభాగము నేలపై గోడ నుండి ఎంత దూరములో నున్నది.



సాధన: ΔABC లో $\angle C = 90°$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15$మీ.

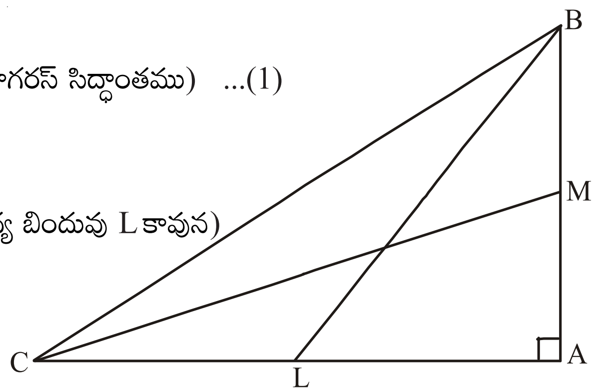
కావున నిచ్చెన అడుగుభాగము నేలపై గోడ నుండి 15మీ. దూరములో నున్నది.

ఉదాహరణ-12. లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో శీర్షము 'A' వద్ద లంబ కోణము కలదు. BL మరియు CMలు దీనిలో మధ్యగత రేఖలు అయిన

$4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ అనిచూపండి.

సాధన : ΔABC లో $\angle A = 90°$.

BL, CM లు మధ్యగత రేఖలు



ΔABC లో $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము) ...(1)

ΔABLలో, $BL^2 = AL^2 + AB^2$

కాని $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ AC మధ్య బిందువు L కావున)

$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

$\therefore 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

ΔCMA లో, $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ($\because$ AB మధ్య బిందువు M కావున)

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \quad ...(3)$$

(2), (3) లను కలుపగా

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

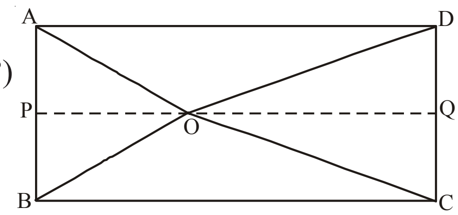
$$\therefore \; 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \quad (1) \text{ నుండి.}$$

ఉదాహరణ-13. దీర్ఘచతురస్రం ABCD అంతరంలో ఏదైనా బిందువు 'O' అ.....

$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ అనిచూపండి.

సాధన : 'O' బిందువు గుండా BC కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీసిన అది AB ని P వద్ద, DC ని Q వద్ద తాకును.

అపుడు PQ || BC.



$\therefore$ PQ $\perp$ AB మరియు PQ $\perp$ DC ($\because \angle B = \angle C = 90°$)

కావున $\angle BPQ = 90°$ & $\angle CQP = 90°$

$\therefore$ BPQC మరియు APQD లు రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు.

ΔOPB నుండి $\quad OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad ...(1)$

అదేవిధంగా ΔOQD నుండి $OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad ...(2)$

ΔOQC నుండి $\quad OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad ...(3)$

ΔOAP నుండి $\quad OA^2 = AP^2 + OP^2$

(1), (2) లను కలుపగా

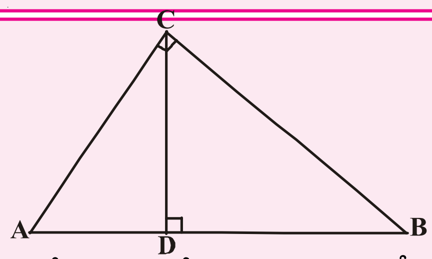
$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad (\because BP = CQ \text{ మరియు } DQ = AP)$$

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \; ((3), (4) \text{ ల నుండి})$$

ఇవి చేయండి.

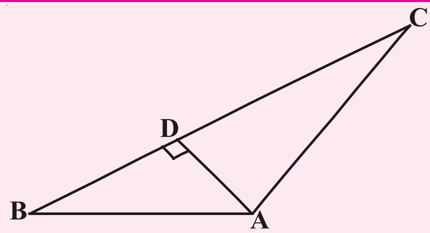


1. ΔACBలో, $\angle C = 90^0$, CD $\perp$ AB అయిన

   $\dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{AD}$. అని నిరూపించండి.

2. 15 మీటర్ల పొడవుగల ఒక నిచ్చెన రోడ్డుపై ఒక వైపు నున్న భవనంపై నేల నుండి 9 మీటర్ల ఎత్తున గల కిటికీని తాకును. నిచ్చెన అడుగుభాగమును అదే ప్రదేశములో వుంచి నిచ్చెనను రోడ్డుకు అవతలి వైపున వున్న భవనము వైపునకు తిప్పిన దానిపై నేల నుండి 12మీ ఎత్తున గల కిటికీని తాకును. అయిన ఆ రోడ్డు వెడల్పును కనుగొనుము.

3. ఇచ్చిన పటంలో $AD \perp BC$ అయిన $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ అని చూపండి.



ఉదాహరణ-14. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము, దాని అతి చిన్న భుజము రెట్టింపు కన్నా 6మీ. ఎక్కువ. మూడవ భుజము కర్ణము కన్నా 2 మీ తక్కువ అయిన ఆ త్రిభుజభుజాలను కనుగొనుము.

సాధన : అతి చిన్న భుజమును x మీ. అనుకొనుము.

అపుడు కర్ణము $= (2x + 6)$మీ. మరియు మూడవ భుజము $= (2x + 4)$మీ.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నుండి,

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ లేదా $x = -2$

x అనేది త్రిభుజ భుజము కావున రుణవిలువ కానేరదు.

$\therefore x = 10$

అందువలన, ఆ త్రిభుజభుజాలు 10మీ, 26మీ మరియు 24మీ.

ఉదాహరణ-15. లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము శీర్షము 'C' వద్ద కలదు. $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ అనుకొనుము. ఇంకా శీర్షము 'C' నుండి AB కి గీసిన లంబము పొడవు p అయిన

(i) $pc = ab$ (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

సాధన :

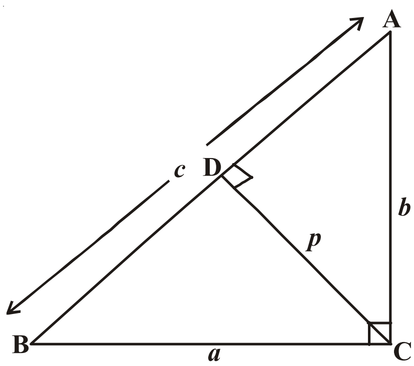
(i) $CD \perp AB$ మరియు $CD = p$.

ΔABC వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$

$= \frac{1}{2} cp$.

అలాగే ΔABC వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times BC \times AC$

$= \frac{1}{2} ab$



$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \qquad ...(1)$$

(ii) లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము శీర్షము 'C' వద్ద కలదు.

కావున $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

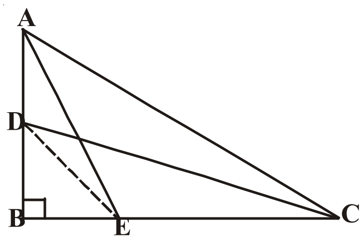
$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

అభ్యాసము - 8.4

1. ఒక రాంబస్‌లో భుజాల వర్గాల మొత్తము, దాని కర్ణముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమని చూపండి.

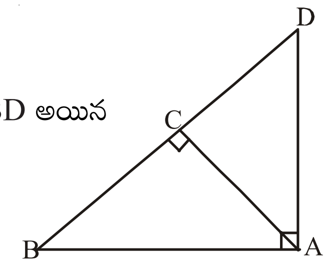
2. లంబకోణ త్రిభుజము ABCలో లంబకోణము శీర్షము 'B' వద్ద కలదు. D మరియు E బిందువులు వరుసగా AB, BC లపై కలవనుకొనుము. అయిన $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ అని చూపండి.



3. ఒక సమబాహు త్రిభుజములో భుజము వర్గమునకు మూడు రెట్లు దాని ఉన్నతి (లంబము) వర్గమునకు నాలుగురెట్లు అని చూపండి.

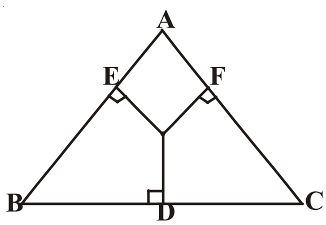
4. PQR త్రిభుజంలో లంబకోణము శీర్షము 'P' వద్ద కలదు. $PM \perp QR$ అగునట్లు QR పై బిందువు M అయిన $PM^2 = QM \,.\, MR$ అని చూపండి.

5. త్రిభుజము ABDలో లంబకోణము 'A' వద్ద కలదు. మరియు $AC \perp BD$ అయిన
   (i) $AB^2 = BC.BD$. (ii) $AC^2 = BC.DC$
   (iii) $AD^2 = BD.CD$ అని చూపండి.



6. సమద్విబాహు త్రిభుజము ABCలో లంబకోణము C వద్ద కలదు. అయిన $AB^2 = 2AC^2$ అని చూపండి.

7. త్రిభుజము ABC అంతరంలో ఏదైనా బిందువు 'O'
   $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ మరియు $OF \perp AB$ అయిన
   (i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ అని చూపండి.

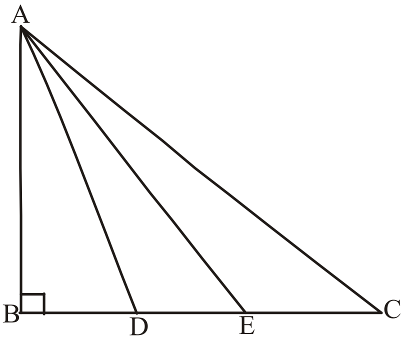


8. 18 మీటర్ల పొడవు గల ఒక నిలువు స్థంబంకు 24 మీటర్ల పొడవు గల ఒక తీగ కట్టబడినది. తీగ రెండవ చివరకు ఒక మేకు కట్టబడినది. భూమిపై స్థంబం నుండి ఎంత దూరములో ఆ మేకును పాతిన ఆ తీగ బిగుతుగా నుండును ?

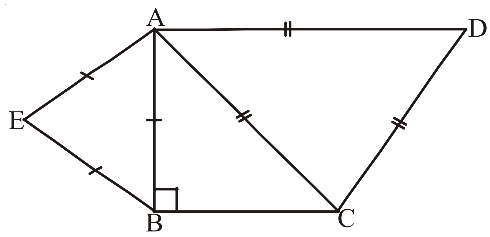
9. 6మీ మరియు 11మీటర్ల పొడవు గల స్థంబం ఒక చదునైన నేలపై కలవు. నేలపై ఆ రెండు స్థంబం అడుగు భాగముల మధ్య దూరము 12మీ అయిన ఆ రెండు స్థంబం పైభాగముల మధ్యదూరము ఎంత?

10. సమబాహు త్రిభుజము ABCలో, భుజంBCపై బిందువు 'D', యింకా $BD = \frac{1}{3}BC$ అయిన $9AD^2 = 7AB^2$ అని చూపండి.

11. ఇచ్చిన పటంలో, ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. శీర్షము వద్ద లంబకోణము కలదు. BC భుజాన్ని D మరియు E బిందువులు సమత్రిఖండన చేయును అయిన $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ అని చూపండి.



12. సమద్విబాహు త్రిభుజము ABCలో, లంబకోణము 'B' వద్ద కలదు. AC మరియు AB భుజాలపై సరూప త్రిభుజాలు ACD మరియు ABE నిర్మింపబడినవి. అయిన ΔABE మరియు ΔACD ల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.



8.7 సిద్ధాంత ప్రవచనాల వివిధరూపాలు

1. వ్యతిరేక ప్రవచనము :

ఒక ప్రవచనము ఇచ్చినపుడు దాని చివర "కాదు" చేర్చడం వలన ఒక క్రొత్త ప్రవచనము ఏర్పడుతుంది. దానినే మనం వ్యతిరేక ప్రవచనం అంటాము.

ఉదాహరణకు "ΔABC సమబాహు త్రిభుజము" అనేది ఒక ప్రవచనము దీనిని మనం "p" తో సూచించిన దానిని మనం ఈ క్రింది విధంగా రాస్తాము.

p : త్రిభుజము ABC సమబాహు త్రిభుజము. అపుడు దాని వ్యతిరేఖ ప్రవచనము "త్రిభుజము ABC సమబాహు త్రిభుజము కాదు". 'p' యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని '$\sim p$' తో సూచిస్తాము. మరియు దానిని వ్యతిరేక ప్రవచనము అని చదువుతాము. ప్రవచనము p చెప్పిన దానిని $\sim p$ వ్యతిరేకిస్తుంది అనగా నిరాకరిస్తుంది.

మనము ఈ వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని రాసేటపుడు దానిని అర్థం చేసుకొనుటలో ఏవిధమైన గందరగోళానికి తావులేకుండా రాయాలి.

ఈ క్రింది ఉదాహరణను జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి.

P : అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు. దీనికి వ్యతిరేక ప్రవచనము $\sim p$ ని మనం ఈ క్రింది విధాలుగా రాయవచ్చును.

i) $\sim p$: అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

ii) $\sim p$: అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు కావు వాస్తవ సంఖ్యలు

దీనిలో ఏ వ్యతిరేక ప్రవచనము సరియైనదో ఎలా గుర్తిస్తాము? దీనికి ఈ నియమాన్ని పాటిస్తాము. 'p' ఒక ప్రవచనమను కొనుము. $\sim p$ దాని వ్యతిరేక ప్రవచనము. p సత్యమైన $\sim p$ అసత్యము మరియు p అసత్యమైన $\sim p$ సత్యము.

ఉదాహరణము s : $2+2=4$ సత్యము

$\sim s$: $2+2 \neq 4$ అసత్యము

2.. ప్రవచన విపర్యయము :

సత్యముగాని, అసత్యముగాని ఏదో ఒకటి మాత్రమే అయ్యే సాధారణ వాక్యము ఒక. సరళ ప్రవచనము. రెండు సరళ ప్రవచనాలను కలుపగా మనకు సంయుక్త ప్రవచనాలు ఏర్పడతాయి. రెండు సరళ ప్రవచనాలు 'అయినచో'చే కలుపగా ఏర్పడిన సంయుక్త ప్రవచనాన్ని అనుషంగికము లేదా నియత ప్రవచనము అంటారు.

రెండు సరళ ప్రవచనాలను p మరియు q లను 'అయినచో' కలుపగా p అయినచో q వస్తుంది. దీనిని మనం $p \Rightarrow q$ అని రాస్తాము.

ఈ $p \Rightarrow q$ లో మనం p, q లను తారుమారు చేయగా మనకు $q \Rightarrow p$ వస్తుంది. దీనినే మనం ప్రవచన విపర్యయము అంటాము.

ఉదాహరణ : $p \Rightarrow q$ త్రిభుజము ABCలో AB = AC అయినచో $\angle C = \angle B$

విపర్యయము $q \Rightarrow p$: త్రిభుజము ABC లో $\angle C = \angle B$ అయినచో AB = AC.

విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ :

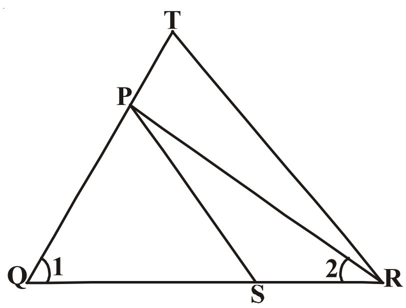
ఈ విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణలో, మనము నిరూపించవలసిన ప్రవచనము యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనమును సత్యమని తీసుకొంటాము. దీనిని నిరూపించే ప్రయత్నంలో ఎక్కడో ఒకచోట విరుద్ధత వస్తుంది. అపుడు మనం ఈ విరుద్ధత అనేది వ్యతిరేక ప్రవచనం సత్యమని మనం తప్పుగా తీసుకొనుట వలన ఏర్పడినదని గ్రహిస్తాము. అప్పుడు మనం ఇచ్చిన ప్రవచనం సత్యమని ముగింపునకు వస్తాము.

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము (పరీక్షలకు నిర్దేశింపబడినది కాదు)

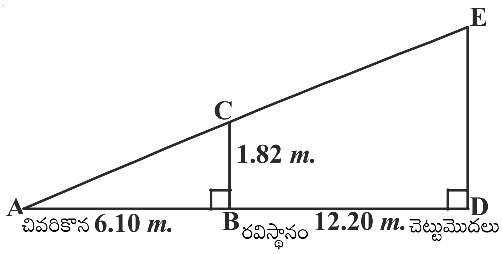
1. ఇచ్చిన పటంలో,

$$\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS} \text{ మరియు } \angle 1 = \angle 2$$

అయిన $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ అని చూపండి.



2. రవి ఎత్తు 1.82మీ. అతని ఇంటి పెరడులోని ఒక చెట్టు ఎత్తును కనుగొనాలనుకున్నాడు. చెట్టు మొదలు నుండి నేలపై 12.20 మీటర్ల దూరము నడువగా అతని నీడ, చెట్టు నీడ చివరి భాగములు ఖచ్చితముగా ఏకీభవించెను. అతను ఇపుడు ఆ నీడ చివరి భాగము నుండి 6.10మీ దూరములో నిలబడి వున్నచో, ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?

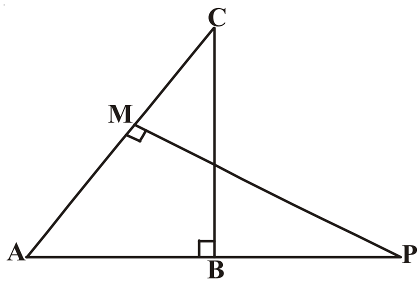


3. సమాంతర చతుర్భుజము ABCDలో, AB పై ఏదేని బిందువు 'P' దాని కర్ణము AC, DP ని బిందువు Q వద్ద ఖండించును. అయిన $CQ \times PQ = QA \times QD$ అని చూపండి.

4. ΔABC మరియు ΔAMP లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు. వీటిలో లంబకోణములు వరుసగా B మరియు M బిందువుల వద్ద కలవు.

అయిన (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ అని చూపండి.



5. ఒక విమానము విమానాశ్రయము నుండి గంటకు 1000 కి.మీ. వేగముతో ఉత్తరము వైపు ప్రయాణించుచున్నది. అదే సమయంలో వేరొక విమానము అక్కడి నుండి గంటకు 1200 కి.మీ వేగముతో పడమర వైపు ప్రయాణించు చున్నది. అయిన $1\frac{1}{2}$ గంటల తరువాత ఆ రెండు విమానములు ఎంత దూరములో వుండును?

6. లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము C వద్ద కలదు. P మరియు Q బిందువులు వరుసగా AC మరియు CB లపై బిందువులు ఇంకా ఆ భుజాలను అవి 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

అయిన (i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

(ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

(iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$ అని చూపండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒకే ఆకారమును కలిగి వుండి ఒకే పరిమాణము కలిగి వుండనవసరము లేని పటాలను సరూప పటాలు అంటారు.

2. అన్ని సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు కాని విపర్యయము సత్యము కాదు.

3. సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే
   (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి
   (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి (అనుపాతంలో వుండాలి)

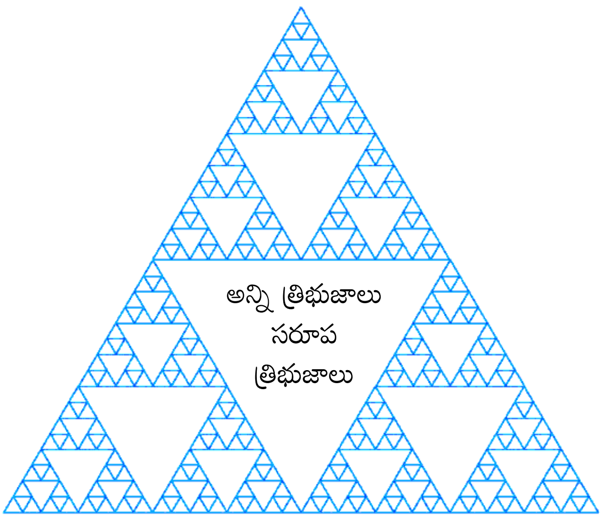
   ఈ బహుభుజుల సరూపకతకు పై రెండు నియమాలలో ఏదో ఒక నియమము సరిపోదు.

4. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.

5. ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా నుండును.
6. రెండు త్రిభుజాలలో కోణాలు సమానంగా వుంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. (అనుపాతంలో వుంటాయి) ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు (కో.కో.కో. సరూపకత)
7. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజము లోని రెండు కోణములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.
8. రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము. ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.భు.భు. సరూపకత)
9. ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి వున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.కో.భు సరూపకత)
10. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.
11. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆ లంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు అంతేగాక అవి ఒకదానికొకటి కూడా సరూపాలు
12. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)
13. ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము అనగా ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజమవుతుంది.

పజిల్

ఒక త్రిభుజాన్ని గీయుము. ఆ త్రిభుజభుజాల మధ్య బిందువులను కలుపగా 4 త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. మరల అలా ఏర్పడిన త్రిభుజాల మధ్య బిందువులను కలుపుము. ఈ ప్రక్రియను అలా కొనసాగించుకొంటూ పోయిన ఏర్పడిన అన్ని త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి. ఎందుకు? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.



అధ్యాయము

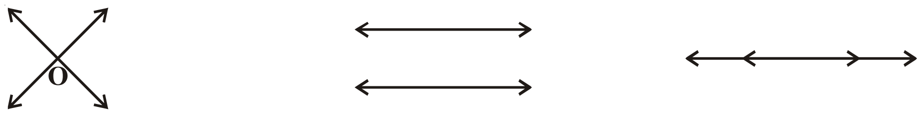
9

వృత్తాలకు స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖలు

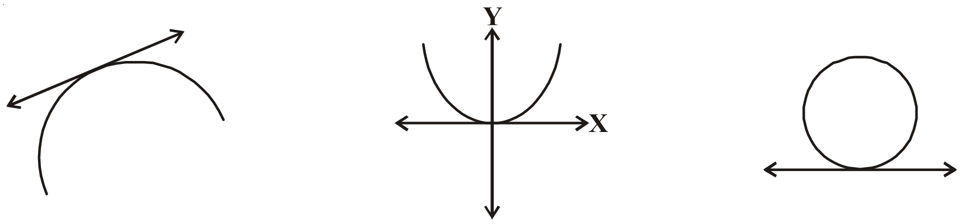
(Tangents and Secants to a Circle)

9.1 పరిచయం

ఒక సమతలంలో రెండు రేఖలు గరిష్ఠంగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి లేదా అసలు ఖండించుకోవు అని మనం చూసాము. కొన్ని సందర్భాలలో రేఖలు ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవిస్తాయి.



ఇదే విధంగా తలములో ఒక సరళరేఖనూ, ఒక వక్రరేఖనూ గీస్తే ఏమౌతుంది? మీరు బహుపదుల అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నట్లుగా ఈ వక్రరేఖ బహుపది వక్రం "పరావలయము"గా కూడా వుండవచ్చును లేదా సరళ సంవృత వక్రమైన 'వృత్తము' కావచ్చును. వృత్తము అనేది ఒక స్థిర బిందువు నుండి స్థిర దూరంలో వున్న బిందువుల సముదాయము అని మీకు తెలుసు.



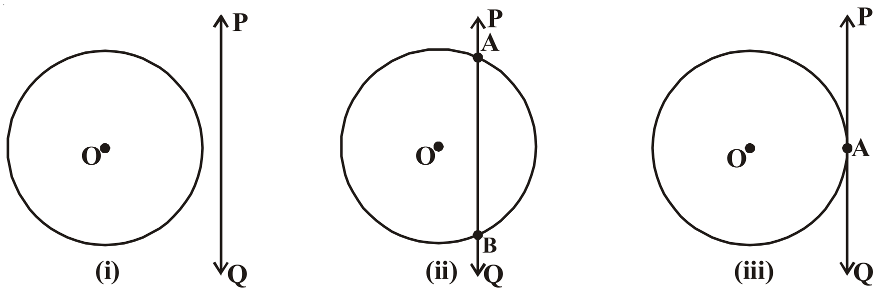
వృత్తాకార వస్తువులు లేదా పరికరాలు తలముపై కదులుతున్నప్పుడు ఏర్పడు మార్గము మీరు చూసే వుంటారు. ఉదాహరణకు సైకిలు తొక్కునపుడు, రైలు బండి పట్టాలపై నడుచునపుడు వంటివి. ఈ సందర్భంలో వృత్తము మరియు ఒక రేఖతో సంబంధం మనకు గోచరిస్తుంది. మరి ఈ సంబంధాన్ని మీరు ఏవిధంగా వ్యక్తపరచగలరు?

ఒక తలముపై వృత్తము మరియు ఒక రేఖను తీసుకుంటే ఏర్పడే సంబంధాలను మనం ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము.

9.1.1 ఒక రేఖ మరియు ఒక వృత్తము

ఒక వృత్తాన్ని, ఒక రేఖను ఒక కాగితంపై గీయమని అడిగామనుకోండి. వీటిని మూడు విధాలుగా మాత్రమే వ్యక్తపరచవచ్చునని సల్మాన్ వాదించాడు.

'O' కేంద్రముగా గల వృత్తము మరియు PQ రేఖను తీసుకొని ఈ మూడు విధాలను క్రింది పటాలలో పరిశీలిద్దాం.



పటం (i)లో, PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు. ఈ సందర్భంలో PQ ను, వృత్తానికి అఖండిత రేఖ అంటాము.

పటం (ii)లో, PQ రేఖ, వృత్తాన్ని రెండు బిందువులు A మరియు Bవద్ద ఖండించింది. ఈ రెండు ఉమ్మడి బిందువులతో AB **జ్యా** ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి ఖండిత రేఖ లేదా **ఛేదనరేఖ** అంటాము.

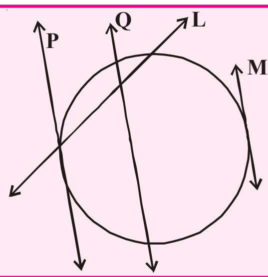
పటం (iii)లో, PQ రేఖకు వృత్తానికి ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి **స్పర్శరేఖ** అంటాము.

మనం ఈ రెండు పటాలను గమనిస్తే మరే ఇతర సంబంధాలను వీటి మధ్య ఏర్పరచలేమని తెలుస్తుంది. మనం ఇప్పుడు స్పర్శరేఖలు వ్యవస్థితం చెందే విధమును, వీటి ధర్మాలను, నిర్మాణాలను ఈ అధ్యాయంలో విపులంగా నేర్చుకుందాం.

మీకు తెలుసా ?

స్పర్శరేఖ (tangent) అనే పదం లాటిన్ పదం టాన్గ్రే (tangere) అనే పదం నుండి వచ్చినది. దీని అర్థం "స్పర్శించడం". ఈ పదాన్ని మొదటిసారిగా డెన్మార్క్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు థామస్ ఫిన్కే, 1583 సం॥లో ప్రవేశపెట్టాడు.

ఇవి చేయండి



i. ఏదైనా వ్యాసార్థంతో వృత్తం గీయండి. ఏవైనా వేర్వేరు బిందువుల వద్ద నాలుగు స్పర్శరేఖలను గీయండి. ఇంకనూ ఈ వృత్తానికి ఎన్ని సర్శరేఖలను గీయవచ్చు?

ii. వృత్తానికి బాహ్యంలో ఇచ్చిన బిందువు నుండి ఎన్ని స్పర్శరేఖలను నీవు గీయగలవు ?

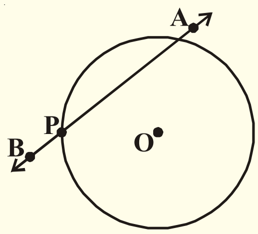
iii. ప్రక్క పటంలో ఏ రేఖలు వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు అవుతాయి?

9.2 వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు

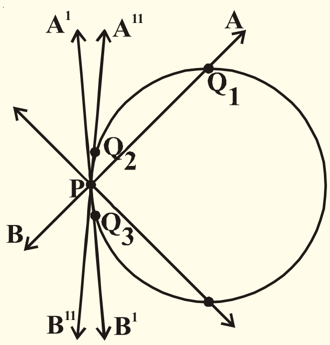
వృత్తంపై గల ఏ బిందువు నుండైనా స్పర్శరేఖను గీయగలమని తెలుసుకున్నారు. వృత్తం యొక్క తలంపై ఏదైనా బిందువు గుండా ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయగలరో చెప్పగలరా ?

దీనిని అవగాహన చేసుకొనుటకు క్రింది కృత్యాన్ని పరిశీలిద్దాం.

కృత్యం



ఒక వృత్తాకార ఇనుప తీగను తీసుకొనండి. దానిపై ఒక బిందువు P వద్ద AB అనే మరొక రేఖ వంటి తిన్నని మరొక ఇనుప తీగను తీసుకొని, అది P గుండా భ్రమణం చెందే విధంగా అమర్చండి. ఇందులో వృత్తాకార ఇనుప తీగ వృత్తాన్ని AB ఇనుపతీగ సరళరేఖను తెలుపుతాయి. మరియు ఈ తీగ వృత్తాన్ని P వద్ద ఖండించిందనుకొనుము. ఈ వ్యవస్థ (పరికరం)ను బల్లపై ఉంచి,



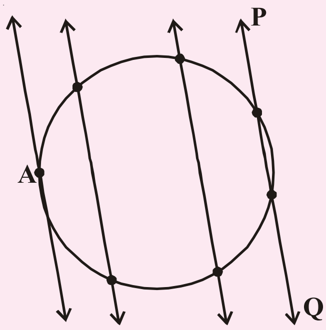
P బిందువు ఆధారంగా AB తీగను నెమ్మదిగా పటంలో చూపినట్లు కదుపుతూ వివిధ స్థానాలు వచ్చునట్లు చేయండి. ఈ తీగ P నుండి భ్రమణం చెందుతున్నప్పుడు మనం Q_1, Q_2 మరియు Q_3 బిందువులను గమనించవచ్చు. సాధారణంగా ఈ తీగ రెండు బిందువుల గుండా పోతున్నట్లు భావించవచ్చు. ఇందులో P ఒక ప్రత్యేక స్థానం (AB యొక్క $A'B'$ను

పరిశీలించండి). ఈ సందర్భంలో Pవద్ద మాత్రమే వృత్తాన్ని ఖండించింది. ఇది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ AB యొక్క మిగిలిన అన్ని స్థానాలను పరిశలించండి. ఇది ప్రతి సందర్భంలోనూ P వద్దనే కాక మరొక బిందువు వద్ద కూడా ఖండిస్తున్నది. అందుచే A^1B^1 మాత్రమే వృత్తానికి P వద్ద స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

దీని నుండి వృత్తానికి P బిందువు వద్ద ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ ఉంటుందని మనం గమనించవచ్చును.

AB తీగను ఏ దిశలో మార్చిననూ అది వృత్తాకార తీగను రెండు వేర్వేరు బిందువు వద్ద ఖండిస్తున్నట్లు తెలుస్తున్నది. ఈ సందర్భాలలో ఈ స్థానాలు అన్నియూ ఛేదన రేఖలను పోలి వుంటాయి. ఏ సందర్భంలో అయితే రెండు బిందువులు దగ్గరకు జరిగి ఏకీభవిస్తాయో ఆ ప్రత్యేక సందర్భంలో ఛేదన రేఖ మనకు స్పర్శరేఖగా మారుతుందని చెప్పవచ్చును.

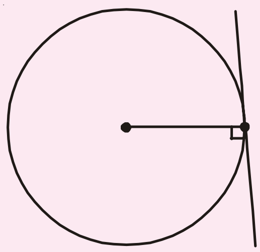
ఇది చేయండి

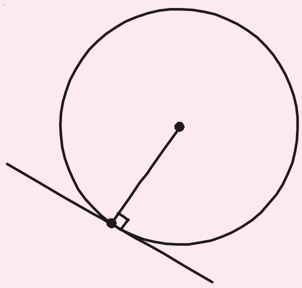


ఒక కాగితముపై వృత్తాన్ని గీచి, దానిపై PQ ఛేదన రేఖను పటములో చూపిన విధంగా గీయండి. ఈ ఛేదన రేఖకు సమాంతరముగా ఇరువైపులా మరికొన్ని రేఖలను గీయండి. ఛేదనరేఖ వృత్తకేంద్రము వైపుకు జరుగుతున్న కొలదీ 'వృత్తజ్యా' పొడవు ఏమైంది? ఏది పెద్ద జ్యా? ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా వుండే స్పర్శరేఖలను ఒక వృత్తానికి ఎన్నింటిని గీయగలరు?

వృత్తాన్ని స్పర్శరేఖ తాకునపుడు ఏర్పడిన ఉమ్మడి బిందువును మనము 'స్పర్శబిందువు' అంటాము మరియు స్పర్శబిందువు గుండా పోయే రేఖను మనం వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అంటాము.

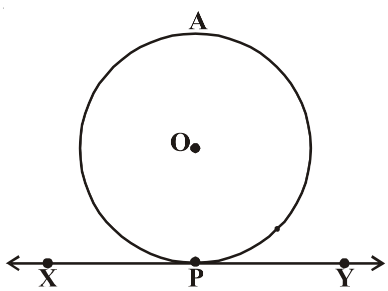
కింది పటాలలో వృత్తాలకు గీయబడిన స్పర్శరేఖలను గమనించండి.





వృత్తముపై గల ఒక బిందువు గుండా ఎన్ని స్పర్శరేఖలను మీరు గీయగలరు? వృత్తానికి మొత్తము ఎన్ని స్పర్శరేఖలుంటాయి? స్పర్శబిందువును గమనించండి. స్పర్శబిందువు గుండా వృత్త వ్యాసార్ధాలు గీయండి. స్పర్శరేఖకు, వ్యాసార్ధానికి మధ్య ఏర్పడిన కోణంలో ఏదైనా ప్రత్యేకత వుందా? ఇవి లంబాలుగా వున్నట్లు మీరు గమనించవచ్చు. దీనిని ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చో పరిశీలిద్దాము.

సిద్ధాంతము-9.1 : ఒక వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్ధానికి లంబముగా ఉంటుంది.

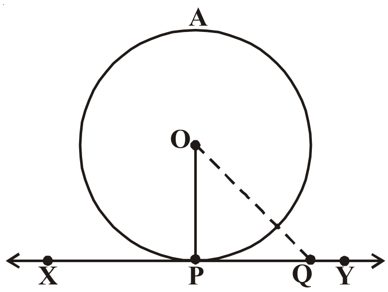


దత్తాంశము : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి స్పర్శరేఖ XY, P బిందువు గుండా గీయబడింది.

సారాంశము : OP , XY నకు లంబము అనగా ($OP \perp XY$).

ఉపపత్తి : ఇచ్చట మనము నిరూపించవలసిన వాక్యాన్ని తప్పుగా భావించి ఒక కొత్త ప్రతిపాదన చేస్తాము.

ఈ ప్రతిపాదన లేదా ఊహ విరుద్ధతకు దారితీస్తుంది. ఈ పద్ధతిలో మనం OP అనేది XY పైన P కాకుండా మరొక బిందువు Q ను తీసుకొని OQ ను కలుపుదాం.



Q బిందువు ఖచ్చితంగా వృత్తానికి బాహ్యంలోనే వుంటుంది (ఎలా ?) (Q ఒక వేళ వృత్త అంతరంలో వుంటే XY అనేది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కాకుండా ఛేదన రేఖ అవుతుందని గమనించండి.)

అందువలన, OQ అనేది వ్యాసార్థం OQ అనేది వ్యాసార్థం OP కన్నా పొడవుగా వుంటుంది (ఎలా ?)

అంటే $OQ > OP$.

XY పైన గల ఏ ఇతర బిందువులకైన ఇది వర్తిస్తుంది. అందుచే 'O' నుండి XY పైకి గీయబడిన అన్ని పొడవులలో OP మాత్రమే మిక్కిలి చిన్నది అగును.

కనుక మనం ఊహించినట్లుగా OP, XY కు లంబంగా వుండదు అనే భావన తప్పు అని తేలినది.

అందువలన OP, XY రేఖకు లంబం

ఈ విధంగా నిరూపించబడినది.

గమనిక : వృత్త వ్యాసార్థానికి స్పర్శబిందువు గుండా గీయబడిన రేఖను ఆ వృత్తానికి ఆ బిందువు వద్ద అభిలంబం (normal) అని కూడా అంటారు.

ప్రయత్నించండి

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయంను నీవు ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు?

"ఒక తలంలో వృత్తంపై వ్యాసార్థం యొక్క చివరి బిందువు గుండా గీయబడిన రేఖ దానికి లంబంగా వున్నచో ఆ రేఖా వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అగును".

పై సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి మనము మరికొన్ని ఫలితాలను రాబట్టవచ్చును.

(i) వృత్తంపై గల బిందువు P వద్ద ఒకే ఒక లంబము OP గీయవచ్చును. కావున, వృత్తపరిధిపై దత్తబిందువు గుండా ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను ఏర్పరచగలము.

(ii) వృత్తంపై గల బిందువుకు లంబంగా ఒకే ఒక రేఖ XY వుంటుంది కావున స్పర్శరేఖకు లంబముగా గీయబడిన రేఖ ఖచ్చితంగా వృత్త కేంద్రము గుండా పోవును.

వీటిని గూర్చి ఆలోచించి మీ స్నేహితులతోనూ, ఉపాధ్యాయుల తోనూ చర్చించండి.

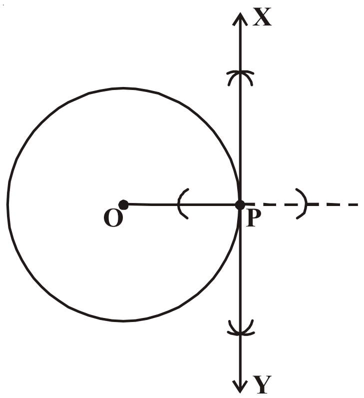
9.2.1 వృత్తానికి స్పర్శరేఖను నిర్మించుట

వృత్తంపై గల దత్త బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను ఎలా నిర్మించవచ్చును? దీని కొరకు మనము ముందు తెలుసుకున్న స్పర్శరేఖ, స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా వుంటుంది. అనే ఫలితము వాడుకుందాము. అందుచే వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడమంటే ఆ వృత్త వ్యాసార్థము చివరి బిందువు వద్ద లంబరేఖను గీయడమని అర్థము. వృత్త వ్యాసార్థము గీయాలంటే వృత్త కేంద్రము తెలియాలి.

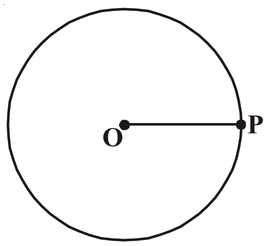
ఈ నిర్మాణము యొక్క సోపానాలు మనము తెలుసుకుందాము.

నిర్మాణము : వృత్తకేంద్రము తెలిసినపుడు వృత్తముపై గల బిందువు గుండా ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడము.

మనకు 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తం మరియు వృత్తపరిధిపై P అనే బిందువు ఇవ్వబడినది. మనము P గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను నిర్మించాలి.



నిర్మాణ సోపానాలు :



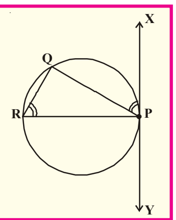
1. 'O' కేంద్రముగా వృత్తాన్ని గీచి, దాని పరిధిపై 'P' అనే బిందువును గుర్తించాలి. OP ని కలపాలి.
2. P వద్ద వృత్తానికి లంబరేఖను పటంలో చూపినట్లుగా గీచి, XY అని పేరు పెట్టాలి.
3. XY అనేది, వృత్తానికి P గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

P గుండా పోవునట్లు వృత్తానికి మరొక స్పర్శరేఖను నీవు గీయగలవా? కారణాలు తెలపండి.

ప్రయత్నించండి

వృత్త కేంద్రము తెలియని సందర్భములో వృత్తముపై గల బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను ఎలాగీస్తావు?

సూచన : $\angle QPX$ మరియు $\angle PRQ$ అనే సమాన కోణాలను నిర్మించుము. నిర్మాణము వివరించండి.



9.2.2 స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనుట

వృత్తానికి ఒక బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవును మనము కనుగొనగలమా? వృత్తముపై గల ఏ బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు కూడా సమానమేనా? కింది సమస్యలో పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తంలో వ్యాసార్థము 6 సెం.మీ. స్పర్శరేఖపై గల బిందువు P నుండి దూరము OP = 10 సెం.మీ అయిన స్పర్శరేఖా ఖండం PA ను కనుగొనుము.

సాధన : వృత్తస్పర్శరేఖ, స్పర్శబిందువు వద్ద దాని వ్యాసార్థానికి లంబము (సిద్ధాంతం 9.1)

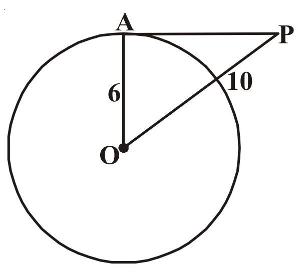
ఇప్పుడు వృత్తానికి PA అనేది స్పర్శరేఖాండం మరియు OA వ్యాసార్థము

$\therefore OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$

ఇప్పుడు ΔOAP లో $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

$$10^2 = 6^2 + PA^2$$
$$100 = 36 + PA^2$$
$$PA^2 = 100 - 36$$
$$= 64$$

$\therefore PA = \sqrt{64} = 8$ సెం.మీ.



అభ్యాసము - 9.1

1. కింది ఖాళీలను పూరించండి.
   (i) వృత్తాన్ని, ఒక స్పర్శరేఖ .... బిందువు(ల) వద్ద ఖండిస్తుంది.
   (ii) వృత్తాన్ని, ఒక రేఖ రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దానిని .... అంటారు.
   (iii) ఒక వృత్తానికి గరిష్ఠంగా గీయగలిగే సమాంతర స్పర్శరేఖలు ....
   (iv) ఒక వృత్తానికి, దాని స్పర్శరేఖకు గల ఉమ్మడి బిందువును .... అంటారు.
   (v) ఒక వృత్తానికి మనము............. స్పర్శరేఖలను గీయగలము.
2. 5 సెం.మీ వ్యాసార్థము గా గల వృత్తాన్ని PQ స్పర్శరేఖ P వద్ద తాకింది. వృత్త కేంద్రము 'O' నుండి స్పర్శరేఖపై గల బిందువు Q నకు దూరము OQ = 12 సెం.మీ. అయిన PQ పొడవును కనుగొనుము.
3. ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. వృత్తానికి బాహ్యంలో గల ఒక రేఖకు సమాంతరముగా ఒక స్పర్శరేఖనూ, ఒక ఛేదన రేఖను గీయండి.
4. 9 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తానికి, దాని కేంద్రం నుండి 15 సెం.మీ దూరంలో ఒక బిందువు కలదు. అయిన దానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనండి.
5. ఒక వృత్త వ్యాసము చివరి బిందువుల వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరమని చూపండి.

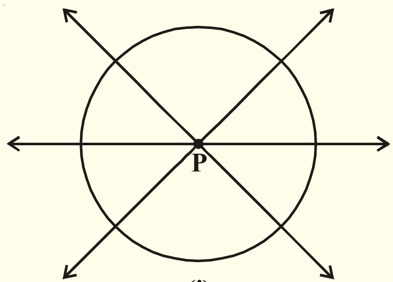
9.3 ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయదగు స్పర్శరేఖలు

ఒక తలములో ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయగలిగే స్పర్శరేఖల సంఖ్యను కింది కృత్యాన్ని చేసి తెలుసుకుందాము.

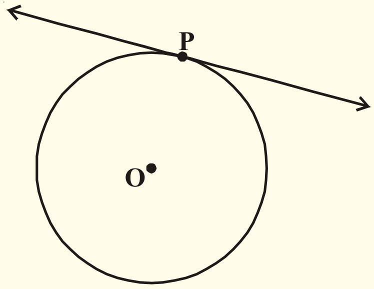
కృత్యము

(i) కాగితంపై వృత్తం గీయండి. దాని అంతరములో P అనే బిందువును తీసుకొండి. ఈ బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయగలవా? ఈ బిందువు గుండా గీచే రేఖలన్నియూ వృత్తాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తాయి. వీటిని ఏమంటారు? ఇవన్నియూ ఛేదన రేఖలు కదా! అందుచే వృత్త అంతరంలో గల ఏ బిందువు గుండా నైననూ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయుట సాధ్యము కాదు. (ప్రక్క పటమును చూడండి)

(ii) ఇప్పుడు, వృత్తపరిధిపై P అనే బిందువును తీసుకొని దాని నుండి స్పర్శరేఖను గీయండి. ఈ బిందువు గుండా ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయగలరని మీరు పరిశీలించే వుంటారు. (ప్రక్క పటమును చూడండి)

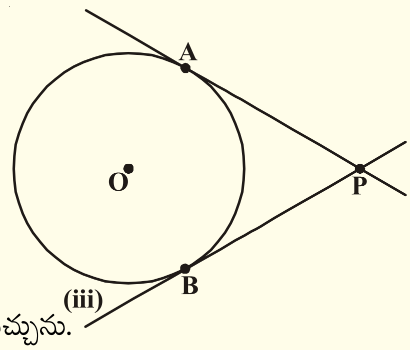


(i)



(ii)

(iii) ఇప్పుడు, వృత్తానికి బాహ్యములో P బిందువును తీసుకొని ఆ బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు ఏమి గమనించారు? మీరు ఖచ్చితంగా రెండు స్పర్శరేఖలను మాత్రమే ఈ బాహ్య బిందువు నుండి గీయగలమని తెలుసుకుంటారు. (ప్రక్క పటంను గమనించండి)



మనం చేసిన కృత్యము ద్వారా క్రింది ఫలితాలను సాధారణీకరించవచ్చును.

సందర్భం (i) : వృత్త అంతరములో గల ఏ బిందువు గుండా నైనా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయలేము.

సందర్భం(ii) : వృత్తముపై గల ఏ బిందువుగుండానైనా పోవునట్లు వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయవచ్చును.

సందర్భం (iii) : వృత్త బాహ్యంలో గల ఏదైనా బిందువు గుండా వృత్తానికి ఖచ్చితముగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

ఈ సందర్భములో వృత్తానికి A మరియు B అనేవి స్పర్శబిందువులు మరియు PA, PB లు స్పర్శరేఖలు.

వృత్తంలో బాహ్య బిందువు P నుండి స్పర్శబిందువునకు గీయబడిన రేఖాఖండం యొక్క పొడవును ఆ వృత్తానికి బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు అంటాము.

పటం(iii) లో PA మరియు PB లను బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు అవుతాయని గమనించండి. ఈ పొడవులు PA మరియు PB ల మధ్య ఏదైనా సంబంధము వున్నదా?

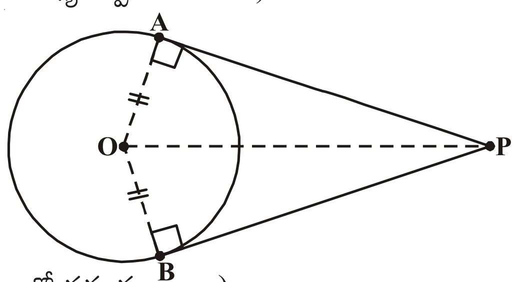
సిద్ధాంతము-9.2 : వృత్తానికి బాహ్యబిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము

దత్తాంశము : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి, P అనే బిందువు బాహ్యంలో కలదు. P బిందువు గుండా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు PA మరియు PB (పటం చూడండి)

సారాంశము : PA = PB

ఉపపత్తి : OA, OB మరియు OP లను కలపండి.

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (సిద్ధాంతము 9.1 ప్రకారం వృత్త వ్యాసార్థానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)



ఇప్పుడు ΔOAP మరియు ΔOBP లలో,

OA = OB (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

OP = OP (ఉమ్మడి భుజము)

అందువలన లం.క.భు సర్వసమాన స్వీకృతం ప్రకారము

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ అయినది.

దీని నుండి PA = PB అగును (సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సరూపభాగాలు)

నిరూపించబడినది.

ప్రయత్నించండి

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి పై సిద్ధాంతమును నిరూపించడానికి ఉపపత్తిని రాయండి.

9.3.1. బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట

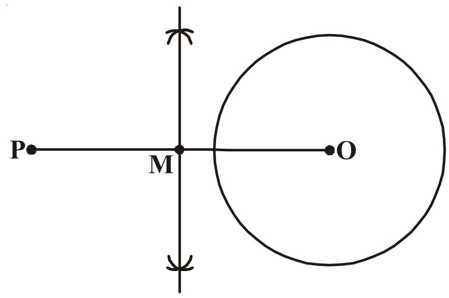
వృత్తానికి బాహ్యంలో ఒక బిందువు నుంచి, వృత్తానికి ఖచ్చితంగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చునని మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు ఈ స్పర్శరేఖలను ఏవిధంగా నిర్మిస్తారో తెలుసుకుందాం.

నిర్మాణము : బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను నిర్మించుట

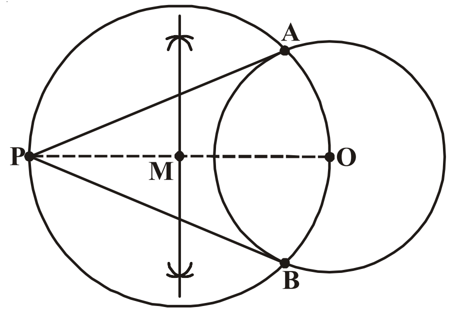
దత్తాంశము : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యంలో గల బిందువు P. మనం ఇప్పుడు P నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను నిర్మించాలి.

నిర్మాణ సోపానాలు :

సోపానం(i) : PO ను కలిపి, దానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయండి. PO మధ్య బిందువును 'M' గా గుర్తించండి.



సోపానం (ii) : M కేంద్రంగా PM లేదా MO వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. ఇది వృత్తాన్ని ఖండించే బిందువులను A మరియు B గా గుర్తించండి.



సోపానం (iii) : PA మరియు PB లను కలపండి. PA మరియు PB లు మనకు కావల్సిన స్పర్శరేఖలు అవుతాయి.

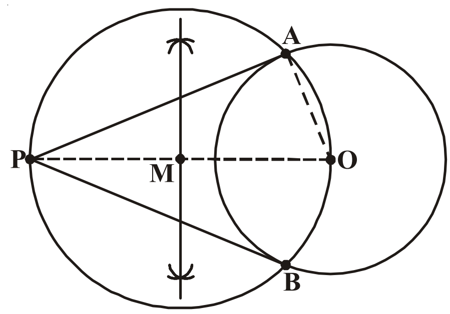
నిరూపణ : ఈ నిర్మాణమును ఏవిధముగా సమర్థించవచ్చునో పరిశీలిద్దాము.

OA ను కలపండి.

$\angle PAO$ అనేది అర్ధవృత్తంలో ఏర్పడిన కోణము కావున, $\angle PAO = 90°$ అగును.

ఇప్పుడు $PA \perp OA$ అని చెప్పవచ్చునా?

OA వృత్తానికి వ్యాసార్థం కావున సిద్ధాంతం 9.1 యొక్క విపర్యయమును బట్టి PA ఖచ్చితముగా స్పర్శరేఖ అగును. ఇదేవిధముగా, PB కూడా స్పర్శరేఖ అగును.



నిరూపించబడినది.

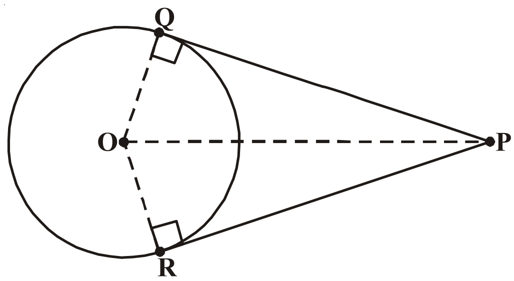
స్పర్శరేఖలు, ఛేదనరేఖలకు సంబంధించిన మరిన్ని ఆసక్తికరమైన ప్రవచనాలను వాటి నిరూపణలను పరిశీలిద్దాము.

ప్రవచనము-1 : వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణ సమద్విఖండన రేఖపై ఆ వృత్తం యొక్క కేంద్రం వుంటుంది. దీనిని ఏవిధంగా నిరూపించగలమో ఆలోచించండి.

నిరూపణ : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి P ఒక బాహ్యబిందువు. PQ మరియు PR లు P నుండి వృత్తంపైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు

OQ మరియు OR లను కలపండి

త్రిభుజాలు OQP మరియు ORP లు సర్వసమానాలు, ఎందుకంటే



$\angle OQP = \angle ORP = 90$ (సిద్ధాంతం 9.1)

$OQ = OR$ (వ్యాసార్థాలు)

OP ఉమ్మడి భుజము

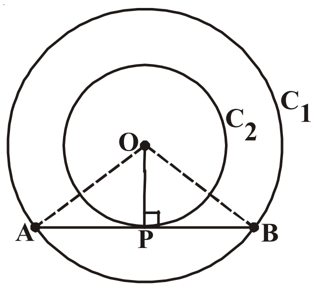
సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూప భుజాలు సమానము

కావున $\angle OPQ = \angle OPR$ అగును.

కావున, OP అనేది $\angle QPR$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ అగును.

దీని నుండి వృత్తకేంద్రము స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడిన కోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖపై వుండునని చెప్పవచ్చును.

ప్రవచనము-2 : రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలలో బాహ్యవృత్తము యొక్క జ్యా, అంతర వృత్తము యొక్క స్పర్శబిందువు వద్ద సమద్విఖండన అగును.



ఇది ఏవిధముగా సత్యము అగునో చూద్దాం.

నిరూపణ : O కేంద్రముగా గల రెండు వృత్తాలు C_1 మరియు C_2 అని ఇవ్వబడినవి. C_1 వృత్తము యొక్క జ్యా AB ను చిన్న వృత్తము C_2 ను P వద్ద తాకింది. (పటం చూడండి) మనము AP = PB అగునని నిరూపించాలి.

O, Pల ను కలపండి.

C_2 వృత్తానికి AB స్పర్శరేఖ మరియు OP వ్యాసార్థము

కావున సిద్ధాంతము 9.1 ప్రకారము

$OP \perp AB$ అగును.

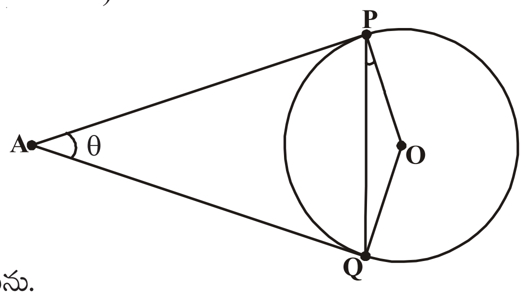
ఇప్పుడు ΔOAP మరియు ΔOBP లు సర్వసమానాలు (ఎలా?) దీని నుండి AP = PB అయినది. OP అనేది కేంద్రం నుండి గీయబడిన లంబము కావున అది AB జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

ప్రవచనము-3 : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు A నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు AP మరియు AQ అయిన $\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$ అగును.

దీనిని నిరూపించగలవా?

నిరూపణ : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు, A నుండి రెండు స్పర్శరేఖలు AP మరియు AQ లు గీయబడ్డాయి. ఇందులో P, Q లు స్పర్శబిందువులు (పటం చూడండి.).

మనము $\angle PAQ = 2\angle OPQ$ అని నిరూపించాలి.



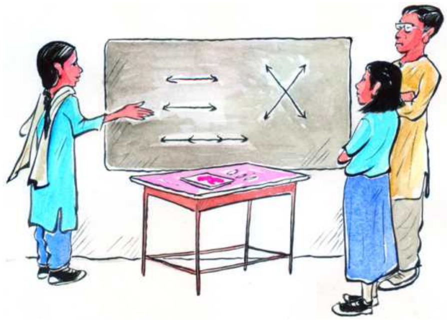
$\angle PAQ = \theta$ అయిన

ఇప్పుడు సిద్ధాంతము 9.2 ప్రకారము

$AP = AQ$ అగును.

కావున ΔAPQ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము అగును.

అందుచే, $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180^\circ$ (మూడు కోణాల మొత్తము)



$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

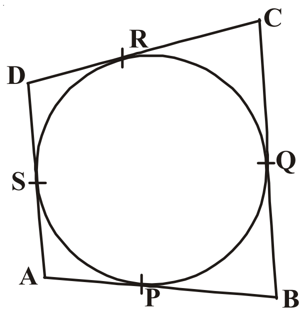
ఇదేవిధంగా, సిద్ధాంతము 9.1 ప్రకారము

$$\angle OPA = 90°$$

కావున, $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

దీని నుండి ÐPAQ = 2ÐOPQ = 2ÐOQP అగును.



ప్రవచనము-4 : ఒక వృత్తము ABCD చతుర్భుజాన్ని P, Q, R, S బిందువుల వద్ద తాకింది.

అయిన AB+CD = BC + DA అగును.

నిరూపణ ఏవిధంగా మొదలుపెడతాం? AB, CD, BC, DA లు వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు. ఎందుకనగా చతుర్భుజము యొక్క నాలుగు భుజాలను తాకుతూ వృత్తంలో దాని అంతరములో గీయబడింది మరియు P,Q,R,S బిందువుల వద్ద స్పర్శించింది.

మరి ముందుకు ఎలా వెళతాము?

నిరూపణ : పటంలో చూపిన విధముగా ABCD భుజాలు AB, BC, CD మరియు DA లను వృత్తము P, Q, R, S బిందువుల వద్ద వరుసగా స్పర్శించింది,

సిద్ధాంతము 9.2 ప్రకారము, బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తం పైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము కావున

$AP = AS$

$BP = BQ$

$DR = DS$

మరియు $CR = CQ$

వీటిని కలుపగా, మనకు

$$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$$

లేదా $(AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$

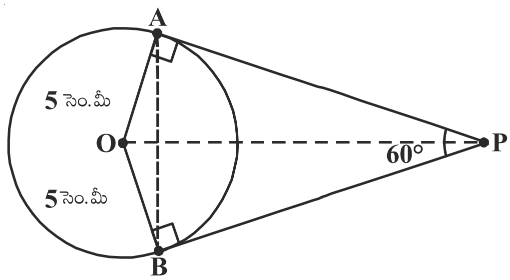
లేదా $AB + CD = BC + DA.$

ఇప్పుడు మనము ఇచ్చిన పరిస్థితికి అనుగుణముగా విశ్లేషణ చేసి నిర్మాణమును ఏవిధంగా చేయవచ్చునో కింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకుందాము.

ఉదాహరణ-1. వృత్త వ్యాసార్థము 5సెం.మీ మరియు రెండు స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము $60°$ అయిన ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయండి.

సాధన : వృత్తం గీచి దానికి రెండు స్పర్శరేఖలను గీయుటను మనం పరిశీలిద్దాము. మనకు వృత్తవ్యాసార్థము మరియు రెండు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము ఇవ్వబడింది. వృత్తకేంద్రం నుండి బాహ్యబిందువునకు గల దూరముగాని, స్పర్శరేఖల పొడవులుగాని మనకు తెలియవు. కాని మనకు స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము మాత్రమే తెలుసు. దీని నుపయోగించి బాహ్యబిందువు నుండి కేంద్రానికి గల దూరాన్ని కనుగొంటే, మనము స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

దీనిని ప్రారంభించడానికి ముందు 5సెం.మీ వ్యాసార్థముగల వృత్తాన్ని పరిశీలిద్దాము. బాహ్యబిందువు 'P' నుండి PA మరియు PB లు అనేవి వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు మరియు వీటి మధ్య కోణము $60°$



దీనిలో $\angle APB = 60°$. OP ని కలుపండి. OP అనేది $\angle APB$ కి సమద్విఖండన రేఖ అని మనకు తెలుసు.

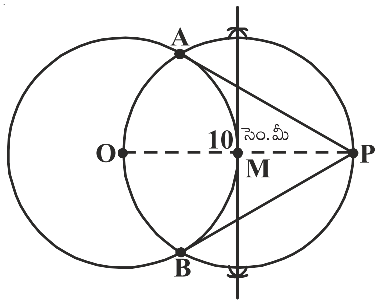
కావున $\angle OPA = \angle OPB = \dfrac{60^o}{2} = 30^0$

$[\because \Delta OAP \cong \Delta OBP]$

ఇప్పుడు ΔOAP లో $\sin 30° = \dfrac{\text{ఎదుటిభుజము}}{\text{కర్ణము}} = \dfrac{OA}{OP}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{OP}$ (త్రికోణమితి నిష్పత్తుల నుండి)

$\Rightarrow OP = 10$ సెం.మీ.



మనం ఇప్పుడు 'O' కేంద్రముగా 5సెం.మీ వ్యాసార్థంతో వృత్తము గీద్దాము. కేంద్రం నుండి 10సెం.మీ దూరంలో 'P' అనే బిందువును గుర్తిద్దాము. OP ని కలిపి నిర్మాణము 9.2లో చూపిన విధముగా పూర్తి చేద్దాము.
PA మరియు PB అనేవి వృత్తానికి గీయబడిన ఒక జత స్పర్శరేఖలు ఏర్పడతాయి.

ప్రయత్నించండి

పైన తెల్పిన నిర్మాణాన్ని మరొక విధంగా చేయడానికి ప్రయత్నించండి.

$\angle BOA=120^0$ అగునట్లు OA మరియు OB వ్యాసార్థాలను గీయండి. $\angle BOA$కు సమద్విఖండన రేఖను గీచి OA, OB లకు A మరియు Bల వద్ద లంబరేఖలు గీయండి. ఈ రేఖలు $\angle BOA$ సమద్విఖండన రేఖను బాహ్యబిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి. వీటినే మనకు కావల్సిన స్పర్శరేఖలుగా తీసుకొనవచ్చు. నిర్మాణము చేయండి. సమర్థించండి.

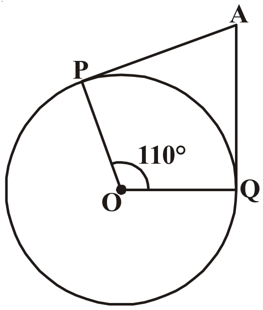
అభ్యాసము - 9.2

1. కింది వానికి సరియగు సమాధానమును గుర్తించి ప్రతి జవాబును సమర్థించండి.
   (i) ఒక వృత్త స్పర్శరేఖకు, స్పర్శబిందువు గుండా గీచిన వ్యాసార్థానికి మధ్య కోణము
   (a) $60°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $90°$

(ii) Q అనే బిందువు నుండి వృత్తం మీదకు గీయబడిన స్పర్శ రేఖా పొడవు 24 సెం.మీ. మరియు వృత్తకేంద్రం నుండి Q బిందువుకు గల దూరం 25 సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థము

(a) 7సెం.మీ (b) 12 సెం.మీ (c) 15సెం.మీ (d) 24.5సెం.మీ

(iii) ప్రక్కపటంలో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి AP మరియు AQ లు రెండు స్పర్శరేఖలు మరియు $\angle POQ = 110°$, అయిన $\angle PAQ$ =



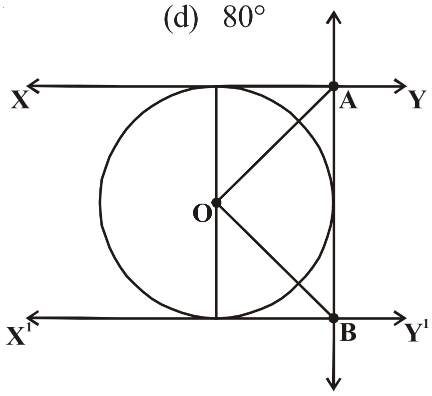
(a) 60° (b) 70°

(c) 80° (d) 90°

(iv) 'O' కేంద్రముగా వృత్తానికి బాహ్యబిందువు P నుండి PA మరియు PB అనే రెండు స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము 80° అయిన $\angle POA$ =

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°

(v) ప్రక్కపటంలో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి XY మరియు X^1Y^1 అనే రెండు సమాంతర స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. మరొక స్పర్శరేఖ AB, స్పర్శ బిందువు C గుండాపోతూ XYను A వద్ద X^1Y^1 ను B వద్ద ఖండించింది అయిన $\angle AOB$ =



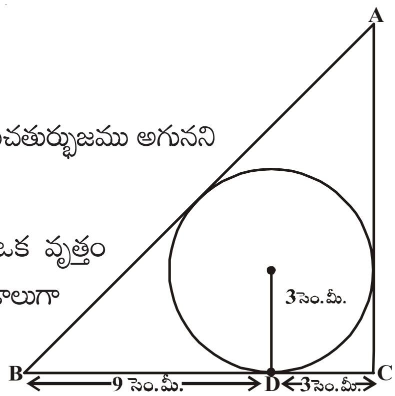
(a) 80° (b) 100°

(c) 90° (d) 60°

2. 5 సెం.మీ మరియు 3 సెం.మీ వ్యాసార్థములతో రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలు గీయబడ్డాయి. చిన్న వృత్తాన్ని స్పర్శించే పెద్ద వృత్తము యొక్క జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో వృత్తము అంతర్లిఖించబడిన అది సమచతుర్భుజము అగునని చూపండి.

4. ప్రక్క పటము త్రిభుజం ABC లో 3 సెం.మీ వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తం అంతర్లిఖించబడింది. స్పర్శబిందువు D, BC భుజాన్ని రెండు రేఖా ఖండాలుగా BD = 9 సెం.మీ. DC = 3 సెం.మీగా విభజించింది. అయిన AB మరియు AC భుజాల పొడవులు కనుగొనండి.



5. 6 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. కేంద్రము నుండి 10 సెం.మీ దూరములో బిందువు నుండి ఒక జత స్పర్శరేఖలను గీచి, వాటి పొడవులు కొలవండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి సరిచూడండి.

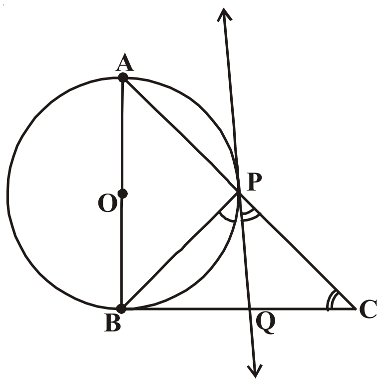
3 సెం.మీ

6. 4 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తానికి, 6 సెం.మీ వ్యాసార్థముగల ఏక కేంద్ర వృత్తంపై గల ఒక బిందువు నుండి స్పర్శరేఖను గీయండి. దాని పొడవును కొలవండి. గణనచేసి సరిచూడండి.

D

7. ఒక చేతి గాజు సహాయంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. దాని బాహ్యంలో ఒక బిందువు తీసుకోండి. ఈ బిందువు నుండి వృత్తము పైకి ఒక జత స్పర్శరేఖలను గీచి కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

8. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము ABCలో AB వ్యాసంగా గల ఒక వృత్తము కర్ణము AC ని P వద్ద ఖండించునట్లు గీయబడింది. P గుండా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ BC భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని నిరూపించండి..

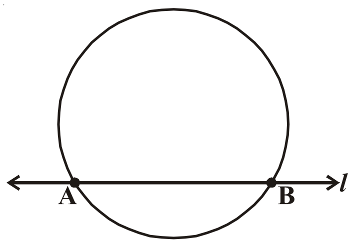


9. 'O' కేంద్రముగా వృత్తానికి బాహ్యంలో గల బిందువు 'R' గుండా స్పర్శరేఖను గీయండి ఈ బిందువు నుండి మీరు ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయగలరు?

(సూచన : ఈ రెండు బిందువుల నుండి స్పర్శబిందువు సమాన దూరంలో ఉన్నది)

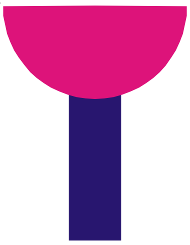
9.4 ఛేదన రేఖతో ఏర్పడే వృత్తఖండము

మనము ఒక వృత్తము మరియు రేఖను పరిశీలించాము. వృత్తాన్ని, రేఖ ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకితే దానిని మనము స్పర్శరేఖ అన్నాము. రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించే దానిని ఛేదనరేఖ అనియూ, ఆ రెండు బిందువులతో ఏర్పడే రేఖా ఖండాన్ని 'జ్యా' అని అన్నాము.



ప్రక్కపటములో 'l' రేఖ ఛేదనరేఖ మరియు AB జ్యా

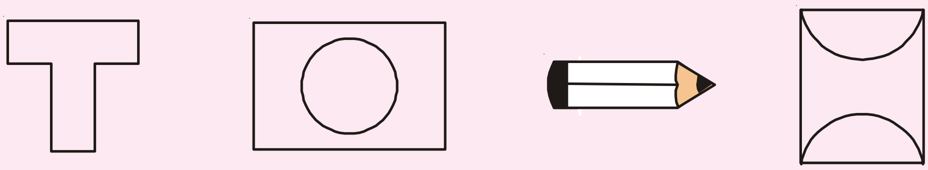
శంకర్ గులాబీ మరియు నీలం రంగు కాగితాలను అతికించి పటము



తయారుచేస్తున్నాడు. ఇదేవిధంగా మరికొన్ని పటాలను కూడా రూపొందించాడు. శుభ్రత తొట్టె (washbasin) ఆకారములో ఒక పటము రూపొందించాడు. ఈ పటము రూపొందించడానికి అతనికి ఎంత కాగితము అవసరము? ఈ పటము రెండు భాగాలుగా కనిపిస్తున్నది. ఒక భాగము దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము కనుగొనుట మీకు తెలుసు. మరి వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యము ఎలా కనుగొంటారు ? కింది చర్చలో మనము దీని యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుటను తెలుసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

ఇది చేయండి

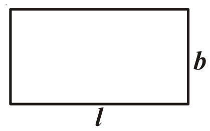
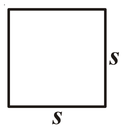
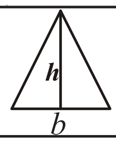
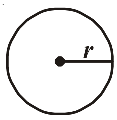
శంకర్ రూపొందించిన మరికొన్ని పటాలు ఇవ్వబడ్డాయి.



ఈ పటాల ఆకారాలను ఏవిధంగా విభజిస్తే వీటి వైశాల్యాలు సులభముగా కనుగొనగలము?

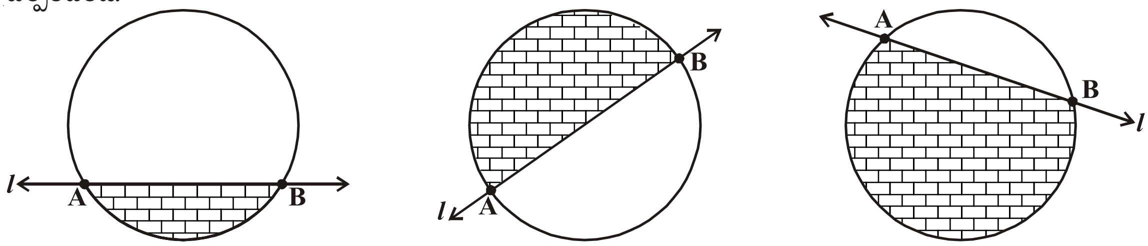
మీరు ఇటువంటి మరికొన్ని పటాలను రూపొందించి, విభిన్న పటాలుగా విభజించండి.

మనము కొన్ని జ్యామితీయ పటాల వైశాల్యాలను ఏవిధంగా కనుగొంటారో కింది పట్టిక ద్వారా గుర్తుకు తెచ్చుకుందాము.

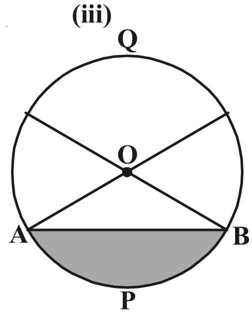
వ.సంఖ్య	పటము	కొలతలు	వైశాల్యము
1.		పొడవు = l వెడల్పు = b	$A = lb$
2.		భుజము = s	$A = s^2$
3.		భూమి = b	$A = \frac{1}{2} bh$
4.		వ్యాసార్థము = r	$A = \pi r^2$

9.4.1. వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుట

వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యమును అంచనావేయుటకు వృత్తానికి ఛేదన రేఖలను గీచి వృత్త ఖండాలను ఏర్పరచండి.

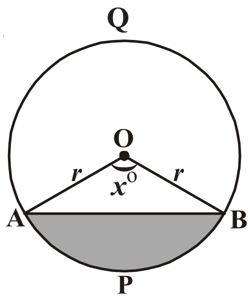


(i) (ii) (iii)



వృత్త చాపము చేతను, జ్యా చేతను ఏర్పడే వృత్త ప్రదేశమును వృత్త ఖండము అంటారని మీకు తెలుసు. దీని వైశాల్యము షేడ్ చేసిన భాగం ( ) తెలుపుతుంది. పటము (i) లో అల్ప వృత్తఖండములో పటము(ii) లో అర్ధవృత్తము మరియు పటము (iii) లో అధిక వృత్త ఖండము తెలుపుతాయి.

ఈ వృత్త ఖండ వైశాల్యములను ఎలా కనుగొంటాము? కింది కృత్యము చేసి తెలుసుకుందాము.



ఒక వృత్తాకార కాగితాన్ని తీసుకొని, వ్యాసము కన్నా తక్కువైన జ్యాను తీసుకొని, పటములో చూపిన విధముగా దాని వెంబడి మడవండి. ఏర్పడిన చిన్న భాగాన్ని షేడ్ చేయండి. ఈ షేడ్ చేసిన భాగాన్ని ఏమంటారు? ఇది అల్ప వృత్త ఖండము (APB) మరి మిగిలిన షేడ్ చేయబడని వృత్త భాగాన్ని ఏమంటారు? ఇది ఖచ్చితముగా అధికవృత్త ఖండము(AQB) అవుతుంది.

మీరు వృత్తము యొక్క సెక్టరు గురించి, వృత్తఖండము గురించి క్రింది తరగతులలో కొంత మేరకు నేర్చుకున్నారు. ప్రక్కపటములో కొంత షేడ్ కాని ప్రాంతము, షేడ్ చేసిన ప్రాంతము (అల్పవృత్త ఖండము) కలిసి సెక్టరు అయింది. అంటే ఇది ఒక త్రిభుజము మరియు వృత్త ఖండముల కలయిక.

ఇచ్చిన పటంలో 'O' కేంద్రము, 'r' వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో OAPB ఒక సెక్టరు. $\angle AOB$ కోణ పరిమాణము 'x°' అనుకొనుము.

వృత్తకేంద్రం వద్ద 360° కోణమును ఏర్పరుచునపుడు ఆవృత్తము వైశాల్యము πr^2 అని మీకు తెలుసు.

కావున, వృత్తకేంద్రము వద్ద 1° కోణము చే ఏర్పడు సెక్టరు వైశాల్యము $\frac{1^{\circ}}{360^{\circ}} \times \pi r^2$.

అందుచే, వృత్తకేంద్రము వద్ద కోణ పరిమాణము x° అయిన సెక్టరు వైశాల్యము $\frac{x^{\circ}}{360^{\circ}} \times \pi r^2$.

ఇప్పుడు 'O' కేంద్రము, 'r' వ్యాసార్థముగా ఏర్పడిన వృత్త ఖండము APB యొక్క వైశాల్యమును మనం పరిశీలిస్తే

APB వృత్తఖండము వైశాల్యము = OAPB సెక్టరు వైశాల్యము - ΔOAB వైశాల్యము

$= \frac{x^{\circ}}{360^{\circ}} \times \pi r^2$ - ΔOAB వైశాల్యము

ప్రయత్నించండి

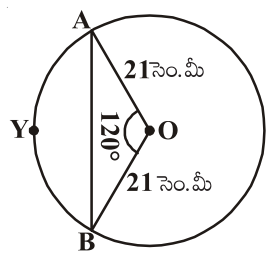
అల్ప వృత్త ఖండ వైశాల్యమును ఉపయోగించి అధికవృత్తఖండ వైశాల్యమును ఏవిధముగా కనుగొంటావు?

ఇవి చేయండి

1. వృత్త వ్యాసార్థము 7 సెం.మీ మరియు దిగువ సెక్టరు కోణాలకు తగినట్లు సెక్టరు వైశాల్యము కనుగొనుము.
   i. 60° ii. 30° iii. 72° iv. 90° v. 120°
2. ఒక గడియారంలో నిమిషాల ముల్లు పొడవు 14 సెం.మీ 10 నిమిషాలలో ఈ ముల్లుచే ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.

ఇప్పుడు వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుటకు ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. పక్క పటములో వృత్త వ్యాసార్థము 21 సెం.మీ. మరియు $\angle AOB = 120^0$ అయిన వృత్తఖండము AYB వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ మరియు $\sqrt{3} = 1.732$ గా తీసుకోండి)



సాధన : AYB వృత్తఖండ వైశాల్యము

= OAYB సెక్టరు వైశాల్యము – ΔOAB వైశాల్యము

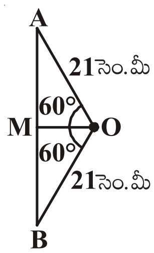
ఇప్పుడు OAYB సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ చ.సెం.మీ

= 462 చ.సెం.మీ

ΔOAB వైశాల్యము కనుగొనుటకు పటములో చూపిన విధముగా $OM \perp AB$ ను గీయాలి.

OA = OB కావున లం.క.భు. సర్వసమాన నియమము ప్రకారము $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ అగును.

కావున, AB మధ్యబిందువు M అగును మరియు



$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$

ఇప్పుడు $OM = x$ సెం.మీ అనుకొనిన

ΔOMA నుండి, $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0.$

లేదా, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

లేదా, $x = \frac{21}{2}$

కావున, $OM = \frac{21}{2}$ సెం.మీ

అలాగే, $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\Rightarrow \frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

కావున, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ.

అందుటవలన $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ. $= 21\sqrt{3}$ సెం.మీ.

దీని నుండి ΔOAB వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ చ.సెం.మీ

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ చ.సెం.మీ ...(2)

ఈ విధంగా (1), (2) లను బట్టి

AYB వృత్తఖండం వైశాల్యము $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ చ.సెం.మీ

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ చ.సెం.మీ

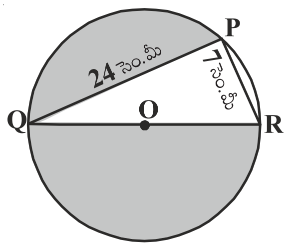
$= 271.047$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ-2. ప్రక్క పటములో O కేంద్రముగా వృత్తములో PQ = 24 సెం.మీ., PR = 7 సెం.మీ మరియు వ్యాసము QR అని ఇవ్వబడింది. షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండము వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొండి)

సాధన : షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండం వైశాల్యము = OQPR సెక్టరు వైశాల్యము - PQR త్రిభుజ వైశాల్యము.

QR వ్యాసము కావున, $\angle QPR = 90°$ (అర్ధవృత్తములో కోణము)

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి,



ΔQPR, $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

QR $= \sqrt{625} = 25$ సెం.మీ

దీని నుండి వృత్త వ్యాసార్ధము $= \frac{1}{2}$ QR

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ సెం.మీ

ఇపుడు, OQPR అర్ధవృత్తము వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

$= 327.38$ చ.సెం.మీ ..... (1)

QPR లంబకోణ త్రిభుజవైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

$= 84$ చ.సెం.మీ ..... (2)

(1), (2) లను బట్టి,

షేడ్‌చేయబడిన వృత్తఖండము వైశాల్యము $= 327.38 - 84$

$= 243.38$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ-3. ప్రక్కపటములో చూపిన విధముగా ఒక గుండ్రని ఉపరితలముగల బల్లపై ఆరు సమాన ఆకృతులు కలవు. బల్లపై తలము యొక్క వ్యాసార్ధము 14 సెం.మీ అయిన చ.మీ ₹5 చొప్పున బల్లపై గల ఆకృతులకు రంగు వేయడానికి ఎంతఖర్చు అవుతుంది. ($\sqrt{3} = 1.732$ తీసుకోండి)

సాధన : వృత్తములో అంతర్లిఖించబడిన క్రమషడ్భుజి యొక్క భుజము వృత్త వ్యాసార్థానికి సమానమని మనకు తెలుసు.

$\therefore$ క్రమషడ్భుజి యొక్క ఒక్కొక్క భుజము = 14 సెం.మీ

అందువలన, ఆకృతి చేయబడిన ఆరు వృత్త ఖండాల వైశాల్యము = వృత్తవైశాల్యము - క్రమషడ్భుజి వైశాల్యము

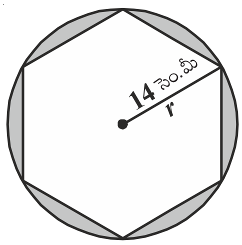
ఇపుడు, వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ చ.సెం.మీ ..... (1)

క్రమషడ్భుజి వైశాల్యము $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$

$= 509.2$ చ.సెం.మీ ..... (2)



(1), (2)లను బట్టి ఆరుఆకృతుల మొత్తం వైశాల్యం

$= 616 - 509.21$

$= 106.79$ చ.సెం.మీ

దీని నుండి, చ.మీ ₹5 చొప్పున ఆరు ఆకృతులకు రంగు వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు

= ₹106.79 × 5

= ₹533.95

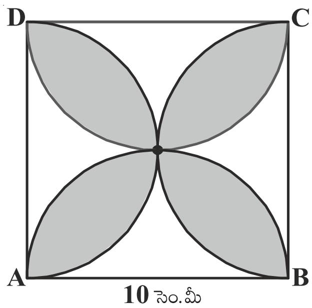
అభ్యాసము - 9.3

1. 10 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో ఒక జ్యా కేంద్రము వద్ద లంబకోణాన్ని ఏర్పరిస్తే, కింది ఇవ్వబడిన వృత్తఖండాల వైశాల్యాలు కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి.)
   i. అల్ప వృత్తఖండము ii. అధిక వృత్త ఖండము

2. 12 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో ఒక జ్యా కేంద్రము వద్ద $120°$ కోణాన్ని ఏర్పరచింది. జ్యాతో ఏర్పడిన సంబంధిత అల్పవృత్త ఖండం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.
   ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{3} = 1.732$ తీసుకోండి)

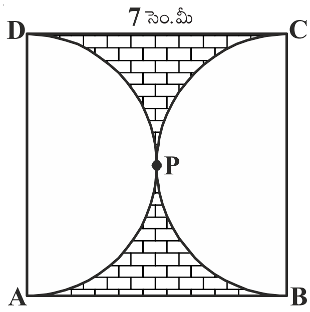
3. ఒక కారు అద్దముపై ఒకదానిపై అధ్యారోహణము (over lap) కాని నీటిని తుడిచే రెండు వైపర్లు వున్నాయి. ప్రతి వైపర్ పొడవు 25 సెం.మీ. $115°$ కోణముతో నీటిని తుడుస్తున్నది. ఒకేసారి రెండు వైపర్లు పనిచేయు సందర్భములో మొత్తం అద్దాన్ని శుభ్రపరిచే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి.)

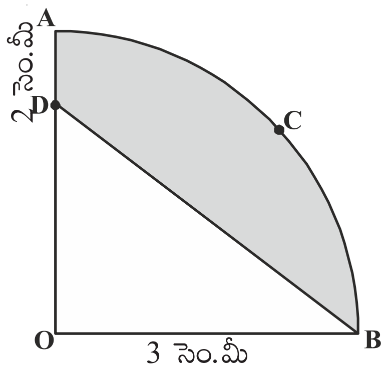
4. ప్రక్కపటములో ABCD చతురస్రం యొక్క భుజము 10 సెం.మీ పొడవు కలిగి వున్నది మరియు చతురస్రభుజము వ్యాసముగా గల అర్ధవృత్తాలు ప్రతిభుజము వైపున గీయబడ్డాయి. షేడ్ చేయబడిన ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి.)



5. పక్కపటంలో ABCD చతురస్రభుజము 7 సెం.మీ మరియు APD మరియు BPC లు అర్ధవృత్తములు అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశవైశాల్యము కనుగొనుము.

$(\pi = \frac{22}{7}$ ను తీసుకొండి)



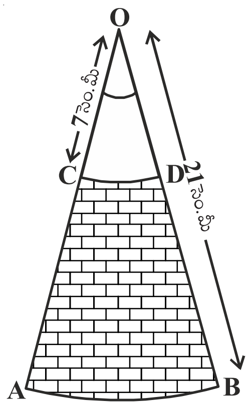


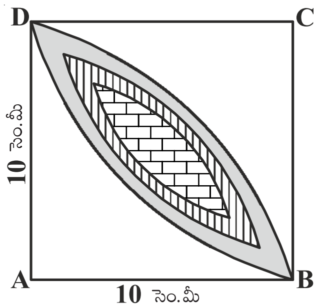
6. ప్రక్క పటములో 'O' కేంద్రము మరియు 3.5 సెం.మీ వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తములో OACB అనేది ఒక సెక్టరు పాదము OD = 2 సెం.మీ అయిన షేడ్ చేసిన ప్రాంత వైశాల్యము కనుగొనుము.

$(\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి)

7. 'O' కేంద్రము గాగల రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 21సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ మరియు AB, CD లు రెండు చాపరేఖలు (పటము చూడండి). $\angle AOB = 30°$ అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యమును కనుగొనండి.

$(\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి)





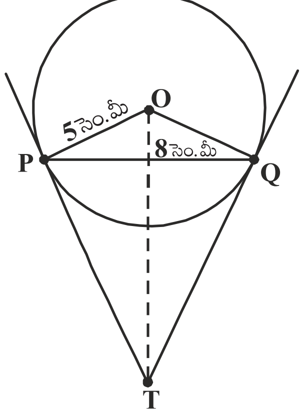
8. పక్కపటంలో వ్యాసార్థము 10 సెం.మీ గా గల వృత్తంలో రెండు సెక్టరు పాదముల మధ్య ఏర్పడిన ఉమ్మడి ప్రదేశం (షేడ్ చేయబడినది) యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి)

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[పరీక్షలకొరకు నిర్ధేశించబడినది కాదు]

1. బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తము పైకి గీయబడిన రెండు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము మరియు రెండు స్పర్శ బిందువులను కేంద్రంతో కలుపుతూ గీయబడిన రేఖా ఖండాలు ఏర్పరచిన కోణానికి సంపూరకమని నిరూపించండి.

2. 5 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో PQ జ్యా పొడవు 8సెం.మీ. P మరియు Q గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖలు T వద్ద ఖండించుకున్నాయి. (పటము చూడండి) అయిన TP పొడవును కనుగొనండి.

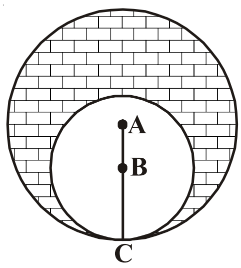


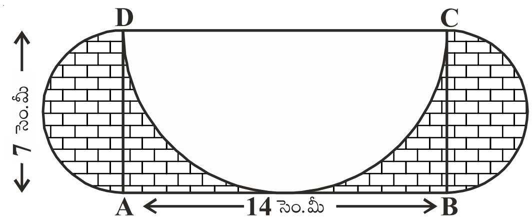
3. ఒక చతుర్భుజములో వృత్తము దాని నాలుగు భుజాలను తాకుతూ అంతర్లిఖించబడి వున్నచో ఆ చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాలు వృత్త కేంద్రము వద్ద చేయు కోణాలు సంపూరకాలని నిరూపించండి.

4. 8 సెం.మీ పొడవు గల AB రేఖాఖండాన్ని గీయండి. A కేంద్రముగా 4 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తము, B కేంద్రముగా 3సెం.మీ వ్యాసార్థముతో మరొక వృత్తము గీయండి. ఒక వృత్త కేంద్రము నుండి మరొక వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయండి.

5. ABC లంబకోణ త్రిభుజములో AB = 6 సెం.మీ, BC = 8 సెం.మీ మరియు $\angle B = 90^0$. B శీర్షం నుండి AC పైకి గీయబడిన లంబము BD మరియు B, C, D బిందువుల గుండా వృత్తము గీయబడింది. A నుండి ఈ వృత్తముపైకి స్పర్శరేఖలను గీయండి.

6. A, B కేంద్రాలుగా గల రెండు వృత్తాలు C వద్ద స్పర్శించుకున్నాయి. AC = 8 సెం.మీ. మరియు AB = 3 సెం.మీ అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.





7. AB = 14 సెం.మీ. మరియు BC = 7 సెం.మీ కొలతలు ABCD దీర్ఘచతురస్రము గీయబడింది. DC, BC మరియు AD వ్యాసాలుగా గల మూడు అర్ధవృత్తాలు పటములో చూపినట్లుగా గీయబడినవి. అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

మనము ఈ అధ్యాయములో క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నాము.

1. వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ మరియు ఛేదనరేఖలకు నిర్వచనాలు. వృత్త జ్యా యొక్క భావనను కూడా ఉపయోగించుకున్నాము.
2. వివిధ రకాల త్రిభుజాల భావనలు ముఖ్యంగా లంబకోణ త్రిభుజాలు మరియు సమద్విబాహు త్రిభుజాలను గూర్చి తెలుసుకున్నాము.
3. కింది సిద్ధాంతాలను నేర్చుకున్నాము.

   a) వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా వుంటుంది.

   b) వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.
4. కింది నిర్మాణాలను చేయుట నేర్చుకున్నాము.

   a) వృత్తకేంద్రము, వృత్త పరిధిపై ఒక బిందువు ఇచ్చినపుడు ఆ బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను నిర్మించుట.

   b) బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తానికి ఒక జత స్పర్శరేఖలను నిర్మించుట.
5. వృత్తాలకు, స్పర్శరేఖలకు సంబంధించిన కొన్ని ప్రవచనాలను ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చునో తెలుసుకున్నాము. ఈ విధానములో కొన్ని పూర్వఫలితాలను ఉపయోగించుకొని తార్కికముగా నిరూపించి నూతన ఫలితాలను రాబట్టాము.
6. మనం అల్ప వృత్త ఖండ/అధిక వృత్త ఖండ వైశాల్యాలు కనుగొనుట నేర్చుకున్నాము.

   వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యము = సంబంధిత సెక్టరు వైశాల్యము - సంబంధిత త్రిభుజ వైశాల్యము.

అధ్యాయము

10 క్షేత్రమితి

(Mensuration)

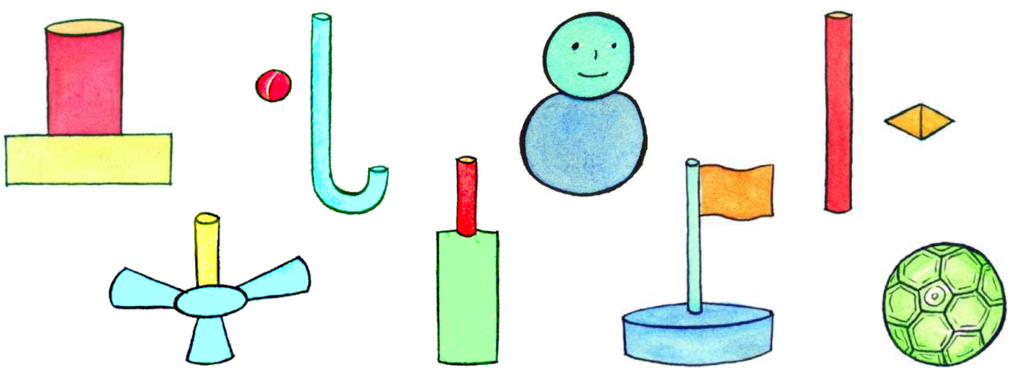
10.1 పరిచయం

8, 9వ తరగతులలో ఘనాకృతుల యొక్క వైశాల్యము, ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములను గూర్చి నేర్చుకొన్నారు. ఆ భావనలను వివిధ అభ్యాసములు, కృత్యములు చేయుట ద్వారా అవగాహన చేసుకున్నారు. వాటిని నిత్యజీవిత సంఘటనలతో అన్వయించి, దైనందిన జీవితములో వాటి ప్రాముఖ్యత ఏమిటి? ఆవశ్యకత ఏమిటి? మరియు వాటిని ఏవిధముగా లెక్కిస్తారు? అంచనా వేస్తారు అను అంశములను గుర్తించారు. ఉదాహరణకు ఒక గదికి సున్నం వేయడానికి ఎంత పరిమాణములో సున్నము అవసరము అనుదానిని లెక్కించడానికి ఆ గది ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనాలి కాని ఆ గది యొక్క ఘనపరిమాణము అవసరముండదు. పండిన ధాన్యమును నిల్వ చేయడానికి ఎన్ని సంచులు అవసరము అవుతాయో లెక్కించడానికి మనకు ఘనపరిమాణము అవసరమవుతుంది కాని ఉపరితలవైశాల్యము అవసరముండదు.

ప్రయత్నించండి

1. ఈ క్రింది వాటిని పరిశీలించి ప్రతి సందర్భములో ఘనపరిమాణము మరియు వైశాల్యములలో ఏది అవసరమవుతుందో? ఎందుచేత? వివరించండి ?
   - i. ఒక సీసాలో గల నీటి పరిమాణం
   - ii. గుడారము తయారుచేయడానికి కావలసిన గుడ్డ పరిమాణము
   - iii. ఒక లారిలో గల సంచుల సంఖ్య
   - iv. సిలెండర్‌లో నింపబడిన గ్యాస్ పరిమాణం
   - v. ఒక అగ్గిపెట్టెలో నింపగల్గిన అగ్గిపుల్లల సంఖ్య
2. పైన ఉదహరించిన విధముగా మరో 5 సందర్భములను నీవు తెలిపి మీ స్నేహితులను ఘనపరిమాణము, వైశాల్యములలో ఏది అవసరమో? చెప్పమని అడగండి.

మన చుట్టూ యున్న పరిసరాలలో వివిధ ఆకృతులలో నున్న (రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఆకృతుల కలయికతో వున్నవి) ఘనాకార వస్తువులను చూస్తూయుంటాము కదా! స్థంబములపై నిర్మింపబడిన ఇండ్లు, ఘనాకృతిలో యున్న పునాదిపై నిర్మింపబడిన స్థూపాకృతిలో యున్న నీటి ట్యాంకులు, స్థూపాకార హ్యాండిల్‌ను కల్గి మిగిలిన భాగమంతా సమతలము గా గల క్రికెట్ బ్యాట్ మొదలగునవి. మీ చుట్టూ యున్న విభిన్న ఆకృతులను గమనించండి? కొన్నింటిని ఈ క్రింది ఇయ్యబడ్డాయి.

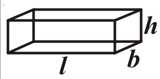
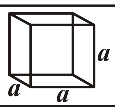
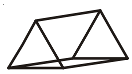
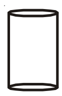
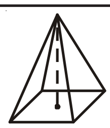
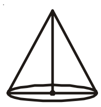
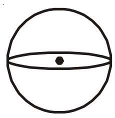
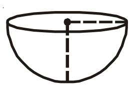


ఫుట్‌బాల్ వంటి వస్తువుల యొక్క ఉపరితలవైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను కనుగొనే విధానమును నేర్చుకొన్నారు. కాని మిగిలిన వస్తువులు రెండు కదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘనాకృతుల కలయిక వలన ఏర్పడినవిగా మనము గుర్తించవచ్చు. అందుచే వాటి ఉపరితలవైశాల్యము, ఘనపరిమాణము లను ఏవిధముగా కనుగొనాలో మనము ఇప్పుడు నేర్చుకొందాం. ఈ క్రింది పట్టికలో వివిధ ఘనాకృతులు, వాటి వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములు కనుగొనే సూత్రములు ఇవ్వబడ్డాయి.

ప్రయత్నించండి

1. పైన ఇయ్యబడిన ఘనాకృతుల పటములను మీకు తెలిసిన ఘనాకృతులుగా విడదీయండి.
2. మీ చుట్టూ యున్న పరిసరాలలో మీరు గమనించిన 5 వివిధ ఆకృతుల సమ్మేళనముగా యున్న వస్తువులు / పటములను గూర్చి ఆలోచించండి ?

వివిధ ఘనకృతులను, వాటి ఉపరితలవైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

వ. సం.	ఘనాకృతి పేరు	ఆకృతి	ఉపరితలవైశాల్యం / వక్రతలవైశాల్యం	సంపూర్ణతల వైశాల్యం	ఘనపరి మాణం	సంకేత వివరణ
1.	దీర్ఘఘనం		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l:పొడవు b:వెడల్పు h:ఎత్తు
2.	సమఘనం		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a:ఘనపు భుజం
3.	క్రమ పట్టకం		భూపరిధి × ఎత్తు	వక్రతల వైశాల్యం +2(చివరి కర్ణాల వైశాల్యం)	భూవైశాల్యం ×ఎత్తు	-
4.	క్రమ వృత్తాకార స్థూపం		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h	r:భూవ్యాసార్థం h:ఎత్తు
5.	క్రమ పిరమిడ్		$\frac{1}{2}$ (భూపరిధి) × ఏటవాలు ఎత్తు	ఉపరితల వైశాల్యం+భూ వైశాల్యం	$\frac{1}{3}$ ×భూ వైశాల్యం ×ఎత్తు	-
6.	క్రమ వృత్తాకార శంఖువు		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	r:భూవ్యాసార్థం h:ఎత్తు l:ఏటవాలు ఎత్తు
7.	గోళం		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r:వ్యాసార్థం
8.	అర్ధగోళం		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r:వ్యాసార్థం

ఈ పట్టికలోని వివిధ ఆకృతులను సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-1. శంఖాకారములో యున్న గుడారము యొక్క భూవ్యాసార్ధం 7 మీటర్లు. గుడారము నిర్మించడానికి కావలసిన గుడ్డ పొడవును గుడ్డ యొక్క వెడల్పు 2 మీటర్లుగా ఉన్నప్పుడు కనుగొనండి. [$\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము]

సాధన : గుడారము యొక్క భూవ్యాసార్ధం $(r) = 7$ మీటర్లు

ఎత్తు$(h) = 10$ మీటర్లు

$\therefore$ శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు (l) $= \sqrt{r^2 + h^2}$ $\qquad (\because l^2 = r^2 + h^2)$

$= \sqrt{49+100}$

$= \sqrt{149} = 12.2$ మీటర్లు.

గుడారము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2$ చ.మీ

$= 268.4$ చ.మీ.

ఉపయోగించిన గుడ్డ యొక్క వైశాల్యం $= 268.4$ చ.మీ.

గుడ్డ యొక్క వెడల్పు $= 2$మీ.

గుడ్డ యొక్క పొడవు = $\frac{\text{వైశాల్యం}}{\text{వెడల్పు}} = \frac{268.4}{2} = 134.2$ మీ.

ఉదాహరణ-2. స్థూపాకృతిలో నున్న నూనె పీపా 2 మీటర్ల భూవ్యాసార్ధం 7 మీటర్ల ఎత్తును కల్గియున్నది. పీపాకు రంగు వేయడానికి పెయింటర్ 1 చదరపు మీటరునకు ₹3 లను తీసుకొంటుంటే, 10 నూనె పీపాలకు రంగు వేయడానికి ఎంత ఖర్చువుతుంది?

సాధన : స్థూపాకార నూనె పీపా యొక్క భూవ్యాసము $(d) = 2$ మీటర్లు

స్థూపము వ్యాసార్ధము (r) = $\frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1$ మీటరు

స్థూపాకార నూనె పీపా యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2 \times \pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1+7)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$

$= \frac{352}{7}$ (మీటరు)^2 = 50.28 (మీటరు)^2

అందుచే పీపా యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం = 50.28 (మీటరు)^2

1చ.మీ రంగు వేయడానికి కయ్యే ఖర్చు = ₹ 3

$\therefore$ 10 పీపాలకు రంగు వేయ్యడానికయ్యే = $50.28 \times 3 \times 10 = 1508.4$

మొత్తం ఖర్చు = ₹ 1508.4

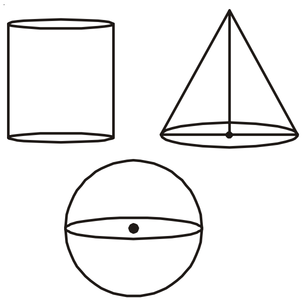
ఉదాహరణ-3. ఒక గోళం, ఒక స్థూపం, ఒక శంఖువు ఒకే ఎత్తు, ఒకే వ్యాసార్థంను కల్గియున్నాయి. అయినచో వాటి యొక్క వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తి ఎంత?

సాధన : గోళం, స్థూపం మరియు స్థూపం యొక్క భూవ్యాసార్థం 'r' అనుకొందాం.

గోళము ఎత్తు = వ్యాసం = $2r$.

$\therefore$ శంఖువు ఎత్తు = స్థూపము ఎత్తు = గోళము ఎత్తు

$= 2r$.



శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$

$\because S_1$ = గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$

S_2 = స్థూపము ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

S_3 = శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl = \pi r \times \sqrt{5}\, r = \sqrt{5}\, \pi r^2$

$\therefore$ ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి = $S_1 : S_2 : S_3$

$S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\, \pi r^2$

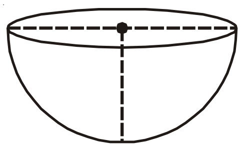
$= 4 : 4 : \sqrt{5}$

ఉదాహరణ-4. ఒక కంపెనీ దళసరి ఉక్కుషీట్ నుపయోగించి 1000 అర్ధగోళాకారంలో ఉన్న బేసిన్‌లను తయారు చేయాలని అనుకొంది. అర్ధగోళాకార బేసిన్ వ్యాసార్థం 21 సెం.మీ ఉండే విధముగా 1000 బేసిన్‌లు తయారు చేయడానికి కావలసిన ఉక్కుషీట్ యొక్క వైశాల్యము ఎంత?

సాధన : అర్ధగోళాకార బేసిన్ వ్యాసార్థం (r) = 21 సెం.మీ

ఉపరితలవైశాల్యం $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$



= 2772 (సెం.మీ)^2.

అందుచే అర్ధగోళాకార బేసిన్ యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం $= 2772$ (సెం.మీ)^2.

1 బేసిన్ తయారికి కావలసిన ఉక్కుషీట్ వైశాల్యం $= 2772$ (సెం.మీ)^2

1000 బేసిన్‌లు తయారీకి కావలసిన మొత్తం ఉక్కుషీట్ వైశాల్యం

$$= 2772 \times 1000$$
$$= 2772000 \text{ cm}^2$$
$$= 277.2\ m^2$$

ఉదాహరణ-5. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము యొక్క భూవ్యాసార్ధం 14 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 21cm అయిన ఈ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) భూతలవైశాల్యము (ii) వక్రతల వైశాల్యం

(iii) సంపూర్ణ తల వైశాల్యం (iv) క్రమ వృత్తాకార స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణం

సాధన : స్థూపపు భూవ్యాసార్ధం (r) = 14 సెం.మీ

స్థూపపు ఎత్తు (h) = 21సెం.మీ

(i) భూ వైశాల్యం $\pi r^2 = \frac{22}{7}(14)^2 = 616$ (సెం.మీ)^2

(ii) వక్రతల వైశాల్యం $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21 = 1848$ (సెం.మీ)^2.

(iii) సంపూర్ణతల వైశాల్యం $=$ $2 \times$ భూవైశాల్యం $+$ వక్రతల వైశాల్యం
$= 2 \times 616 + 1848 = 3080$ (సెం.మీ)^2.

(iv) స్థూపపు ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h =$ భూవైశాల్యం $\times$ ఎత్తు
$= 616 \times 21 = 12936$ (సెం.మీ)^3.

ఉదాహరణ-6. 2.1సెం.మీ వ్యాసార్ధము కల్గిన గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం, ఘనపరిమాణములను కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము)

సాధన : గోళ వ్యాసార్ధం (r) = 2.1 సెం.మీ

గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

$$= \frac{1386}{25} = 55.44(\text{సెం.మీ})^2$$

$\therefore$ గోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808\ (\text{సెం.మీ})^3.$$

ఉదాహరణ-7. 3.5 *cm* వ్యాసార్ధము కల్గిన అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

సాధన : అర్ధగోళవ్యాసార్థము (r) = 3.5 సెం.మీ = $\frac{7}{2}$ సెం.మీ

అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 (\text{సెం.మీ})^3$$

సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5\ (\text{సెం.మీ})^2$$

అభ్యాసము - 10.1

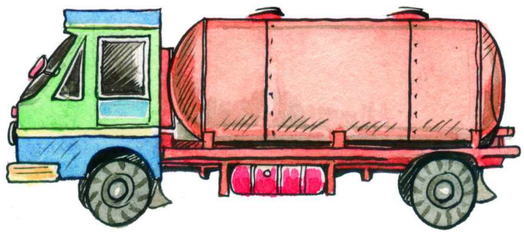
1. క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఆకారములో నున్న జోకర్ టోపి యొక్క భూవ్యాసార్థము 7 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 24 సెం.మీ. ఇటువంటి 10 టోపిలను తయారు చేయడానికి కావలసిన బట్టి అట్టముక్క (షీట్) యొక్క పరిమాణము ఎంత?
2. క్రీడా వస్తువులను తయారుచేసే కంపెనీ షటిల్‌కాక్‌లను నిల్వ చేసేందుకు 100 స్థూపాకార కాగితపు డబ్బాలను తయారు చేయాలనుకొంది. స్థూపాకారపు డబ్బా యొక్క కొలతలు 35 సెం.మీ పొడవు/ఎత్తు మరియు భూవ్యాసార్థము 7 సెం.మీ ఉండే విధముగా 100 డబ్బాలను తయారు చేయడానికి కావలసిన కాగితపు పరిమాణము ఎంత?
3. 6 సెం.మీ భూవ్యాసార్థము, 7 సెం.మీ ఎత్తు కల్గిన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి?
4. ఒక స్థూపము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యమునకు సమానము. రెండింటి యొక్క భూవ్యాసార్థములు సమానము అయిన స్థూపము యొక్క ఎత్తు, శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తుల నిష్పత్తి ఎంత ?
5. ఒక స్వయం సహాయక బృందం 3 సెం.మీ భూవ్యాసార్థం మరియు 4 సెం.మీ ఎత్తు కల్గి శంఖువు ఆకారములో యున్న జోకర్ టోపీలను తయారు చేయాలనుకొంది.
6. 1000 చ.సెం.మీ రంగు కాగితము వారు కలిగి యున్నచో దాని ద్వారా ఎన్ని టోపీలను తయారుచేయగలరు?
6. ఒక స్థూపము మరియు శంఖువు సమాన భూవ్యాసార్థమును మరియు ఎత్తును కల్గి యున్నాయి. అయినచో వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి 3:1 అని చూపుము.
7. స్థూపాకారముగా యున్న ఇనుప కడ్డీ యొక్క ఎత్తు 11 సెం.మీ మరియు భూవ్యాసము 7 సెం.మీ అయినచో ఇటువంటి 50 ఇనుపకడ్డీల యొక్క మొత్తము ఘనపరిమాణము ఎంత?

8. ఒక ధాన్యపురాశి 12 మీటర్ల భూవ్యాసము మరియు 8 మీటర్ల ఎత్తు కల్గిన శంఖువు వలే యున్నది. అయినచో దాని ఘనపరిమాణము ఎంత? ఆ ధాన్యపురాశిని కప్పడానికి కావలసిన గుడ్డ పరిమాణము ఎంత? ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనుము)

9. ఒక శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యము 4070 చదరపు సెంటీమీటర్లు మరియు దాని వ్యాసము 70 సెం.మీ. అయినచో దాని ఏటవాలు ఎత్తును కనుగొనుము.

10.2 ఘనాకార వస్తువుల సముదాయ ఉపరితల వైశాల్యము

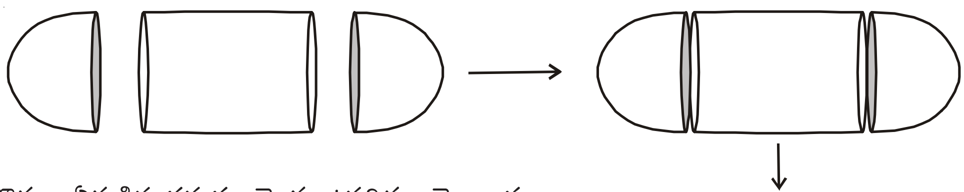
మనము నిత్యం మన చుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలో యున్న కొన్ని వస్తువులు కొన్ని ఘనాకార ఆకృతుల సముదాయముగా గుర్తిస్తాము. నిత్యజీవితములో చెక్క వస్తువులు, గృహోపకరణములు, మందుబిళ్ళలు, సీసాలు, ఆయిల్ ట్యాంకర్లు మొదలగునవి. మనము ఐస్‌క్రీంను తింటాము. మీరు చెప్పగలరా? ఐస్‌క్రీం ఆకృతిలో ఎన్ని ఘనాకార ఆకృతులున్నాయో కోన్ ఐస్‌క్రీం సాధారణముగా శంఖువు మరియు అర్ధగోళ ఆకృతుల సముదాయం.

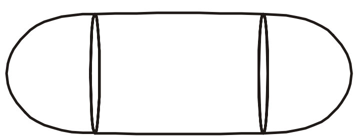


మరో ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ఆయిల్ ట్యాంకర్ లేదా నీటి ట్యాంకర్ ఒకే ప్రాథమిక ఆకృతి కల్గిన వస్తువా? మీరు జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే ట్యాంకర్ స్థూపము దాని చివరలు అర్ధగోళకృతులుగా గమనించవచ్చు.

పైన ఉదహరించిన వస్తువుల వలె నున్న వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యముగాని ఘనపరిమాణమును గాని కనుగొనాలంటే మనం ఏమి చేయాలి. వీటికి ముందు తరగతులలో నేర్చుకొనే విధముగా వర్గీకరించలేము.

పటములో చూపిన విధముగా ఆయిల్‌ట్యాంకర్ స్థూపము మరియు రెండు అర్ధగోళముల సమూహము. దీనిని ఈ క్రింది పటము ద్వారాచూపించవచ్చు.





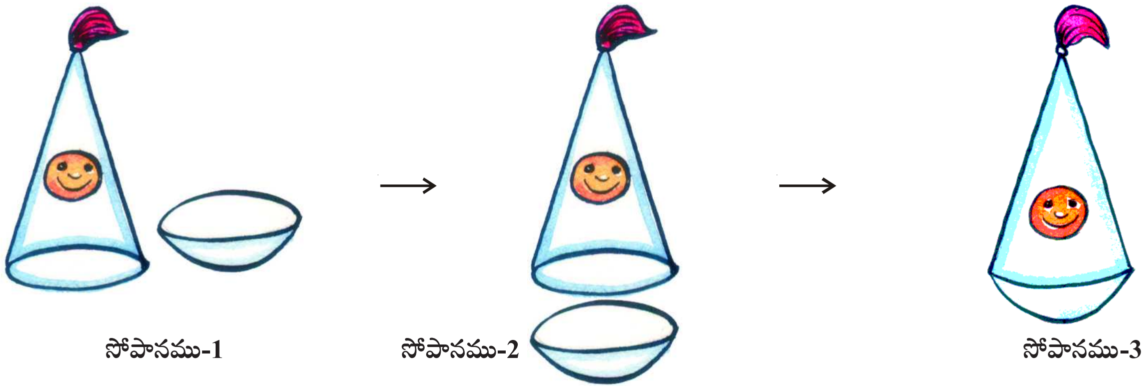
కొత్తగా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము అర్ధగోళముల వక్రతల వైశాల్యములు మరియు స్థూపము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములు మొత్తమునకు సమానము.

కొత్తగా ఏర్పడిన ఘనాకార వస్తువు TSA = ఒక చివరి అర్ధగోళ CSA + స్థూపము యొక్క CSA + రెండవ చివరి అర్ధగోళం CSA

ఇచ్చట TSA అనగా సంపూర్ణతల వైశాల్యము మరియు CSA అనగా వక్రతల వైశాల్యము.

దేవర్ష శంఖువు ఆకారవస్తువును, అర్ధగోళాకార వస్తువును కలిపి ఒక ఆటవస్తువుగాను తయారుచేయాలి అని అనుకున్నాడు. అతడు తయారు చేసే విధానములోని సోపానములు పరిశీలిద్దాం.

ముందుగా అతడు శంఖువు ఆకారభాగము మరియు అర్ధగోళాకార భాగములను తీసుకోవాలి. శంఖువు యొక్క భూవ్యాసార్ధము. అర్ధగోళ వ్యాసార్ధములు సమానము గా ఉండాలి. ఆట బొమ్మను తయారు చేసే విధానములో సోపానములు ఈ క్రింది విధముగా ఉంటాయి.



సోపానము-1 సోపానము-2 సోపానము-3

చివరగా గుండ్రముగా యున్న అడుగుభాగము కల్గిన ఆటబొమ్మ తయారువుతుంది. ఇప్పుడు ఈ ఆటబొమ్మకు రంగు వేయడానికి కావలసిన రంగు పరిమాణము తెలుసు కావాలంటే దాని యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము తెలియాలి. ఈ ఉపరితల వైశాల్యము శంఖువు ఆకార భాగము ఉపరితల వైశాల్యమును, అర్ధగోళాకార భాగ వైశాల్యమును కల్గి యుంటుంది.

అందుచే

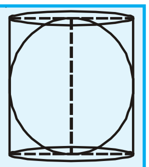
ఆటబొమ్మ సంపూర్ణ తల వైశాల్యము = అర్ధగోళ ఉపరితల వైశాల్యము + శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము

ప్రయత్నించండి

- మీకు తెలిసిన కొన్ని ఘనాకార వస్తువులను తీసుకొని రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ వస్తువులను కలిపి మీ నిత్యజీవితంలో కనిపించే ఆకారాలను వీలయినన్ని తయారు చేయండి.
  [**సూచన** : బంకమట్టి, బంతులు, పైపులు, కాగితపు శంఖాలు, ఘన, దీర్ఘఘనాకార పెట్టెలు మొదలగునవి]

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

స్థూపాకార పాత్రలో ఒక గోళము అంతర్లీన పరచబడినది. అయినచో గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యము స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యమునకు సమానమవుతుందా? మీ సమాధానము 'అవును' అయితే అది ఏవిధముగా సాధ్యమో సహేతుకముగా వివరింపుము ?



ఉదాహరణ-8. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భూమి 15 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 20 సెం.మీ. దానిని కర్ణము వెంబడి భ్రమణము చేయగా ఏర్పడే ద్వికశంఖువు ఆకారము యొక్క ఘనపరిమాణము మరియు ఉపరితల వైశాల్యము కనుక్కోండి. (π=3.14).

సాధన : ABC లంబకోణ త్రిభుజం

AB = 15సెం.మీ మరియు AC = 20 సెం.మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము ΔABC లో

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 15^2 + 20^2$

$BC^2 = 225 + 400 = 625$

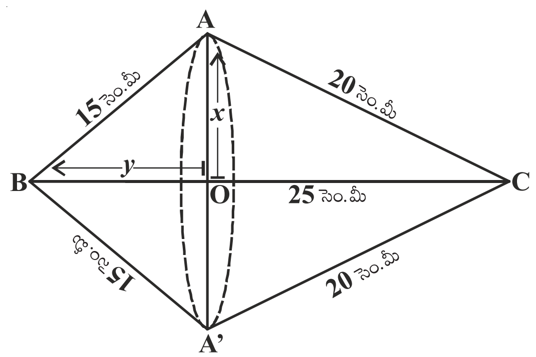
$BC = \sqrt{625} = 25$ సెం.మీ.

$OA = x$ మరియు $OB = y$ అనుకొందాం.

ΔABO మరియు ΔABC లలలో $\angle BOA = \angle BAC$ మరియు $\angle ABO = \angle ABC$

అందుచే $\Delta BOA \sim \Delta BAC$ ($\because$ కోణము – కోణము సరూపత)

అందుచే, $\dfrac{BO}{BA} = \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{BA}{BC}$



$\Rightarrow \dfrac{y}{15} = \dfrac{x}{20} = \dfrac{15}{25}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{15} = \dfrac{x}{20} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{15} = \dfrac{3}{5}$ మరియు $\dfrac{x}{20} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{5} \times 15$ మరియు $x = \dfrac{3}{5} \times 20$

$\Rightarrow y = 9$ మరియు $x = 12.$

అందుచే

$OA = 12$ సెం.మీ మరియు $OB = 9$ సెం.మీ

ద్విశంఖువు ఘనపరిమాణము = శంఖువు CAA' ఘనపరిమాణము + శంఖువు BAA'ఘనపరిమాణము

$= \dfrac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OC + \dfrac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OB$

$= \dfrac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 16 + \dfrac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 9$

$= \dfrac{1}{3}\pi \times 144(16+9)$

$= \dfrac{1}{3} \times 3.14 \times 144 \times 25$ (సెం.మీ)^3

$= 3768$ (సెం.మీ)^3.

సూచన :

$= \dfrac{1}{3}\pi(OA)^2[OC+OB]$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 12^2 \times [16+9]$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 144 \times 25$

ద్విశంఖువు ఉపరితల వైశాల్యము = శంఖువు CAA' వక్రతల వైశాల్యము

+ శంఖువు BAA' వక్రతల వైశాల్యము

$= (\pi \times OA \times AC) + (\pi \times OA \times AB)$

$= (\pi \times 12 \times 20) + (\pi \times 12 \times 15)$ (సెం.మీ)^2

$= 420\ \pi$ (సెం.మీ)^2

$= 420 \times 3.14$ (సెం.మీ)^2

$= 1318.8$ (సెం.మీ)^2.

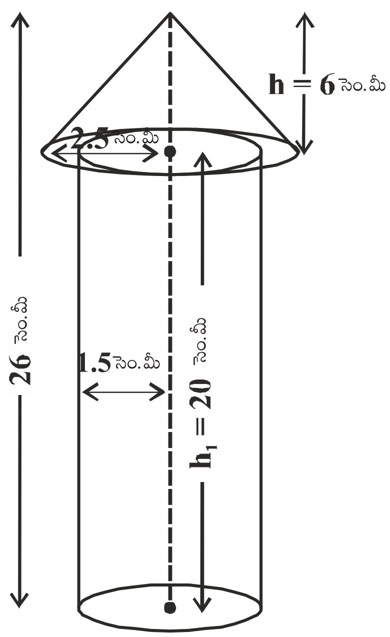
ఉదాహరణ-9. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధముగా కర్రతో చేసిన రాకెట్ బొమ్మ స్థూపముపై నిలిపిన శంఖువు వలే యున్నది. రాకెట్ యొక్క ఎత్తు 26 సెం.మీ, శంఖువు ఆకారములో యున్న భాగము ఎత్తు 6సెం.మీ. శంఖువు ఆకారము భాగము భూవ్యాసము 5 సెం.మీ మరియు స్థూపాకార భాగము యొక్క భూవ్యాసము 3 సెం.మీ. శంఖాకృతి భాగమును నారింజరంగు స్థూపాకార భాగమును పసుపురంగు వేస్తే, ఈ రంగులు వేయడానికి కావలసిన రాకెట్ వైశాల్యమును విడివిడిగా కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$)

సాధన : శంఖువు ఆకారము యొక్క భూవ్యాసార్థము (r) మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 'l' అనుకొందాం.

స్థూపాకార భాగము యొక్క భూవ్యాసార్ధము r_1 మరియు ఎత్తు h_1 అనుకొందాం.

$r = 2.5$ సెం.మీ., $h = 6$ సెం.మీ

$r_1 = 1.5$ సెం.మీ $h_1 = 20$ సెం.మీ



ఇపుడు, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow \quad l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$

$l = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$

నారింజ రంగు వేయబడిన భాగము వైశాల్యము

= శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యము

$= \pi r l$

$= 3.14\ \{2.5 \times 6.5\}$

$= 51.025$ (సెం.మీ)^2

పసుపురంగు వేయబడిన భాగము వైశాల్యం

= స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యం + స్థూపం యొక్క భూవైశాల్యం

$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2$

$= \pi r_1 (2h_1 + r_1)$

$= 3.14 \times 1.5\ (2\times20+1.5)$ సెం.మీ^{2}

$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$ (సెం.మీ)^2

$= 4.71 \times 41.5$ (సెం.మీ)^2

$= 195.465$ (సెం.మీ)^2.

అందుచే పసుపురంగు వేయబడిన భాగము వైశాల్యము $= 195.465$ (సెం.మీ)^2

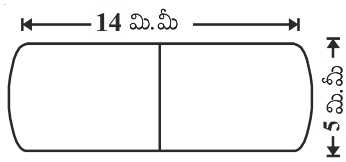
అభ్యాసము - 10.2

1. ఒక ఆటవస్తువు అర్ధగోళము పై నిటారుగా నిలుపబడిన శంఖువు వలెయున్నది. శంఖువు యొక్క భూవ్యాసం 6 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 4 సెం.మీ అయినచో ఆటవస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?

[$\pi = 3.14$ గా తీసుకొనుము.]

2. ఒక ఘనాకార వస్తువు ఒక చివర అర్ధగోళము మరో చివర శంఖువు ఆకార భాగము కల్గిన స్థూపము వలె యున్నది. రెండింటి యొక్క ఉమ్మడి భూవ్యాసార్ధం 8 సెం.మీ మరియు స్థూపము, శంఖువు ఆకారముల ఎత్తులు వరుసగా 10 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ అయినచో ఆ వస్తువు యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యమును కనుగొనుము. [$\pi = 3.14$ గా తీసుకొనుము]

3. ఒక మందు బిళ్ళ రెండు చివరల అర్ధగోళాకారంలో నున్న స్థూపము వలె యున్నది. మందు బిళ్ళ యొక్క పొడవు 14 మి.మీ మరియు వెడల్పు 5 మి.మీ అయితే దాని ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?



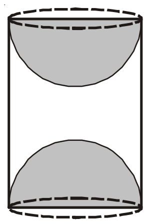
4. 64 ఘనపు సెం.మీ ఘనపరిమాణము గల రెండు ఘనములు కలుపబడినవి. అయిన ఏర్పడిన క్రొత్త ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?

5. ఒక నీటి ట్యాంకు రెండు చివరలు అర్ధగోళాకారముగా ఉన్న స్థూపము వలె యున్నది. స్థూపము యొక్క బాహ్యవ్యాసము 1.4 మీటర్లు మరియు దాని పొడవు 8 మీటర్లు నీటి ట్యాంకు బయట రంగు వేయడానికి చదరపు మీటరుకు ₹ 20 వంతున ఎంత ఖర్చు అగును ?

6. ఒక గోళము, స్థూపము మరియు శంఖువు ఒకే వ్యాసార్ధములను కల్గి యున్నాయి. అయినచో వాటి ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి ఎంత?

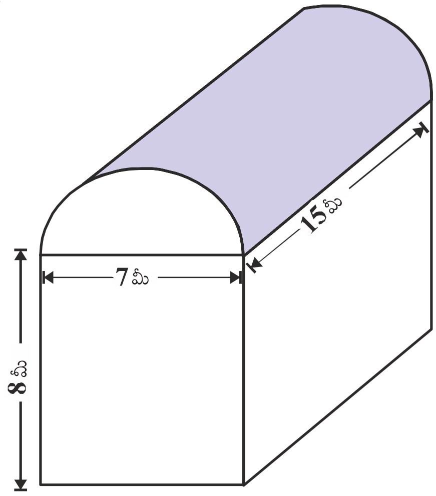
7. ఒక దీర్ఘ ఘనాకార చెక్క దిమ్మ నుండి దీర్ఘ ఘనపు భుజము పొడవునకు సమాన పొడవు కల్గిన వ్యాసము కల్గిన అర్ధగోళాకారము కత్తిరించబడినది. అయినచో మిగిలిన చెక్క దిమ్మ యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

8. పటములో చూపిన విధముగా ఒక చెక్కతో చేసిన వస్తువు రెండు చివరల నుండి అర్ధగోళాకార భాగములు తొలగించబడిన స్థూపము వలె యున్నది. స్థూపము యొక్క ఎత్తు 10 సెం.మీ దాని భూవ్యాసార్ధము 3.5 సెం.మీ అయినచో ఆ వస్తువు యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము ఎంత?



10.3 ఘనాకార వస్తు సముదాయ ఘనపరిమాణము

ఘనాకార వస్తు సముదాయ ఘనపరిమాణము కనుగొనే విధానము ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం.



సురేష్ నడుపుచున్న ఫ్యాక్టరీ ఒక దీర్ఘఘనంపై నిలబడిన అర్ధభాగ స్థూపము వలే యున్నది. ఫ్యాక్టరీ షెడ్ యొక్క భూమి కొలతలు 7 మీటర్లు. × 15 మీటర్లు. మరియు దీర్ఘఘనాకృతి యొక్క ఎత్తు 8 మీటర్లుగా ఉన్నది. ఆ షెడ్‌లో యున్న గాలి యొక్క ఘనపరిమాణమును ఏవిధంగా కనుగొంటారు? షెడ్‌లో యున్న యంత్ర సామగ్రి 300 ఘనపుమీటర్ల ఘనపరిమాణమును దానిలో పనిచేయుచున్న 20 మంది కార్మికులు సగటున 0.08 ఘనపు మీటర్ల ఘనపరిమాణమును ఆక్రమిస్తే ఆ షెడ్‌లో యున్న గాలి ఘనపరిమాణం ఎంత?

షెడ్ లోపల యున్న గాలి ఘనపరిమాణం (యంత్రభాగములు, కార్మికులు లేరు అనుకుంటే), దీర్ఘఘనాకార భాగములోని, గాలి ఘనపరిమాణం, అర్ధభాగ స్థూపాకార ఆకృతిలోని గాలి ఘనపరిమాణముల మొత్తమునకు సమానం దీర్ఘఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా 15 మీటర్లు, 7 మీటర్లు మరియు 8 మీటర్లు అవుతాయి. అదేవిధంగా అర్ధభాగ స్థూపము యొక్క భూవ్యాసం 7 మీటర్లు మరియు ఎత్తు 15 మీటర్లు అవుతాయి.

$$\text{కావలసిన ఘనపరిమాణం} = \text{దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం} + \frac{1}{2}\ \text{స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం}$$

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right]\text{ఘనపుమీటర్లు}$$

$$= 1128.75\ \text{ఘనపుమీటర్లు.}$$

తరువాత యంత్రభాగములచే ఆక్రమించబడిన స్థూల ఘనపరిమాణం

$$= 300\ \text{ఘనపు మీటర్లు}$$

20 మంది కార్మికులచే ఆక్రమించబడిన స్థూల ఘనపరిమాణం

$$= 20\times0.08\ \text{ఘనపు మీటర్లు}$$

$$= 1.6\ \text{ఘనపు మీటర్లు}$$

అందుచే యంత్రభాగములు మరియు కార్మికులు ఉన్నప్పుడు షెడ్‌లోని గాలి

ఘనపరిమాణం $= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$

$$= 1128.75 - 301.60 = 827.15\ \text{ఘనపుమీటర్లు}$$

సూచన : ఘనకార వస్తు సముదాయ ఉపరితల వైశాల్యము ఆ ఆకృతిలోని ఘనాకార వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానము కాదు. దీనికి గల కారణము కొన్ని ఉపరితలములు, వస్తువులను జతపరిచినప్పుడు ఏకీభవిస్తాయి. కనుక వాటిని పరిగణలోని తీసుకోలేము. కాని ఘనపరిమాణము మాత్రము ఆ వస్తువులోని ఘనాకార ఆకృతుల ఘనపరిమాణము మొత్తమునకు సమానం.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక తీగ యొక్క మధ్యచ్ఛేద వ్యాసమును 5శాతమును తగ్గిస్తే దాని ఘనపరిమాణములో మార్పు లేకుండా ఉండటానికి దాని పొడవును, ఎంతశాతము పెంచాలో లెక్కింపుము?
2. గోళము, ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములు సమానము. అయినచో వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ-10. ఒక చివర అర్ధగోళాకారంను మరో చివర క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఆకారమును కల్గిన క్రమ వృత్తాకార స్థూపాకార ఘనాకృతి ఆట వస్తువు యొక్క ఉమ్మడి వ్యాసము 4.2 సెం.మీ, స్థూపాకార, శంఖువు ఆకార భాగముల యొక్క ఎత్తులు వరుసగా 12 సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ అయితే ఘనాకార ఆటవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము).

సాధన : శంఖువు ఆకార భాగము యొక్క ఎత్తు $h_1 = 7$ సెం.మీ

స్థూపాకార భాగము యొక్క ఎత్తు $h_2 = 12$ సెం.మీ

వ్యాసార్ధము $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ సెం.మీ॥

ఆటవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము

= శంఖువు ఆకార భాగ ఘనపరిమాణం + స్థూపాకార ఆకార భాగఘనపరిమాణం + అర్ధగోళాకార భాగ ఘనపరిమాణం

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

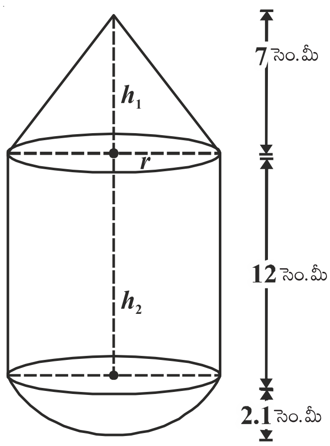
$$= \pi r^2\left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3}\times 7 + 12 + \frac{2}{3}\times\frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{35+180+21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064\ (\text{సెం.మీ})^3$$



ఉదాహరణ-11. 12 సెం.మీ వ్యాసము మరియు 15 సెం.మీ. ఎత్తు కలిగిన ఒక స్థూపాకార పాత్ర ఐస్‌క్రీంతో నింపబడినది. ఈ ఐస్‌క్రీంను పై తలం అర్ధగోళాకారంలో యున్న శంఖువులలో సమానముగా నింపి 10 మంది పిల్లలకు పంచబడినది. శంఖువు ఆకారభాగపు ఎత్తు, భూవ్యాసమునకు రెట్టింపు యున్నచో ఐస్‌క్రీంకోన్ యొక్క వ్యాసమును కనుగొనుము.

సాధన : శంఖువు ఆకార ఐస్‌క్రీం యొక్క భూవ్యాసార్ధము $= x$ సెం.మీ అనుకొందాం.

వ్యాసం $= 2x$ సెం.మీ.

అప్పుడు దాని ఎత్తు

$= 2$ (భూవ్యాసము) $= 2(2x) = 4x$ cm

ఐస్‌క్రీం కోన్ యొక్క ఘనపరిమాణం

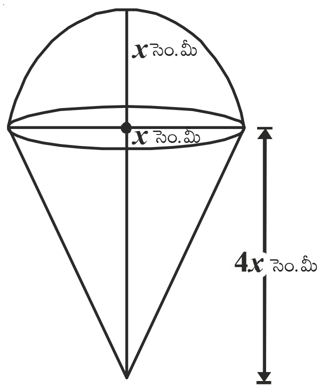
= శంఖువు ఆకార భాగము ఘనపరిమాణం + అర్ధగోళాకృతి భాగం ఘనపరిమాణం

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{1}{3}\pi x^2(4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$

$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$

$= 2\pi x^3$ (సెం.మీ)^3



స్థూపాకార పాత్ర యొక్క వ్యాసము $= 12$ సెం.మీ

దాని ఎత్తు $(h) = 15$ సెం.మీ

$\therefore$ స్థూపాకార పాత్రయొక్క ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

$= \pi(6)^2\, 15$

$= 540\pi$ (సెం.మీ)^3

ఐస్‌క్రీం పంచబడిన విద్యార్థుల సంఖ్య $= 10$

$\frac{\text{స్థూపాకార పాత్ర యొక్క ఘనపరిమాణం}}{\text{ఒక ఐస్‌క్రీం కోన్ యొక్క ఘనపరిమాణం}} = 10$

$\Rightarrow \quad \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$

$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$

$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{540}{2\times 10} = 27$

$\Rightarrow \quad x^3 = 27$

$\Rightarrow \quad x^3 = 3^3$

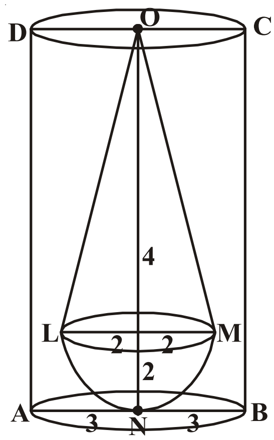
$\Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ ఐస్‌క్రీం కోన్ యొక్క వ్యాసం $= 2x = 2(3) = 6$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ-12. ప్రక్కపటములో చూపిన విధముగా అర్ధగోళాకృతిపై నిటారుగా క్రమ వృత్తాకార శంఖువును నిలిపినట్లు యున్న ఘనాకార వస్తువును నీటితో పూర్తిగా నింపబడి యున్న ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపాకృతి వస్తువులో దాని అడుగుభాగమును తాకేటట్లుగా ముంచబడినది. స్థూపము యొక్క భూవ్యాసార్ధము 3 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 6 సెం.మీ, అర్ధగోళము యొక్క వ్యాసార్ధము 2 సెం.మీ, శంఖువు ఎత్తు 4 సెం.మీ. గా ఉంటే స్థూపంలో మిగిలియున్న నీటి యొక్క ఘనపరిమాణం ఎంత?

($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము).

సాధన : ABCD స్థూపము, LMN అర్ధగోళము OLM శంఖువు అర్ధగోళముపై నిలుపబడిన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఆకార వస్తువును స్థూపముతో ముంచబడితే తొలిగింపబడిన నీటి ఘనపరిమాణము వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సమానము.



స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\,\pi$(సెం.మీ)^3

అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$(సెం.మీ)^3

శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3}\pi \text{(సెం.మీ)}^3$$

శంఖువు మరియు అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణం$= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$$= \frac{32}{3}\pi$$

స్థూపాకార వస్తువు నుండి తొలగింపబడిన నీటి ఘనపరిమాణం

= (స్థూపము ఘనపరిమాణం) - (శంఖువు మరియు అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణం)

$=$ స్థూపము ఘనపరిమాణం $- \frac{32\pi}{3}$

$$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$$

$$= \frac{162\pi - 32\pi}{3} = \frac{130\pi}{3}$$

$$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 (\text{సెం.మీ})^3$$

ఉదాహరణ-13. స్థూపాకారముగా నున్న పెన్సిల్‌ను ఒక చివర చెక్కి ఆ చివరను ఒక శంఖువు ఆకృతిలో మారిస్తే (దాని పొడవులో మార్పులేకుండా), పెన్సిల్ యొక్క వ్యాసము 1 సెం.మీ॥ మరియు శంఖువు ఆకృతి భాగము యొక్క ఎత్తు 2 సెం.మీ॥ అయినపుడు చెక్కబడిన భాగము యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత?

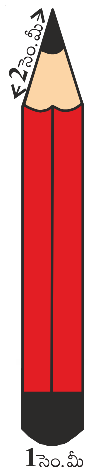
($\pi = \frac{355}{113}$ గా తీసుకొనుము).

సాధన : పెన్సిల్ యొక్క వ్యాసము = 1సెం.మీ

పెన్సిల్ యొక్క వ్యాసార్థము $(r) = 0.5$ సెం.మీ

శంఖువు ఆకార భాగము యొక్క పొడవు = h = 2సెం.మీ

చెక్కబడిన భాగము ఘనపరిమాణం = 2 సెం.మీ పొడవు, 0.5 సెం.మీ భూవ్యాసార్థము గల స్థూపాకృతి ఘనపరిమాణం – ఈ స్థూపముచే ఏర్పడిన శంఖువు ఘనపరిమాణం



1సెం.మీ

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

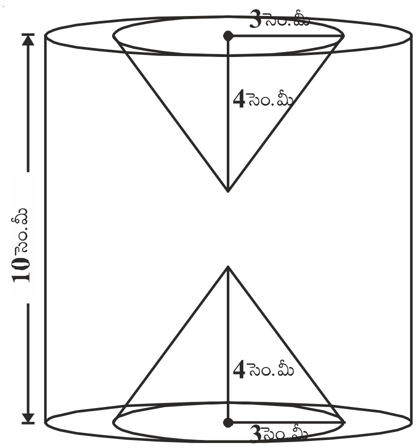
$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ cm}^3 = 1.05 \text{ cm}^3$$

అభ్యాసము-10.3

1. ఒక ఇనుపస్థూపాకార స్థంభము 2.8 మీటర్ల ఎత్తు, 20 సెం.మీ వ్యాసము కల్గియున్నది. దానిపై 42 సెం.మీ. ఎత్తు గల శంఖువు ఆకార భాగమున్నది. ఒక ఘనపు సెం.మీ ఇనుము యొక్క బరువు 7.5 గ్రాములు అయితే ఆ ఇనుప స్థంభము యొక్క బరువు ఎంత?

2. ఒక అర్ధగోళము యొక్క సమతల ఉపరితలముపై క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఆకార భాగము యొక్క వృత్తాకార భూభాగము కలుపబడి యున్నట్లు ఒక ఆటవస్తువు ఉన్నది. శంఖువు ఆకార భాగము యొక్క భూవ్యాసార్ధము 7 సెం.మీ. మరియు దాని ఘనపరిమాణము అర్ధగోళాకార భాగము యొక్క ఘనపరిమాణమునకు $\frac{3}{2}$ రెట్లు ఉన్నది. శంఖువు ఆకార భాగము యొక్క ఎత్తు, మరియు ఆటవస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమును రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించి కనుగొనుము? $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

3. 7 సెం.మీ భుజముగా గల ఘనము నుండి ఏర్పరచ గల్గే క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఆకార వస్తువు యొక్క గరిష్ట ఘనపరిమాణము ఎంత?

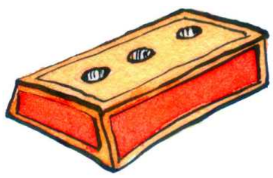


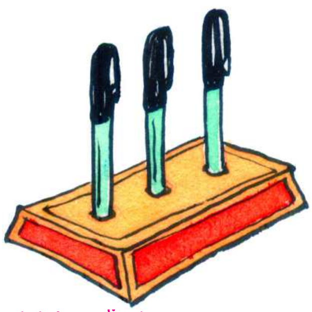
4. ఒక స్థూపాకార తొట్టె 5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము మరియు 9.8 సెం.మీ. పొడవును కల్గి నీటితో పూర్తిగా నింపబడి యున్నది. అర్ధగోళముపై నిటారుగా నిలుపబడిన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఆకారములో యున్న ఘనకార వస్తువు దానిలో ముంచబడినది. అర్ధగోళము యొక్క వ్యాసార్ధము 3.5 సెం.మీ. అర్ధగోళము బయట యున్న శంఖువు ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయినచో తొట్టెలో మిగిలి యున్న నీటి ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము).

5. ప్రక్క పటములో చూపిన విధముగా ఒక ఘనాకార స్థూపము యొక్క రెండు చివరల నుండి 3 సెం.మీ వ్యాసార్థము, 4 సెం.మీ ఎత్తు కల్గిన సమానముగా యున్న రెండు శంఖాకార భాగములు తొలగించబడినవి. స్థూపము యొక్క ఎత్తు 10 సెం.మీ., దాని వ్యాసం 7 సెం.మీ. అయినచో మిగిలిన భాగము యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత?

6. స్థూపాకార బీకరులో కొంత భాగము నీటితో నింపబడినది. బీకరు వ్యాసము 7 సెం.మీ. దానితో 1.4 సెం.మీ. వ్యాసము కల్గిన గోళాకార చలువరాళ్ళు ఎన్ని వేస్తే దానిలో నీటి మట్టము 5.6 సెం.మీ. మేరకు పెరుగును ?

7. 15సెంమీ × 10 సెం.మీ × 3.5 సెం.మీ కొలతలు కల్గిన దీర్ఘఘనములో 0.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థము మరియు 1.4 సెం.మీ. లోతుతో శంఖువు ఆకారం గల గోతులు తీసి పెన్ను స్టాండుగా మార్చారు. పెన్‌స్టాండ్‌లోని కొయ్య ఘనపరిమాణము ఎంత?

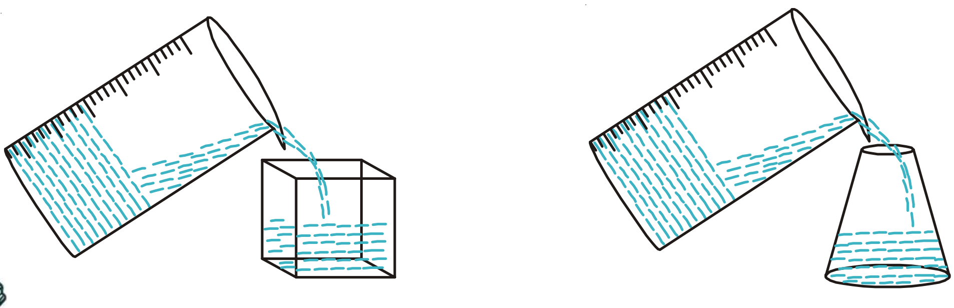




10.4 ఒక ఆకృతిలో ఉన్న వస్తువు మరో ఆకృతిలో రూపాంతరము చేయుట

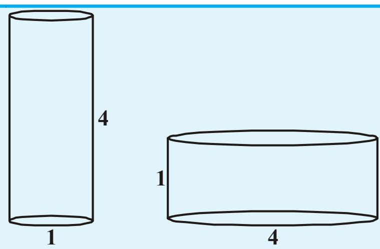
స్వయం సహాయక బృందములు (డ్వాక్రా గ్రూపు) దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న మైనపు దిమ్మలను కరిగించి స్థూపాకారముగా యున్న కొవ్వొత్తులను తయారు చేస్తారు. తుపాకీలను తయారు చేసే ఫ్యాక్టరీలో దీర్ఘ ఘనాకృతిలో ఉన్న సీసంను కరిగించింది, గోళాకృతిలో ఉన్న బుల్లెట్‌లను తయారుచేస్తారు. స్వర్ణకారుడు స్థూపాకారముగా ఉన్న బంగారు కడ్డీలను కరిగించి వివిధ ఆకృతిలో యున్న బంగారు ఆభరణములను తయారు చేస్తాడు. ఈ అన్ని సందర్భములలో ఒక రూపములో ఉన్న వస్తువు మరో రూపములోకి మార్చబడినది. కాని ఘనపరిమాణములో మార్పు ఉండదు. ఇది ఏవిధంగా సాధ్యం? మనము కొవ్వొత్తులను వివిధ ఆకృతులలో తయారు చేయాలంటే దానిని పూర్తిగా కరిగించి మనం కోరిన ఆకారములో యున్న లోహపు పాత్రలో పోస్తే దాని ఆకృతిలో కొవ్వొత్తి తయారగును. ఉదాహరణకు స్థూపాకారములో ఉన్న కొవ్వొత్తిని కరిగించి దానిని కరిగించబడిన మైనం గోళాకృతిలో యున్న పాత్రలో వేయబడినది. చల్లార్చిన

తరువాత మనకు గోళాకృతిలో యున్న కొవ్వొత్తి తయారగును. క్రొత్తగా ఏర్పడిన కొవ్వొత్తి ఘనపరిమాణము తొలుత కొవ్వొత్తి ఘనపరిమాణమునకు సమానం. ఈ విధముగా మనము ఒక ఆకృతిలో యున్న వస్తువులను మరో ఆకృతిలోనికి మార్చవచ్చు. లేదా ఒక పాత్రలో నింపబడిన ద్రవమును మరో పాత్రలోనికి నింపి భిన్న ఆకృతిని, భిన్న పరిమాణమును పొందవచ్చు.



ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

ఏ పాత్ర ఎక్కువ నీటిని తనలో నింపుకొనగలదు? మీ స్నేహితులలో చర్చించండి ?



ఇంతవరకు మనము నేర్చుకొన్న అంశములను పునర్బలనము చేసుకొనేందుకు కొన్ని ఉదాహరణలతో ప్రయత్నిద్దాం.

ఉదాహరణ-14. 24 సెం.మీ ఎత్తు, 6 సెం.మీ భూవ్యాసార్ధము కల్గిన శంఖువు ఆకార మట్టి ముద్ద యున్నది. ఒక బాలుడు దానిని ఒక గోళముగా మారిస్తే, ఆ గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము ఎంత?

సాధన : శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ (సెం.మీ)^3

గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము r అయితే దాని ఘనపరిమాణం $\frac{4}{3}\pi r^3$

శంఖువు ఆకారములో యున్న మట్టి ముద్ద గోళాకృతిలో మార్చబడినది కనుక ఘనపరిమాణములో మార్పు ఉండదు. కనుక

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

$$r = 3 \times 2 = 6$$

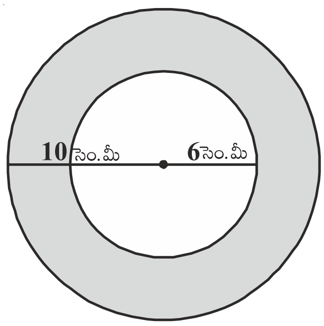
$\therefore$ గోళము వ్యాసార్ధము = 6 సెం.మీ.

ఇవి చేయండి

1. 1 సెం.మీ వ్యాసము, 8 సెం.మీ పొడవు కల్గిన ఒక రాగి కడ్డీ 18మీటర్లు పొడవు కల్గిన ఏక మందము గల తీగగా మలచబడినది. అయినచో తీగ యొక్క మందమును కనుగొనుము?
2. ప్రవల్లి ఇంటి పై కప్పుపై వాటర్ ట్యాంక్ స్థూపకార ఆకృతిలో నిర్మించబడింది. భూగర్భములో దీర్ఘ ఘనాకారములో యున్న సంప్ నుండి నీటిని మోటారు సహాయముతో వాటర్ టాంక్‌కు పంపబడుతుంది. సంప్ యొక్క కొలతలు 1.57 మీటర్లు × 1.44 మీటర్లు × 9.5 సెం.మీ. వాటర్ ట్యాంక్ యొక్క వ్యాసార్థము 60 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 95 సెం.మీ. నీటితో నిండుగా యున్న సంప్ నుండి నీటిని వాటర్ ట్యాంక్ నిండుగా నింపితే అందులో మిగిలి వున్న నీటి మట్టము యొక్క ఎత్తు ఎంత? సంప్ మరియు వాటర్ ట్యాంకుల యొక్క నీటి నిల్వ సామర్థ్యము లను పోల్చుము? ($\pi = 3.14$)

ఉదాహరణ-15. ఒక బోలు అర్ధగోళము యొక్క అంతర, బాహ్య, వ్యాసములు వరుసగా 6 సెం.మీ మరియు 10 సెం.మీ. దానిని 14 సెం.మీ వ్యాసముగా గల ఒక స్థూపాకార ఘనముగా మలిస్తే, దాని యొక్క ఎత్తు ఎంత?

సాధన : బోలు అర్ధగోళం యొక్క వ్యాసార్థము $= \frac{10}{2} = 5$ సెం.మీ $= R$



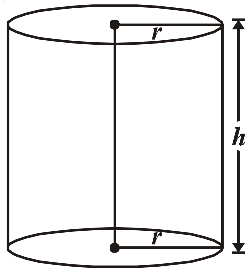
అంతర వ్యాసార్థము $= \frac{6}{2} = 3$ సెం.మీ $= r$

బోలు అర్ధగోళ పాత్ర యొక్క ఘనపరిమాణం

= బాహ్య ఘనపరిమాణం - అంతర ఘనపరిమాణం

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$



$$= \frac{2}{3}\pi (5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (125 - 27)$$

$$= \frac{2}{3}\pi \times 98 \text{ (సెం.మీ)}^3 = \frac{196\pi}{3} \text{ (సెం.మీ)}^3 \qquad ...(1)$$

బోలు ఘనపు అర్ధగోళము, స్థూపాకార ఘనముగా మలచబడినది కనుక రెండింటి ఘనపరిమాణము సమానం.

స్థూపాకార ఘనము యొక్క వ్యాసం = 14 సెం.మీ. (ఇచ్చినది)

అందుచే స్థూపాకార ఘనము వ్యాసార్థము = 7 సెం.మీ

స్థూపము యొక్క ఎత్తు = h అనుకొందాం

$\therefore$ స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$

$= \pi \times 7 \times 7 \times h$ (సెం.మీ)^3 = $49\pi h$ (సెం.మీ)^3 ...(2)

సమస్యలో ఇచ్చిన దత్తాంశము ప్రకారం

బోలు అర్ధగోళాకార పాత్ర యొక్క ఘనపరిమాణం = ఘనస్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణం

$\frac{196}{3}\pi = 49\pi h$ [(1), (2) సమీకరణములనుండి]

$\Rightarrow h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3}$ సెం.మీ

$\therefore$ స్థూపము యొక్క ఎత్తు = 1.33 సెం.మీ.

ఉదాహరణ-16. 16 సెం.మీ అంతర వ్యాసార్ధముగా గల అర్ధగోళాకార పాత్రలో ద్రవము నింపబడినది. ఆద్రవమును 5 సెం.మీ వ్యాసము మరియు 6 సెం.మీ. ఎత్తు కల్గిన స్థూపాకార సీసాలో నింపారు. పాత్రలోని ద్రవమును నింపడానికి ఎన్ని సీసాలు అవసరం ?

సాధన : అర్ధగోళము ఘనపరిమాణం = $\frac{2}{3}\pi r^3$

అర్ధగోళ అంతర వ్యాసార్ధం $r = 15$ సెం.మీ.

$\therefore$ అర్ధగోళాకార పాత్రలో నింపబడిన ద్రవ ఘనపరిమాణం

$= \frac{2}{3}\pi(15)^3$ (సెం.మీ)^3

$= 2250\,\pi$ (సెం.మీ)^3

స్థూపాకార పీపా యొక్క ఎత్తు = $h = 6$ సెం.మీ.

స్థూపాకార సీసా యొక్క వ్యాసార్ధం = $R = \frac{5}{2}$ సెం.మీ.

$\therefore$ స్థూపాకార సీసా ఘనపరిమాణం = $\pi R^2 h$

$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$

$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6$ (సెం.మీ)^3 $= \frac{75}{2}\pi$ (సెం.మీ)^3

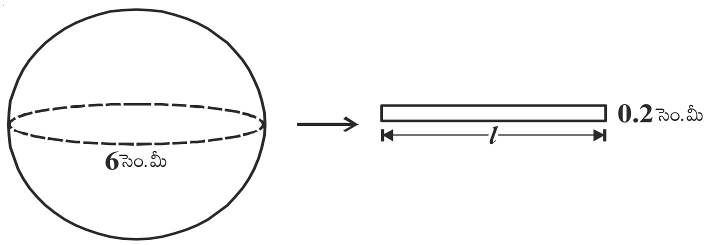
ద్రవమును నింపడానికి కావలసిన సీసాల సంఖ్య = $\frac{\text{అర్ధగోళాకార పాత్ర యొక్క ఘనపరిమాణం}}{\text{స్థూపాకార సీసా యొక్క ఘనపరిమాణం}}$

$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2\times 2250}{75} = 60.$$

ఉదాహరణ-17. 6 సెం.మీ వ్యాసము కల్గిన ఒక ఘనపు గోళమును కరిగించి 0.2 సెం.మీ. మధ్యచ్ఛేద వ్యాసము కల్గిన తీగగా మలిస్తే ఆ తీగ పొడవు ఎంత?

సాధన : ఘనపు గోళము వ్యాసం = 6 సెం.మీ

$\therefore$ ఘనపుగోళము వ్యాసార్ధం = 3 సెం.మీ



స్థూపాకార తీగ యొక్క మధ్యచ్ఛేద వ్యాసం = 0.2 సెం.మీ

వ్యాసార్ధం = 0.1 సెం.మీ

తీగ యొక్క పొడవు l సెం.మీ అనుకొందాం.

ఘనపుగోళము స్థూపాకార తీగగా మలచబడినది కనుక తీగపొడవును స్థూపాకార తీగ ఎత్తుగా పరిగణించవచ్చు.

$\therefore$ తీగలో ఉపయోగించబడిన లోహఘనపరిమాణం = గోళఘనపరిమాణం

$$\pi\times(0.1)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3$$

$$\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 27$$

$$\pi\times\frac{1}{100}\times h = 36\pi$$

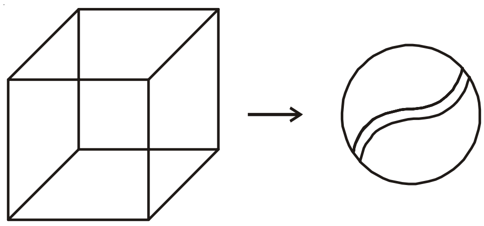
$$h = \frac{36\pi\times 100}{\pi} \text{ సెం.మీ}$$

$= 3600$ సెం.మీ॥ $= 36$ మీటర్లు

$\therefore$ తీగ యొక్క పొడవు = 36 మీటర్లు

ఉదాహరణ-18. 44 సెం.మీ. భుజము కొలతగా గల ఒక సీసపు ఘనమును 4 సెం.మీ వ్యాసము కల్గిన ఎన్ని గోళాకార బంతులుగా మార్చవచ్చు ?

సాధన : సీసపు ఘనభుజము = 44 సెం.మీ.



గోళము వ్యాసార్ధము = $\frac{4}{2}$ *cm.* = 2 సెం.మీ.

గోళము ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2^3$ (సెం.మీ)^3

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8$ (సెం.మీ)^3

సీసపు ఘనమును x గోళములుగా తయారు చేసే

x గోళముల మొత్తము ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x$ (సెం.మీ)^3

$\therefore$ x గోళముల మొత్తము ఘనపరిమాణం = సీసపు ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = 44\times 44\times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44\times 44\times 44\times 3\times 7}{4\times 22\times 8}$$

$$x = 2541$$

అందుచే తయారుచేయబడిన గోళముల సంఖ్య = 2541.

ఉదాహరణ-19. ఒక స్వయం సహాయక బృందం (డ్వాక్రా) దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న 66 సెం.మీ, 42 సెం.మీ., 21సెం.మీ, కొలతలు కల్గిన మైనపు దిమ్మ నుపయోగించి 4.2సెం.మీ. వ్యాసం, 2.8 సెం.మీ ఎత్తు కల్గిన స్థూపాకార కొవ్వొత్తులను తయారు చేయాలనుకొన్నారు. వారు తయారు చేయగల్గే కొవ్వొత్తుల సంఖ్యను కనుగొనండి ?

సాధన : దీర్ఘఘనాకార మైనపు దిమ్మ యొక్క ఘనపరిమాణం $= lbh$

$= (66\times 42\times 21)$ సెం.మీ^{3}.

స్థూపాకార కొవ్వొత్తి యొక్క వ్యాసార్ధం $= \frac{4.2}{2}$ సెం.మీ. = 2.1 సెం.మీ.

స్థూపాకార కొవ్వొత్తి యొక్క ఎత్తు = 2.8 సెం.మీ.

కొవ్వొత్తి ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$$

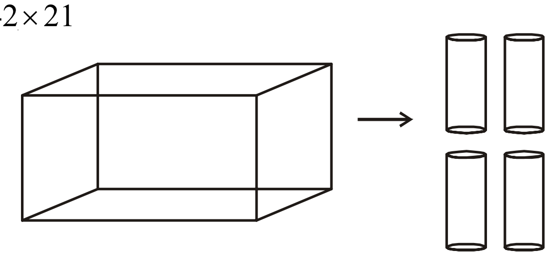
x స్థూపాకార కొవ్వొత్తుల యొక్క మొత్తము ఘనపరిమాణం $= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$

$\because$ స్థూపాకార కొవ్వొత్తుల యొక్క ఘనపరిమాణం = దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న మైనపు దిమ్మ ఘనపరిమాణం

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$

$$x = \frac{66 \times 42 \times 21 \times 7}{22 \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8}$$

$$= 1500$$



$\therefore$ తయారుచేయబడిన స్థూపాకార కొవ్వొత్తుల సంఖ్య = 1500.

అభ్యాసము - 10.4

1. 4.2 సెం.మీ వ్యాసార్థము కల్గిన ఒక ఘనపు గోళంను కరిగించి 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము కల్గిన స్థూపముగా మలిస్తే, ఆ స్థూపము యొక్క ఎత్తు ఎంత?
2. 6 సెం.మీ., 8 సెం.మీ. మరియు 10 సెం.మీ వ్యాసార్థములు కల్గిన ఘనపు గోళములు కరిగించి ఒక పెద్ద ఘనపు గోళముగా మలిస్తే దాని యొక్క వ్యాసార్థము ఎంత?
3. 20 మీటర్లు లోతు, 7 మీటర్ల వ్యాసము గల ఒక గొయ్యిని త్రవ్వగా వచ్చిన మట్టిని 22 మీటర్లు × 14 మీటర్లు కొలతలుగా ఒక ప్లాట్ ఫారమ్‌గా ఏర్పరిస్తే దానియొక్క ఎత్తు ఎంత?
4. 14 మీటర్లు వ్యాసము, 15 మీటర్ల లోతు కల్గిన ఒక బావిని త్రవ్వగా వచ్చిన మట్టిని 7 మీటర్ల వెడల్పు కల్గిన ఒక వృత్తాకార కంకణముగా ఏర్పరిస్తే దాని యొక్క ఎత్తు ఎంత?
5. 12 సెం.మీ వ్యాసము, 15 సెం.మీ. ఎత్తు కల్గిన ఒక క్రమవృత్తాకార స్థూపాకృతి పాత్రలో నిండుగా ఐస్‌క్రీం యున్నది. దానిని 12 సెం.మీ ఎత్తు, 6 సెం.మీ భూవ్యాసముగా కల్గిన శంఖువు ఆకార వస్తువు (కోన్)లో పైభాగము అర్ధగోళాకారంలో ఉండేవిధముగా ఐస్‌క్రీంను నింపితే, ఆ మొత్తం ఐస్‌క్రీంను నింపడానికి కావలసిన కోన్‌ల సంఖ్య ఎంత?
6. 5.5 సెం.మీ × 10 సెం.మీ × 3.5 సెం.మీ కొలతలు కల్గిన దీర్ఘఘనముగా మార్చడానికి 1.75 సెం.మీ వ్యాసము, 2 మి.మీ మందము కల్గిన ఎన్ని వెండి నాణెములు అవసరమవుతాయి?
7. ఒక పాత్ర తిరగబడిన శంఖువు ఆకారంలో ఉన్నది. దాని ఎత్తు 8 సెం.మీ పై భాగము వ్యాసార్థము 5సెం.మీ పాత్ర పూర్తిగా నీటితో నింపబడి యున్నది. దానిలో 0.5 సెం.మీ వ్యాసార్థము కల్గిన ఘనగోళమును వేస్తే

పాత్రలో యున్న నీటిలో $\frac{1}{4}$ వ వంతు పొర్లి బయటికి వస్తుంది. అయినచో పాత్రలో వేయగల్గిన మొత్తము ఘనపు గోళముల సంఖ్య ఎంత?

8. 28 సెం.మీ వ్యాసము కల్గిన ఒక ఘనపు గోళమును కరిగించి $4\frac{2}{3}$ సెం.మీ వ్యాసం, 3 సెం.మీ ఎత్తు కల్గిన శంఖువులుగా మారిస్తే ఏర్పడే శంఖువుల సంఖ్య ఎంత?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[ఈ అభ్యాసము పరీక్షలనుద్దేశించి ఇయ్యబడినది కాదు]

1. 4.1 సెం.మీ వ్యాసము కల్గిన ఒక గోల్ఫ్ బంతి ఉపరితలముపై 2 మి.మి వ్యాసార్ధము కల్గిన 150 బొడిపెలు (డింపుల్స్) ఉన్నవి. డింపుల్స్ అర్ధగోళాకారంలో ఉన్నది అని భావిస్తే వాటి మొత్తము ఉపరితలవైశాల్యము ఎంత? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

2. 12 సెం.మీ వ్యాసార్ధము కల్గిన ఒక స్థూపాకార పాత్రలో 20 సెం.మీ లోతు మేరకు నీరు నింపబడియున్నది. ఒక ఇనుప గోళమును దానిలో విడిస్తే నీటి మట్టము 6.75 సెం.మీ పెరిగినది. అయినచో విడువబడిన గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము ఎంత? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

3. ఒక ఘనపు ఆటవస్తువు స్థూపాకృతిలో యుండి ఒక చివర అర్ధగోళాకారాన్ని మరో చివర శంఖువు ఆకారాన్ని కల్గి యుంది. వాటి ఉమ్మడి వ్యాసము 4.2 సెం.మీ. స్థూపాకార భాగము, శంఖువాకార భాగముల ఎత్తులు వరుసగా 12 సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ అనుకొంటే ఆ ఘనపు ఆటవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

4. 15 సెం.మీ, 12 సెం.మీ. మరియు 9 సెం.మీ భుజములుగా గల మూడు లోహపు ఘనములను కరిగించి ఒక ఘనముగా మారిస్తే, ఏర్పడిన ఘనము యొక్క కర్ణము పొడవు ఎంత?

5. 36 సెం.మీ అంతరవ్యాసార్ధము కల్గిన ఒక అర్ధగోళాకార పాత్ర ద్రవముతో నింపబడి యున్నది. ఆద్రవమును 3 సెం.మీ వ్యాసార్ధము మరియు 6 సెం.మీ ఎత్తు కల్గిన స్థూపాకార సీసాలలో నింపితే, మొత్తం ద్రవముగా నింపబడానికి అవసరమయ్యే సీసాల సంఖ్య ఎంత?

మనం ఏమి చర్చించాం

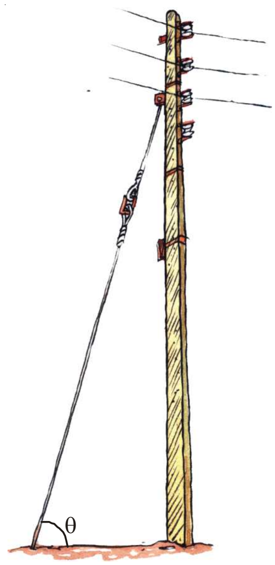
1. రెండు ఘనపు వస్తువులను కలుపగా ఏర్పడిన ఘనపు వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం, ఆరెండింటి ఘనపరిమాణముల మొత్తమునకు సమానం

2. ఘనపు వస్తువులను కలుపగా ఏర్పడు మరో ఘనపు వస్తువు యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం. ఆ ఘనపు వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానము కాదు. దీనికి గల కారణము కొన్ని ఉపరితల వైశాల్యములలో కొంతభాగము వీటికి కలపటం వలన కనపడకుండా పోతుంది.

అధ్యాయము

11 త్రికోణమితి
(Trigonometry)

11.1 పరిచయం

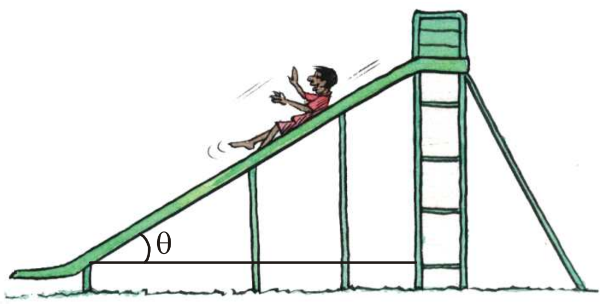


త్రిభుజాలు మరియు వాటి ధర్మాలను మనం ఇదివరకే కింది తరగతులలో తెలుసుకొన్నా. మన నిత్యజీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో త్రిభుజాలు, వాటి ధర్మాలను ఉపయోగించడం గమనించి ఉంటాం.

ఇంకా మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

- మీరు మీ చుట్టు ప్రక్కలలో విద్యుత్ స్థంభాలను గమనించి ఉంటారు. అవి సాధారణంగా ఒక లోహపు వైర్ సహాయంతో నిలబెట్టబడి ఉంటాయి. ఇచట విద్యుత్ స్థంభం, భూమి మరియు లోహపు వైర్‌లు ఒక త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. కాని, ఒకవేళ లోహపు వైర్ పొడవును తగ్గిస్తే, అది భూమితో చేసే కోణంలో ఏమైనా మార్పు వస్తుందా?

- పటంలో చూపిన విధంగా ఒక వ్యక్తి ఒక గోడకు నిచ్చెన సహాయంతో సున్నం వేస్తున్నాడు. ఒకవేళ అతడు కొంత ఎక్కువ ఎత్తులో సున్నం వేయాల్సివస్తే, అతడు ఏం చేయాలి? అపుడు భూమితో నిచ్చెన చేసే కోణంలో ఏం మార్పు వస్తుంది?
- ఆదిలాబాద్ జిల్లాలోని జైనథ్ గ్రామంలో 13వ శతాబ్దంలో నిర్మించబడిన ఒక గుడిలో డిసెంబర్ మాసంలో ఒక రోజు సూర్యనారాయణ స్వామి విగ్రహం పాదాలపై సూర్యుడి మొట్టమొదటి కిరణాలు పడతాయి. గుడి ద్వారం నుండి విగ్రహానికి గల దూరం, సూర్యకిరణాలు వచ్చే ద్వారం పై నున్న రంధ్రం ఎత్తు మరియు ఆ నెలలో మొదటి సూర్యకిరణాలు భూమితో చేసే కోణానికి ఏదైనా సంబంధం ఉందను కొంటున్నారా? ఈ సందర్భంలో ఏదైనా త్రిభుజాన్ని ఊహించగలరా?
- ఆటలాడు స్థలంలో, పిల్లలు జారుడు బల్లపై జారుతూ ఉండడం గమనించి ఉంటారు. జారుడు బల్ల భూమి తో చేసే కోణాన్ని బట్టి జారుడు స్వభావం మారుతూ ఉంటుంది. జారుడు బల్ల భూమితో చేసేకోణం మారితే ఏం జరుగుతుంది? ఆ కోణం అసాధారణంగా ఉంటే పిల్లలు ఆడు కోగల్గుతారా ?

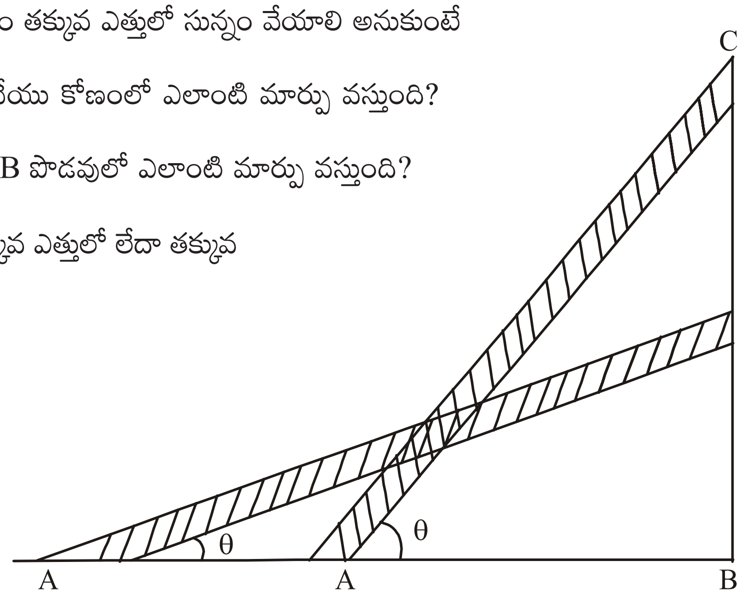


పై ఉదాహరణలు మనం నిత్యజీవితంలో జ్యామితిని ఏ విధంగా వినియోగించుకోవచ్చో తెలుపుతాయి. మరియు వివిధ కట్టడాల ఎత్తులు, దూరాలు మరియు వివిధ సందర్భాల్లో ఏర్పడే కోణాలు త్రిభుజ ధర్మాల ఆధారంగా కనుక్కోవచ్చు. ఈ రకాలైన సమస్యలను గణితంలో ఒక భాగమైన త్రికోణమితి ఆధారంగా సాధించవచ్చు.

ఇక గోడపై నిచ్చెన సహాయంతో సున్నం వేస్తున్న వ్యక్తి ఉదాహరణను గమనిద్దాం. క్రింది సందర్భాలను గమనిద్దాం.

నిచ్చెన యొక్క అడుగు భాగాన్ని Aతో మరియు పై భాగాన్ని Cతో సూచించామనుకోండి. గోడ యొక్క అడుగు భాగము, నిచ్చెన అడుగు భాగాన్ని కలిపే బిందువు B అనుకుందాం. ఈ విధంగా B వద్ద లంబకోణముతో ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔABC ఏర్పడుతుంది. ఇంకా, నిచ్చెన భూమితో చేస్తున్న కోణము "θ" అనుకొనగా.

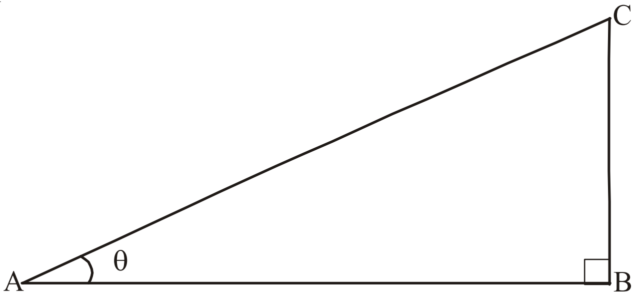
1. ఆ వ్యక్తి గోడపై ఇంకా కొంచెం ఎక్కువ ఎత్తులో సున్నం వేయాలి అనుకుంటే
   - నిచ్చెన భూమితో చేయు కోణంలో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?
   - ఈ సందర్భంలో AB పొడవులో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?
2. ఆ వ్యక్తి గోడపై ఇంకా కొంచెం తక్కువ ఎత్తులో సున్నం వేయాలి అనుకుంటే
   - నిచ్చెన భూమితో చేయు కోణంలో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?
   - ఈ సందర్భంలో AB పొడవులో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?



పై సందర్భాలలో గోడపై ఎక్కువ ఎత్తులో లేదా తక్కువ ఎత్తులో సున్న వేయాల్సి వస్తే ఆ నిచ్చెన యొక్క స్థితిని ఆ వ్యక్తి మార్చాల్సి వస్తుంది. ఒకవేళ 'θ' పెరిగినపుడు గోడపై సున్నం వేసే స్థానం ఎత్తు పెరిగి, భూమిపై దూరం AB తగ్గుతుందని గమనించాం కదా. ఇదేవిధంగా 'θ' తగ్గినపుడు గోడపై సున్నం వేసే స్థానం ఎత్తు తగ్గి, భూమిపై దూరం AB పెరుగుతుందని గమనిస్తాం. దీంతో మీరు ఏకీభవిస్తారా ?

ఇక్కడ ఏర్పడిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లోని భుజాలను సాధారణంగానే పరిగణించాం. ఇక లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలకు పేర్లను పెట్టి ఆ భుజాల నిష్పత్తులను గమనిద్దాం.

11.1.1 లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలు



ప్రక్కపటంలో చూపినట్టు లంబకోణ త్రిభుజం ABC ని తీసుకుందాం.

ప్రక్క పటంలో చూపినట్టు B వద్ద లంబకోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABCని తీసుకుందాం. ఈ త్రిభుజంలో $\angle$CAB ని $\angle$Aగా తీసుకుందాం. మరియు A ఒక అల్పకోణం. ఈ త్రిభుజంలో AC అనేది అతిపెద్ద భుజం కావున అది "కర్ణం" అవుతుంది.

ఈ త్రిభుజంలో భుజము BC స్థానము, $\angle$A పరంగా ఎలా వుంది. $\angle$A కు భుజము BC ఎదురుగా వుందని గమనించారు. కదా! కావున BCని $\angle$A యొక్క "ఎదుటి భుజము" అని అంటారు. ఇంకా మిగిలిన భుజము AB ని $\angle$ A యొక్క "ఆసన్న భుజము" అని అంటారు.

AC = కర్ణం

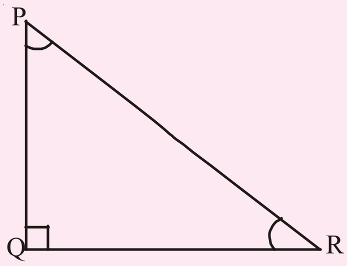
BC = $\angle$A యొక్క ఎదుటి భుజము

AB = $\angle$A యొక్క ఆసన్న భుజము

ఇది చేయండి

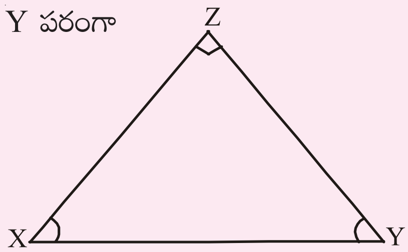
క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో ఇచ్చిన కోణాల ఆధారంగా "కర్ణం", ఎదుటి భుజము మరియు "ఆసన్న భుజము"లను గుర్తించి రాయండి.

1. కోణం R పరంగా



2. (i) కోణం X పరంగా

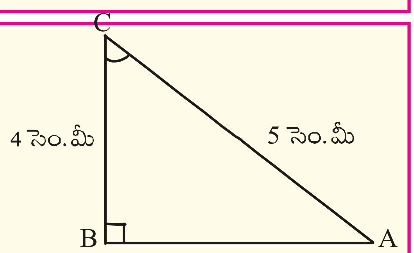
   (ii) కోణం Y పరంగా



ప్రయత్నించండి

ఈ క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజంలో ఇచ్చిన కోణాల పరంగా "కర్ణం", "ఎదుటి భుజం", మరియు "ఆసన్న భుజం"లను కనుగొనండి.

1. కోణం C పరంగా
2. కోణం A పరంగా

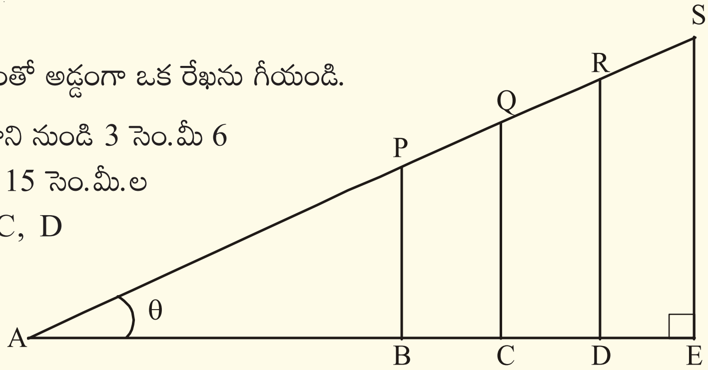


మీరేం గమనించారు ? కోణం A యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు కోణం C యొక్క ఆసన్న భుజానికి ఏమైనా సంబంధం ఉందా? ఇంకా, ఒక బలమైన లోహపు వైర్ ఆధారంగా ఒక స్థంభాన్ని నిలబెడుతున్నామనుకుందాం. స్థంభం ఎత్తు మరియు వైర్ పొడవుకు కు ఏదైనా సంబంధం ఉందనుకుంటున్నారా? ఇక్కడ మనం త్రిభుజంలోని భుజాల మధ్యన సంబంధాన్ని వాటి కోణాల ఆధారంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

11.2 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

ఈ అధ్యాయం మొదట్లో మన నిత్య జీవితంలో ఎదురయ్యే సందర్భాలను గమనించాం. ఇక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు, అవి ఏవిధంగా నిర్వచింపబడ్డాయో చూద్దాం.

కృత్యం



1. మీ నోట్‌బుక్‌లో స్కేలు సహాయంతో అడ్డంగా ఒక రేఖను గీయండి.
2. మొదటి బిందువు A మరియు దాని నుండి 3 సెం.మీ 6 సెం.మీ, 9 సెం.మీ. మరియు 15 సెం.మీ.ల దూరాలలో వరుసగా B, C, D మరియు E. బిందువులను వరుసగా గుర్తించండి.
3. ఇంకా 4సెం.మీ, 8సెం.మీ, 12సెం.మీ మరియు 16సెం॥మీల పొడవులతో B, C, D మరియు E బిందువుల గుండా BP, CQ, DR, ES లంబాలను గీయండి.
4. AP, PQ, QR మరియు RS లను కలపండి.
5. AP, AQ, AR, ASల పొడవులను కనుగొనుము.

కర్ణం పొడవు	ఎదుటి భుజం పొడవు	ఆసన్నభుజం పొడవు	$\frac{\text{ఎదుటిభుజం}}{\text{కర్ణం}}$	$\frac{\text{ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$

$\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ మరియు $\frac{ES}{AS}$ ల నిష్పత్తులను కనుగొనండి.

మీకు అన్నిటి ఫలితం $\frac{4}{5}$ వచ్చిందా?

ఇదేవిధంగా, $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ మరియు $\frac{AE}{AS}$ నిష్పత్తులను కనుగొనుము? ఏం గమనించారు?

11.2.1 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నిర్వచించడం

పై కృత్యంలో, లంబకోణ త్రిభుజాలు ABP, ACQ, ADR మరియు AES లలో కోణం A ఉమ్మడి కోణం. $\angle$B, $\angle$C, $\angle$D మరియు $\angle$Eలు లంబకోణాలు మరియు $\angle$P, $\angle$Q, $\angle$R మరియు $\angle$S లు సమానంగా ఉంటాయి. కావునా, ABP, ACQ, ADR మరియు AES లు సరూప త్రిభుజాలు. ఈ త్రిభుజాలలోని ఒక త్రిభుజంలో $\angle$A యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తి, మరియు మిగతా త్రిభుజములోని వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుందని గమనించాం కదా! ఈవిధంగా $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ మరియు $\frac{ES}{AS}$ నిష్పత్తులను **"sine A"** లేదా ముక్తంగా **"sin A"** అనవచ్చు. ఒకవేళ $\angle$A విలువ "x" అయితే దానిని "sin x" అని అనవచ్చు.

ఈ విధంగా సరూపలంబకోణ త్రిభుజాల లోని లంబకోణం కాని ఒక కోణం యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. మరియు ఆ నిష్పత్తిని ఆ కోణం యొక్క "sin" అంటారు.

ఇదేవిధంగా $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ మరియు $\frac{AE}{AS}$ నిష్పత్తులు స్థిరంగా ఉంటాయి. ఇవి $\angle$A యొక్క ఆసన్న భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తులు కావున ఈ నిష్పత్తులు $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ మరియు $\frac{AE}{AS}$ లను **"cosine A"** లేదా ముక్తంగా **"cos A"** అని అనవచ్చు. ఒకవేళ $\angle$A విలువ "x" అయితే దానిని "cos x" అని అనవచ్చు.

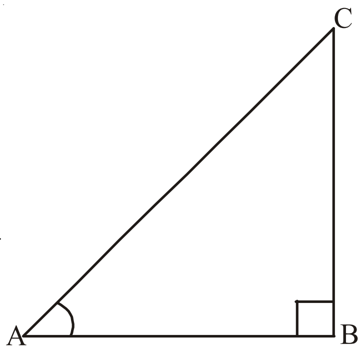
ఈవిధంగా "సరూపలంబకోణ త్రిబుజాలలోని లంబకోణం కాని ఒక కోణం యొక్క ఆసన్న భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. మరియు ఆ నిష్పత్తిని ఆ కోణం యొక్క "cos" అంటారు.

ఇంకా సరూప లంబకోణ త్రిభుజాలలోని లంబకోణం కాని ఒక కోణం యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు ఆసన్న భుజముల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. మరియు ఆ నిష్పత్తిని ఆ కోణం యొక్క "tangent" అంటారు.

లంబకోణ త్రిభుజంలోని నిష్పత్తులు

పటంలో చూపినట్లు B వద్ద లంబకోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC ను గమనించండి. అందులో $\angle$A యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులు ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

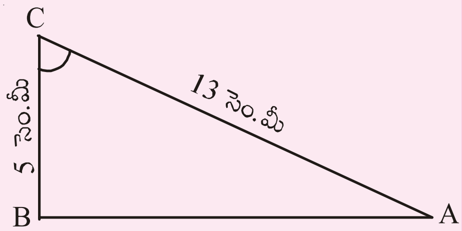
$\angle A$ యొక్క sine $= \sin A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజపు పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}} = \dfrac{BC}{AC}$



$\angle A$ యొక్క cosine $= \cos A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజపు పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle A$ యొక్క tangent $= \tan A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజపు పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజపు పొడవు}} = \dfrac{BC}{AB}$

ఇవి చేయండి



1. పక్కనున్న లంబకోణత్రికోణంలో (i) sin C (ii) cos C మరియు (iii) tan C లను కనుగొనుము?
2. ఒక త్రిభుజము XYZలో, $\angle Y$ లంబకోణము మరియు XZ = 17 సెం.మీ. YZ = 15 సెం.మీ (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X లను కనుగొనుము?
3. త్రిభుజం PQR లో Q లంబకోణము మరియు $\angle P$ విలువ x మరియు PQ = 7 సెం.మీ. మరియు QR = 24 సెం.మీ అయిన sin x మరియు cos x ల విలువలు కనుగొనుము.

ప్రయత్నించండి

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంABC లో C లంబకోణం. BC + CA = 23 సెం.మీ. మరియు BC – CA = 7 సెం.మీ. అయినా sin A మరియు tan B లను కనుగొనుము.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

(i) ఏదో ఒక విలువ x కు $\sin x = \dfrac{4}{3}$ సాధ్యమా ? ఎందుకు?

(ii) sin A మరియు cos A ల విలువలు ఎల్లప్పుడు 1 కంటే తక్కువగా ఉంటాయి. ఎందుకు?

(iii) tan A అంటే tan మరియు A ల లబ్ధము.

పై ప్రశ్నలను మిత్రులతో చర్చించండి.

త్రికోణమితిలో ఇంతవరకు తెలుసుకొన్న నిష్పత్తుల గుణకార విలోమాలే కాక మూడు నిష్పత్తులున్నాయి.

"sine A" యొక్క గుణకార విలోమం "cosecant A" లేదా ముక్తంగా "cosec A"

i.e., $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$

ఇదే విధంగా "cos A" యొక్క గుణకార విలోమం "secant A" లేదా ముక్తంగా "sec A" మరియు "tan A" యొక్క గుణకార విలోమం "cotangent A" ముక్తంగా "cot A"

i.e., $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ మరియు $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

భుజాల పరంగా cosec నిష్పత్తిని ఏవిధంగా చెప్పవచ్చు ?

ఇంకా $\sin A = \dfrac{\text{కోణం A యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}}$ అయితే,

$\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{కర్ణం}}{\text{కోణం A యొక్క ఎదుటి భుజం}}$

ప్రయత్నించండి

sec A మరియు cot A ల భుజాల నిష్పత్తులు ఏమౌతాయి?

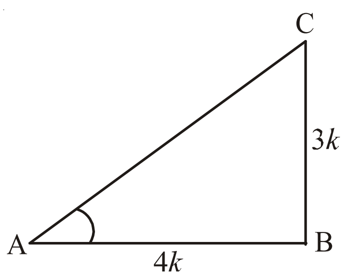
ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

- $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ విలువ tan A అగునా ?
- $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ విలువ cot A అగునా?

మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

ఉదాహరణ-1. $\tan A = \dfrac{3}{4}$, అయిన కోణం A యొక్క మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కోండి.

సాధన : $\tan A = \dfrac{3}{4}$ అని ఇవ్వబడింది.



మరియు $\tan A = \dfrac{\text{ఎదుటి భుజం}}{\text{ఆసన్న భుజం}} = \dfrac{3}{4}$

కావున ఎదుటి భుజం : ఆసన్న భుజం = 3:4

కావున కోణం A ఎదుటి భుజం = BC = $3k$ (k ఏదైన ధనపూర్ణ సంఖ్య)

ఆసన్నభుజం = AB = $4k$ అనుకొనగా

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం త్రిభుజం ABC లో

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$

$$AC = \sqrt{25k^2}$$

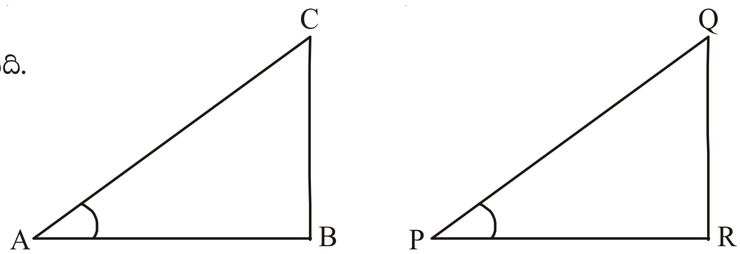
కర్ణం $AC = 5k$

ఇక మనం మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను రాద్దాం.

$$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} \text{ మరియు } \cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

ఇంకా $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$.

ఉదాహరణ-2. $\sin A = \sin P$ అయ్యేటట్లు $\angle A$ మరియు $\angle P$ లు లఘుకోణాలు అయిన $\angle A = \angle P$ అని చూపుము.



సాధన : $\sin A = \sin P$ అని ఇవ్వబడినది.

ΔABC నుండి $\sin A = \frac{BC}{AC}$

ΔPQR నుండి $\sin P = \frac{QR}{PQ}$

అయితే (1) & (2) ల నుండి $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k$ అనుకొనిన

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{AC}{PQ} = \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{AC}{PQ} \quad ((1) \text{ నుంచి})$$

$\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$ అయిన ΔABC - ΔPQR

$\therefore \angle A = \angle P$

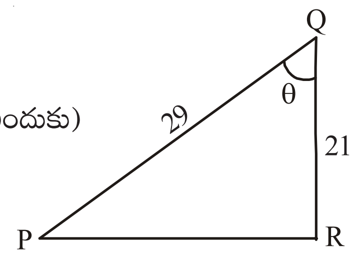
ఉదాహరణ-3. P వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజము PQRలో PQ = 29 యూనిట్లు, QR = 21 యూనిట్లు మరియు $\angle PQR = \theta$, అయిన

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ మరియు (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

సాధన : త్రిభుజం PQR లో

$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{8(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ యూనిట్లు.}$$ (ఎందుకు)



$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

ఇక (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = -\frac{41}{841}$

అభ్యాసం - 11.1

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో భుజాలు AB, BC మరియు CA ల పొడవులు వరుసగా 8 సెం.మీ, 15 సెం.మీ మరియు 17 సెం.మీ అయిన sin A, cos A మరియు tan A ల విలువలు కనుగొనుము.
2. లంబకోణ త్రిభుజం PQR యొక్క భుజాలు PQ = 7 సెం.మీ, QR = 25సెం.మీ మరియు $\angle Q = 90^0$ అయిన tan Q − tan R కనుగొనుము.
3. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో $a = 24$ యూనిట్లు, $b = 25$ యూనిట్లు మరియు $\angle BAC = \theta$ అయిన cos θ మరియు tan θల విలువలు కనుగొనుము.
4. $\cos A = \frac{12}{13}$ అయిన sin A మరియు tan A ల విలువలను కనుగొనుము.
5. 3 tan A = 4 అయిన sin A, మరియు cos A ల విలువలను కనుగొనుము.
6. cos A = cos X అయ్యేటట్లు ∠A మరియు ∠X లు లఘుకోణాలయిన ∠A = ∠X అని చూపుము.
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ అయిన (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ లను కనుగొనుము.
8. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన త్రిభుజం ABCలో $\tan A = \sqrt{3}$ అయిన
   (i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C − sin A sin C
   ల విలువలను కనుగొనుము.

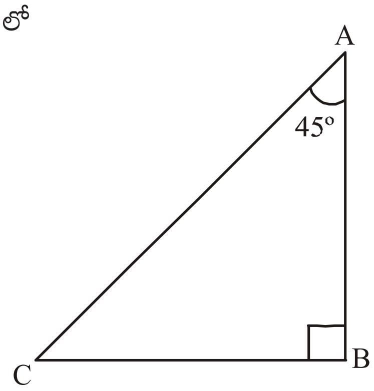
11.3 ప్రత్యేక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

మనకు ఇదివరకే లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు $30^o, 60^o, 90^o$ కోణాలు కల్గిన త్రిభుజాల గురించి తెలుసు.

మనము $\sin 30^o$ లేదా $\tan 60^o$ లేదా $\cos 45^o$ మొ॥న వాటిని పై త్రిభుజాల ఆధారంగా కనుక్కోవచ్చా?

$\sin 0^o$ లేదా $\cos 0^o$ లు వ్యవస్థితమౌతాయా ?

11.3.1 కోణం 45° యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు



B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో

$\angle A = \angle C = 45^o$ (ఎందుకు ?) and $BC = AB$ (ఎందుకు ?)

$BC = AB = a$ అనుకొనుము.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= a^2 + a^2 = 2a^2,$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తుల నిర్వచనాల ప్రకారం

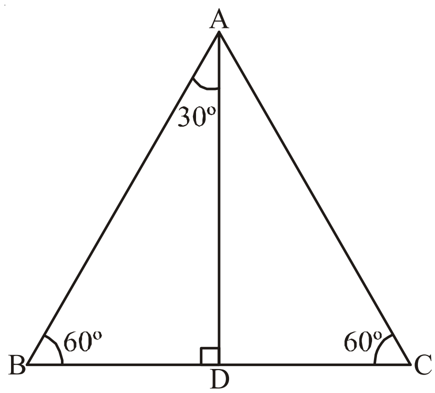
$$\sin 45^o = \frac{45^0 \text{ కోణం యొక్క ఎదుటి భుజం పొడవు}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{45^0 \text{ కోణం ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{45^0 \text{ కోణం ఎదుటి భుజం}}{45^0 \text{ కోణం ఆసన్న భుజం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$$

ఇదేవిధంగా $\operatorname{cosec} 45^o$, $\sec 45^o$ మరియు $\cot 45^o$.

11.3.2 కోణాలు 30° మరియు 60°ల త్రికోణమితీయనిష్పత్తులు



ఇక మనం 30^o మరియు 60^o కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కొందాం! వాటిని కనుక్కోడానికి ఒక సమబాహు త్రిభుజ సహాయాన్ని తీసుకుందాం. ఒక సమబాహుత్రిభుజంలో ఒక భుజంపై గీసిన లంబం, దానిని 30^o, 60^o మరియు 90^o కోణాలు కలిగిన రెండు సర్వసమాన లంబకోణ త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

ఒక సమబాహుత్రిభుజం ΔABC ని తీసుకోండి. ఇందులో ప్రతి కోణం 60^o ఉంటుంది. కావున $\angle A = \angle B = \angle C = 60^o$ మరియు $AB = BC = CA = 2a$ యూనిట్లు అనుకోండి. శీర్షం A నుండి భుజం BC పైకి ఒక లంబం AD ను ప్రక్క పటంలో చూపినట్లు గీయండి.

ఈ లంబం AD, కోణం A యొక్క "కోణ సమద్విఖండన రేఖ"గా మరియు భుజం BC యొక్క "సమద్విఖండన రేఖ"గా కూడా పనిచేస్తుంది.

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 30^o$.

BC ను D బిందువు రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తుంది, కావున

$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$ యూనిట్లు.

ప్రక్కపటంలో లంబకోణ త్రిభుజం ABD లో

$AB = 2a$ మరియు $BD = a$ యూనిట్లు

అప్పుడు $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$.

$\therefore AD = a\sqrt{3}$

ఇక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల నిర్వచనాల ఆధారంగా

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

ఇదే విధంగా $\tan 60^o = \sqrt{3}$ (ఎందుకు?)

పైన చెప్పిన దాని ఆధారంగా, మనం $\text{cosec } 60^o$, $\sec 60^o$ మరియు $\cot 60^o$ ల విలువలను కూడా చెప్పవచ్చు.

ఇవి చేయండి

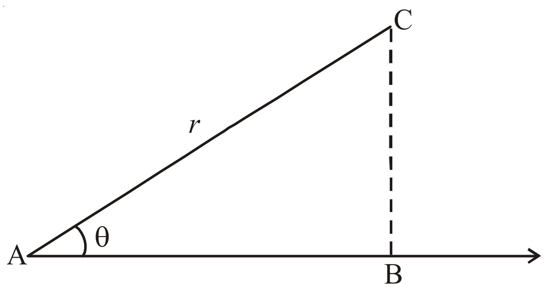
$\text{cosec } 60^o$, $\sec 30^o$ మరియు $\cot 60^o$ ల విలువలు కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి

$\sin 30^o$, $\cos 30^o$, $\tan 30^o$, $\text{cosec } 30^o$, $\sec 30^o$ మరియు $\cot 30^o$ విలువలను కనుక్కోండి.

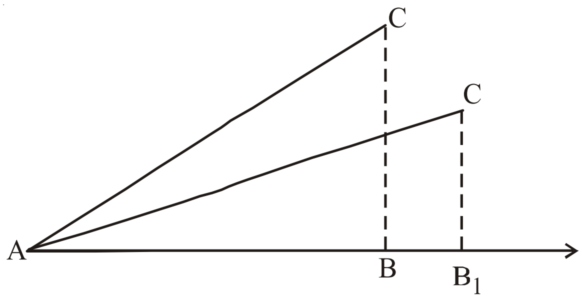
11.3.3 కోణాలు 0^o మరియు 90^o ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

ఇంతవరకు మనం 30^o, 45^o మరియు 60^oల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను గురించి చర్చించాం. ఇక మనం 0^o మరియు 90^o ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుక్కొందాం.

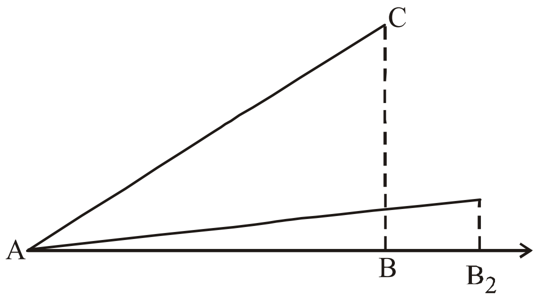


AB కిరణంపై r పొడవు కల్గిన AC రేఖాఖండం అల్పకోణం చేస్తుందనుకొనుము. బిందువు B నుండి C బిందువు యొక్క ఎత్తు BC. AB పై AC చేసే కోణం ఇంకా కొంచెం తగ్గేటట్లు AB పైకి AC వాలిందనుకొనుము అపుడు BC మరియు AB ల పొడవులలో ఏం మార్పు వస్తుంది.

ఈ విధంగా కోణం A తగ్గుతూ పోతుంటే, AB కిరణంపై C ఎత్తు తగ్గుతూ, బిందువు B నుండి B_1కు ఆ తర్వాత B_2 కు మారుతూ ఉంటుంది.. ఇలా ఆ కోణం సున్నా అయినపుడు ఎత్తు (i.e. కోణం యొక్క ఎదుటి భుజం) సున్న అవుతుంది మరియు ఆసన్నభుజం AC లో కలిసిపోతుంది (సమానమవుతుంది).



Step (i)



Step (ii)

ఇక త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తుల విలువలను చూద్దాం.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ మరియు } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

$A = 0^o$ అయితే $BC = 0$ మరియు $AC = AB = r$

ఇక $\sin 0^o = \frac{0}{r} = 0$ మరియు $\cos 0^o = \frac{r}{r} = 1$

మనకు $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ అని తెలుసు

$$\tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0$$

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి

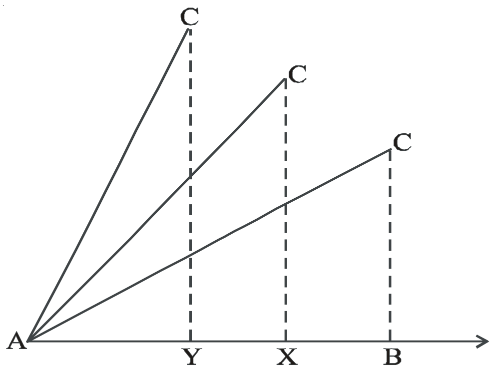
ఈ క్రింది వాటిని మీ స్నేహితులలో చర్చించండి.

1. $\operatorname{cosec} 0^o = \frac{1}{\sin 0^o}$ ఇది నిర్వచింపబడుతుందా? ఎందుకు ?

2. $\cot 0^o = \frac{1}{\tan 0^o}$ నిర్వచింపబడుతుందా? ఎందుకు?

3. $\sec 0^o = 1$. ఎందుకు ?

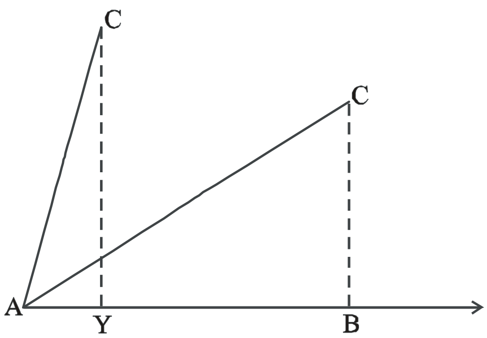
ఇంతవరకు మనం కోణాన్ని తగ్గించి సున్న కోణం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను చర్చించాం.



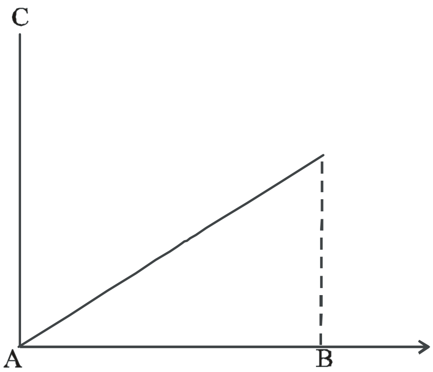
Step (i)

ఇక మనం AB కిరణంపై AC చేసే AB కోణాన్ని పెంచుతూ పోతే, AB పై C ఎత్తు పెరుగుతూ, బిందువు B నుండి Xకు ఆ తర్వాత Yకు మారుతూ పోతుంది. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే కోణం A పెరుగుతూ పోతుంటే ఎదుటి భుజం పెరుగుతూ, ఆసన్న భుజం తగ్గుతూ ఉంటుంది. ఒక సమయానికి కోణం విలువ 90^o లకు చేరితే ఏం జరుగుతుంది?

ఆ సందర్భంలో A కు B చేరుతుంది. AC కు BC కలిసిపోతుంది. అనగా కోణం విలువ 90^o అయినపుడు భూమి (ఆసన్నభుజం) విలువ సున్న అయి, BC (ఎదుటి భుజం) విలువ క్రమంగా పెరుగుతూ AC కు సమానమౌతుంది. అనగా rకు సమానమౌతుంది.



Step (ii)



Step (iii)

ఇక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుగొందాం.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ మరియు } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

కోణం $A = 90^o$ అయిన $AB = 0$ మరియు $AC = BC = r$

అపుడు $\sin 90^o = \frac{r}{r} = 1$ మరియు $\cos 90^o = \frac{0}{r} = 0$

ప్రయత్నించండి

$\tan 90^o$, $\text{cosec } 90^o$, $\sec 90^o$ మరియు $\cot 90^o$ విలువలను కనుగొనండి.

ఇక మనం, పైన చర్చించిన కోణాలన్నింటి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను ఒక పట్టిక రూపంలో చూద్దాం.

Table 11.1

$\angle A$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించబడదు
$\cot A$	నిర్వచించబడదు	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించబడదు
$\operatorname{cosec} A$	నిర్వచించబడదు	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

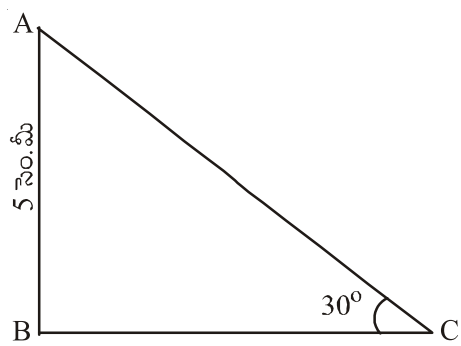
కోణం A విలువ 0^0 నుండి 90^0 కు పెరుగుతూ పోతుంటే $\sin A$ మరియు $\cos A$ విలువలు ఎలా మారుతూ ఉంటాయి? (పై పట్టికను గమనించండి)

$A \geq B$ అయిన $\sin A \geq \sin B$ అనడం సబబేనా ?

$A \geq B$ అయిన $\cos A \geq \cos B$ అనడం సబబేనా ? చర్చించండి.

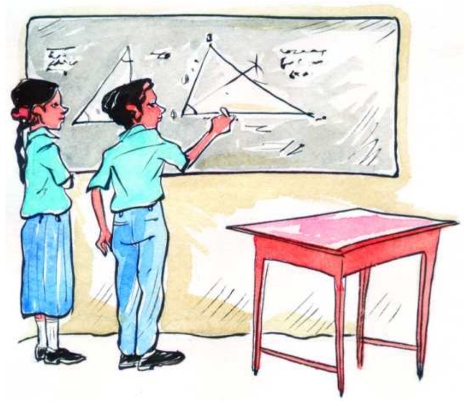
ఉదాహరణ-4. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔABC లో $AB = 5$ సెం.మీ మరియు $\angle ACB = 30^0$ అయిన BC మరియు AC భుజాల పొడవులను కనుగొనండి.

సాధన : $\angle ACB = 30^0$ మరియు $AB = 5$ సెం.మీ అని ఇవ్వబడింది. BCభుజం పొడవును కనుగొనాలంటే కోణం C పరంగా AB మరియు BC కి సంబంధించిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని తీసుకోవాలి. కోణం C కు BC కి సంబంధించిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని తీసుకోవాలి. కోణం C కు BC అనేది ఆసన్న భుజం మరియు AB అనేది ఎదుటి భుజం అవుతాయి.



కావున $\frac{AB}{BC} = \tan C$

i.e. $\frac{5}{BC} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$



ఈ విధంగా $BC = 5\sqrt{3}$ సెం.మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$$

$$AC^2 = 25 + 75$$

$$AC = \sqrt{100} = 10 \text{ సెం.మీ}$$

ఉదాహరణ-5. 6 సెం.మీ వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద 60^o కోణం చేస్తుంది. ఆ జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

సాధన : OA = OB = 6 సెం.మీ వ్యాసార్థం

$\angle AOB = 60^o$ ఇవ్వబడినది

AB పైకి 'O' నుండి OC ఎత్తు గీయబడింది అనుకొనుము.

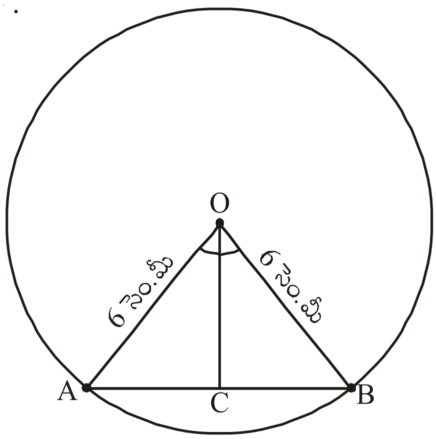
$\angle COB = 30^o$.

ΔCOB లో

$\sin 30^o = \frac{BC}{OB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$

$BC = \frac{6}{2} = 3$.



కాని, జ్యా పొడవు AB = 2BC

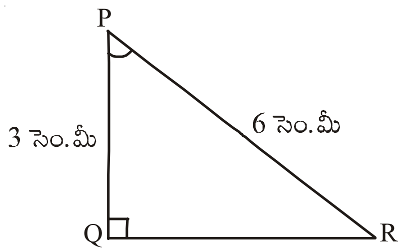
$= 2 \times 3 = 6$ సెం.మీ

$\therefore$ జ్యా పొడవు = 6 సెం.మీ

ఈ రోజుల్లో మనం ఉపయోగించే **'sine'** అనే భావన యొక్క ఉపయోగం మొట్ట మొదటగా 500A.D. లో ఆర్యభట్ట ద్వారా రాయబడిన "ఆర్య భట్టీయం"లో కనిపిస్తుంది. అందులో దీనిని "అర్థ-జ్యా"గా వాడబడింది. తర్వాత అది "జ్యా"గా లేదా "జివా"గా కాలక్రమేణా మారింది. అరబిక్ భాషలో అనువదింపబడిన ఆర్యభట్టీయంలో "జివా" యొక్క ప్రయోగం కనిపిస్తుంది. తర్వాత లాటిన్ భాషలో అనువదింపబడిన "ఆర్యభట్టీయం"లో "జివా"ను "***sinus* (సైన్)**" గా మారింది. ఆంగ్ల ఖగోళ శాస్త్ర ఆచార్యుడు ఎడ్మండ్ గుంటర్ (1581–1626) మొట్టమొదటగా **'*sine*'** ను సూక్ష్మంగా **'*sin*'** గా ఉపయోగించాడు.

ఉదాహరణ-6. Q వద్ద లంబకోణం ఉన్న ΔPRQ లో $PQ = 3$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ అయిన $\angle QPR$ మరియు $\angle PRQ$.

సాధన : $PQ = 3$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ



$$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

లేదా $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \angle PRQ = 30^o$

ఇంకా, $\angle QPR = 60^o$ (ఎందుకు?)

గమనిక : ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక భుజం మరియు ఇంకొక కొలత (మరొక భుజం లేదా కోణం) ఇచ్చిన మిగిలిన భుజాలు, కోణాలను కనుక్కోవచ్చు.

ఉదాహరణ-7. $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^o < A+B \le 90^o, A > B$ అయిన A మరియు B విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన : $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $A - B = 30^o$ (ఎందుకు ?)

ఇంకా, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, అయిన $A + B = 60^o$ (ఎలా ?)

పై రెండు సమీకరణాల నుండి : $A = 45^o$ మరియు $B = 15^o$. (ఎలా ?)

అభ్యాసం - 11.2

1. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి. క్రింది వాటిని గణించండి.

(i) $\sin 45^o + \cos 45^o$

(ii) $\frac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \operatorname{cosec} 60^o}$

(iii) $\frac{\sin 30^o + \tan 45^o - \operatorname{cosec} 60^o}{\cot 45^o + \cos 60^o - \sec 30^o}$

(iv) $2\tan^2 45^o + \cos^2 30^o - \sin^2 60^o$

(v) $\frac{\sec^2 60^o - \tan^2 60^o}{\sin^2 30^o + \cos^2 30^o}$

2. సరైన సమాధానాన్ని ఎంచుకొని, గుర్తించండి.

(i) $\frac{2\tan 30^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\sin 60^o$ (b) $\cos 60^o$ (c) $\tan 30^o$ (d) $\sin 30^o$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\tan 90^o$ (b) 1 (c) $\sin 45^o$ (d) 0

(iii) $\dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$

(a) $\cos 60^o$ (b) $\sin 60^o$ (c) $\tan 60^o$ (d) $\sin 30^o$

3. $\sin 60^o \cos 30^o + \sin 30^o \cos 60^o$ విలువ గణించండి. $\sin(60^o + 30^o)$ విలువ ఎంత? దీని నుండి మీరేం గ్రహించారు.

4. $\cos(60^o + 30^o) = \cos 60^o \cos 30^o - \sin 60^o \sin 30^o$ అనడం సబబేనా?

5. Q వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔPQR లో PQ = 6సెం.మీ $\angle RPQ = 60^o$ అయిన QR మరియు PR విలువలను కనుక్కోండి.

6. Y వద్ద లంబకోణం కల్గిన ΔXYZ లో $YZ = x$ మరియు $XY = 2x$ అయిన $\angle YXZ$ మరియు $\angle YZX$ ల విలువలను నిర్ణయించుము.

7. $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ అనడం సబబేనా ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము.

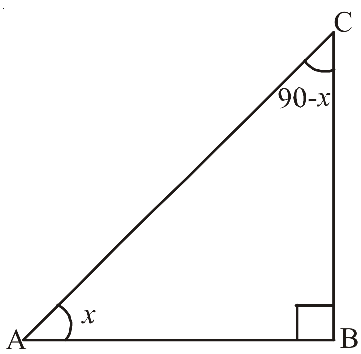
ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

θ యొక్క ఏ లఘుకోణ విలువకు (i) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ సత్యమౌతుంది?

పై సమీకరణం $0^o \le \theta \le 90^o$ లలో ఏ విలువలకు నిర్వచించబడదు?

11.4 పూరక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం

రెండు కోణాల మొత్తం 90^o అయిన ఆ కోణాలను పూరక కోణాలు అంటారని తెలుసు కదా! B వద్ద లంబకోణం కల్గిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC ను తీసుకొండి. ఈ త్రిభుజంలో ఏవైనా పూరక కోణాలున్నాయా? ఒక కోణం విలువ 90^0 కావున, మిగిలిన కోణాల మొత్తం 90^0 అవుతుంది కదా! (ఎందుకు?)



$\therefore \angle A + \angle C = 90^o$ కావున $\angle A$ మరియు $\angle C$ లను పూరక కోణాలు అంటాం.

$\angle A = x$ అనుకొనుము. అపుడు x యొక్క "ఎదుటిభుజం", BC మరియు AB 'ఆసన్నభుజం' అవుతాయి.

$\sin x = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad\cos x = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad\tan x = \dfrac{BC}{AB}$

$\text{cosec}\, x = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad\sec x = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad\cot x = \dfrac{AB}{BC}$

$\angle A + \angle C = 90^o$ కావున $\angle C = 90^o - \angle A$

ఇంకా $\angle A = x$ అయితే $\angle C = 90^o - x$

$\angle C$ పరంగా $(90^o - x)$ యొక్క ఎదుటి భుజం AB మరియు ఆసన్నభుజం BC అవుతాయి.

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC}$

$\text{Cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB}$

ఇక x^o మరియు $(90^o - x)$ కోణాలపై త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను పరిశీలించి, పోల్చగా

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC} = \cos x$ మరియు $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC} = \cot x$ మరియు $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB} = \tan x$

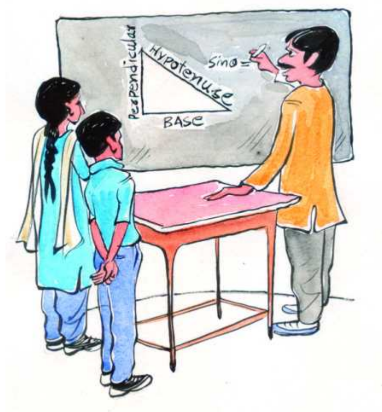
$\text{cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB} = \sec x$ మరియు $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC} = \text{cosec}\, x$

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

A యొక్క $0^o \le A \le 90^0$ యొక్క తెలిసిన అన్ని విలువలకు కింది సూత్రాలు సమంజసమేనా? సరిచూడండి.

$\sin(90^o - A) = \cos A$		$\cos(90^o - A) = \sin A$
$\tan(90^o - A) = \cot A$	మరియు	$\cot(90^o - A) = \tan A$
$\sec(90^o - A) = \text{cosec}\, A$		$\text{cosec}(90^o - A) = \sec A$

ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.



ఉదాహరణ-8. $\dfrac{\sec 35^o}{\text{cosec}\, 55^o}$ ను గణించుము.

సాధన : $\text{cosec A} = \sec (90^o - A)$

$$\text{cosec } 55^o = \sec (90^o - 35^o)$$

$$\text{cosec } 55^o = \sec 35^o$$

ఇక $\dfrac{\sec 35^o}{\text{cosec}\, 65^o} = \dfrac{\sec 35^o}{\sec 35^o} = 1$

ఉదాహరణ-9. $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ ఇంకా $7A$ అల్పకోణం అయిన A విలువ ఎంత?

సాధన : $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ అని ఇవ్వబడింది ...(1)

$$\sin (90 - 7A) = \sin (A - 6^o)$$

$7A$ లఘుకోణం కావున $(90^0 - 7A)$ మరియు $(A - 6^o)$ లు కూడా లఘుకోణాలవుతాయి.

$$90^o - 7A = A - 6^o$$

$$8A = 96^o$$

$$A = 12^o.$$

ఉదాహరణ-10. $\sin A = \cos B$ అయిన $A + B = 90^o$ అని చూపుము.

సాధన : $\sin A = \cos B$ అని ఇవ్వబడింది ...(1)

$\cos B = \sin (90^o - B)$ అని తెలుసు

కావున $\sin A = \sin (90^o - B)$

A, B లఘుకోణాలు అయిన $A = 90^o - B$

$$\Rightarrow A + B = 90^o.$$

ఉదాహరణ-11. $\sin 81^o + \tan 81^o$ విలువను 0^o మరియు 45^o మధ్యత్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో చూపుము.

సాధన :

$$\sin 81^o = \cos(90^o - 81^o) = \cos 9^o$$

$$\tan 81^o = \tan(90^o - 81^o) = \cot 9^o$$

అయిన, $\sin 81^o + \tan 81^o = \cos 9^o + \cot 9^o$

ఉదాహరణ-12. త్రిభుజం లోని ABC లోని అంతర కోణాలు A, B మరియు C లు అయిన

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

సాధన : A, B మరియు C లు ΔABC లోని కోణాలు కావున

$A + B + C = 180^o$.

ఇరువైపుల 2 చే భాగించగా

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^o$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$$

ఇరువైపుల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి sin తీసుకొనగా

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^o - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$; నిరూపించబడింది.

అభ్యాసం 11.3

1. విలువ కనుక్కోండి.

(i) $\frac{\tan 36^o}{\cot 54^o}$ (ii) $\cos 12^o - \sin 78^o$ (iii) $\text{cosec } 31^o - \sec 59^o$

(iv) $\sin 15^o \sec 75^o$ (vi) $\tan 26^o \tan 64^o$

2. నిరూపించండి.

(i) $\tan 48^o \tan 16^o \tan 42^o \tan 74^o = 1$

(ii) $\cos 36^o \cos 54^o - \sin 36^0 \sin 54^o = 0$.

3. $\tan 2A = \cot(A - 18^o)$, 2A లఘుకోణం అయిన A విలువ కనుక్కోండి.

4. A, B లు లఘుకోణాలు మరియు $\tan A = \cot B$ అయిన $A + B = 90^o$.

5. A, B మరియు C లు ΔABC లోని అంతర కోణాలయిన $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$

6. $\sin 75^o + \cos 65^o$ ను 0^o మరియు 45^o మధ్యగల విలువల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో తెల్పుము.

11.5 త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు

చరరాశుల అన్ని విలువలకు ఒక గణిత సమీకరణము సత్యమైతే ఆసమీకరణాన్ని సర్వసమీకరణం అంటారు.

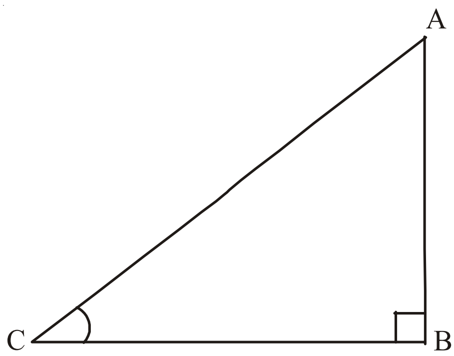
ఉదాహరణకు $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

ఇదే విధంగా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆధారంగా ఏర్పడిన సర్వసమీకరణాన్ని త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణం అంటారు. ఇంకా ఈ సర్వసమీకరణం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల అన్ని కోణాలకు సత్యం అవుతుంది. ఇక్కడ, మనము త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలను ఉత్పాదిద్దాం!

B వద్ద లంబకోణం కలిగిన త్రిభుజం ABC లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad \ldots(1)$

ఇరువైపుల AC^2 చే భాగించగా



$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$$

$$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

మనం సాధారణంగా $(\cos A)^2$కు బదులుగా $\cos^2 A$ గా రాస్తాం. కాని $\cos A^2$ గా రాయం.

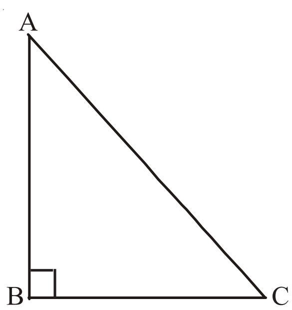
$(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ గా రాయకూడదు)

కావున సర్వసమీకరణం $\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$

పై సమీకరణంలో కోణం A ను చరరాశిగా పరిగణిస్తాం. ఇంకా ఈ సమీకరణం A యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యం అవుతుంది.

$\therefore$ కావలసిన త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణం

$$\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$



మనం ఇంకొక సర్వసమీకరణాన్ని చూద్దాం.

సమీకరణం (1) నుండి

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ఇరువైపుల AB^2 చే భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A}$$

ఇదేవిధంగా సమీకరణం(1) ని ఇరువైపుల BC^2 చే భాగించగా $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$ వస్తుంది.

పై సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి, మనం ఒక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని మరొక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిలో సూచించవచ్చు. ఇంకా మనం ఒక కోణం యొక్క నిష్పత్తి తెలిస్తే మిగిలిన నిష్పత్తులను కూడ కనుక్కోవచ్చు.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

$0^0 \leq A \leq 90^0$ అన్ని విలువలకు త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు సత్యమేనా?

- $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
- $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

ఇవి చేయండి

(i) $\sin C = \frac{15}{17}$, అయిన $\cos A$ విలువ కనుగొనుము.

(ii) $\tan x = \frac{5}{12}$, అయిన $\sec x$ విలువ కనుగొనుము.

(iii) $\text{cosec}\ \theta = \frac{25}{7}$, అయిన $\cot x$ విలువను కనుగొనుము.

ప్రయత్నించండి

క్రింది వాటి విలువలను సకారణంగా కనుగొనుము

(i) $\frac{\sin^2 15^o + \sin^2 75^o}{\cos^2 36^o + \cos^2 54^o}$ (ii) $\sin 5^o \cos 85^o + \cos 5^o \sin 85^o$

(iii) $\sec 16^o \ \text{cosec}\ 74^o - \cot 74^o \tan 16^o$.

ఉదాహరణ-13. $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta \ \text{cosec}\ \theta$ నిరూపించండి.

సాధన : $LHS = \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{(ఎందుకు ?)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \ \cos\theta} \qquad \text{(ఎందుకు ?)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \ \frac{1}{\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta \ \sec\theta$$

ఉదాహరణ-14. $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ నిరూపించండి

సాధన : L.H.S. $= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (ఎందుకు ?)

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ (ఎందుకు ?)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta = \text{R.H.S}$

ఉదాహరణ-15. $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ నిరూపించండి.

సాధన : LHS $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ (1 + cos θ చే గుణించి భాగించగా)

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad \text{(ఎందుకు ?)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

అభ్యాసం 11.4

1. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి :

   (i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

   (ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

   (iii) $(\sec^2\theta - 1)(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$

2. $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ అని చూపించండి ?

3. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ చూపండి?

4. $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$ చూపండి ?

5. $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta.\sin\theta$ చూపండి?

6. $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A)$ సూక్ష్మీకరించండి.

7. $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ అని నిరూపించండి?

8. $(1 - \cos\theta)\,(1 + \cos\theta)\,(1 + \cot^2\theta)$ సూక్ష్మీకరించండి?

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$ ఐతే $\sec\theta - \tan\theta$ విలువ ఎంత?

10. $\text{cosec}\theta + \cot\theta = k$ ఐతే $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$ విలువ ఎంత?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[ఈ అభ్యాసం పరీక్షలలో పరీక్షించడానికి ఉద్దేశించినది కాదు]

1. $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\text{cosec}\theta - 1}{\text{cosec}\theta + 1}$ నిరూపించండి.

2. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ నిరూపించండి

($\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి).

3. $(\text{cosec}\,A - \sin A)\,(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ అని నిరూపించండి.

4. $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ అని నిరూపించండి.

5. $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ అని చూపండి.

6. $\left[\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)}\right] = \left[\dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}\right]$ అని నిరూపించండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. B వద్ద లంబ కోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో

$$\sin A = \frac{\text{కోణం } A \text{ నకు ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}}, \quad \cos A = \frac{\text{కోణం } A \text{ నకు ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$; $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

3. ఒక లఘుకోణం యొక్క ఒక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి విలువ తెలిస్తే మిగతా నిష్పత్తులను కూడ కనుక్కోవచ్చు.

4. $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ మరియు 90^o ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు.

5. sin A లేదా cos A ల విలువలు ఎప్పటికి 1 కంటే తక్కువగాను లేదా సమానంగా ఉంటాయి. కాని sec A లేదా cosec A ల విలువలు ఎప్పటికి 1 కంటే ఎక్కువగాను లేదా సమానంగాను ఉంటాయి.

6. $\sin(90^o - A) = \cos A$, $\cos(90^o - A) = \sin A$

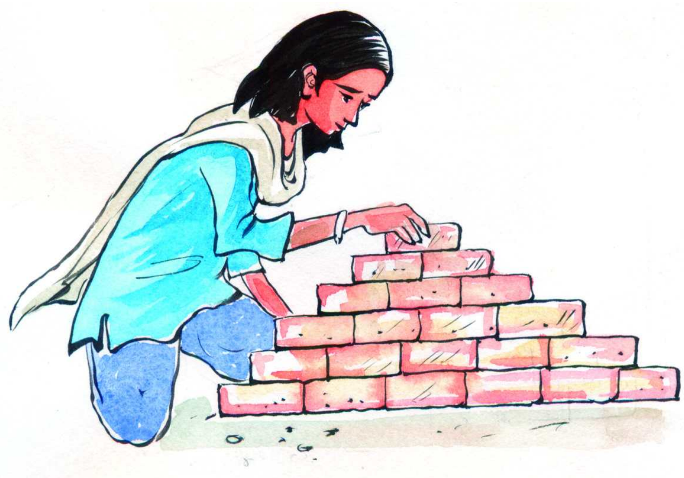
   $\tan(90^o - A) = \cot A$, $\cot(90^o - A) = \tan A$

   $\sec A(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ for $0^o \leq A \leq 90^o$

   $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ $(0^o \leq A \leq 90^o)$



అధ్యాయము

12 త్రికోణమితి అనువర్తనాలు

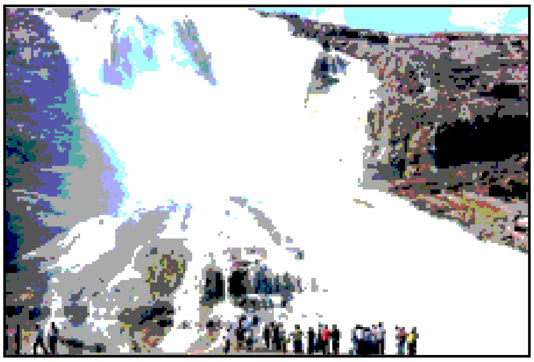
(Applications of Trigonometry)

12.1 పరిచయం

ప్రపంచంలో అతి ఎత్తైన పర్వత శిఖరం "ఎవరెస్టు శిఖరం" అని, దాని ఎత్తు 8848 మీటర్లు అని సాంఘిక శాస్త్రంలో చదువుకొనే ఉంటారు.

ఆదిలాబాద్ జిల్లాలోని కుంటాల జలపాతం ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రంలోనే అతి ఎత్తైన "ప్రాకృతిక జలపాతం" అని, దాని ఎత్తు 147 అడుగులు అని ఎక్కడైన చదువుకొనే ఉంటారు.

వీటి ఎత్తులు ఏ విధంగా కొలిచి ఉంటారు ? మీరు మీ పాఠశాల భవనం ఎత్తును గాని, మీ చుట్టు ప్రక్కల లోని ఎత్తైన చెట్టు ఎత్తును గాని కనుక్కోగలరా ? ఈ విధానాన్ని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకొనే ప్రయత్నం చేద్దాం.

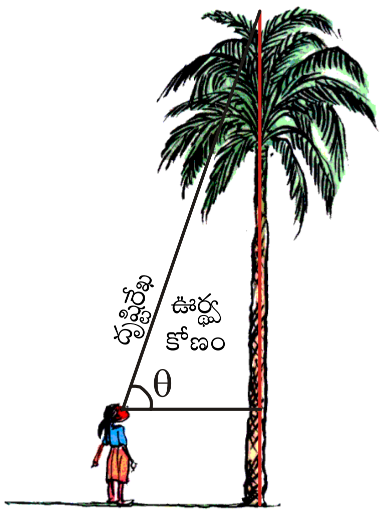


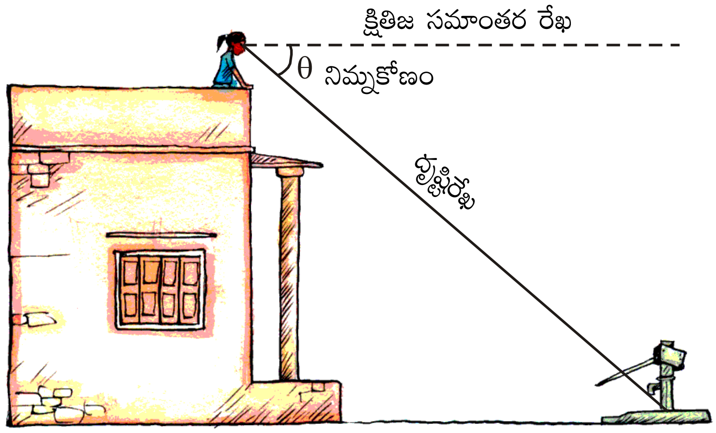
విజయ వారి ఇంటి దగ్గరి తాటి చెట్టు ఎత్తును కనుక్కోవాలనుకుంది. ఆమె చెట్టు చెట్టుపై కొనను గుర్తించింది. "ఆమెకన్ను" మరియు "చెట్టు పై కొన" కలిపే ఒక రేఖను ఊహించింది. ఈ రేఖను "దృష్టిరేఖ" అంటారు. ఇంకా ఆమె తన కంటి నుండి 'క్షితిజ సమాంతర రేఖ'ను ఊహించింది.

ఇక్కడ "దృష్టిరేఖ", "క్షితిజ సమాంతర రేఖ" మరియు "చెట్టు"లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తున్నాయి.

చెట్టు ఎత్తును కనుక్కోడానికి ఆమె ఈ త్రిభుజంలో ఒక కోణం, ఒక "భుజం" తెలుసుకోవాలి. అంతే !

"క్షితిజ సమాంతరరేఖ"కు "దృష్టిరేఖ" పైన ఉంటే క్షితిజ సమాంతర రేఖతో దృష్టిరేఖ చేయు కోణాన్ని "ఊర్ధ్వకోణం" అంటారు.





మీరు మీ పాఠశాల భవనంపై నిలబడి ఉన్నారనుకోండి. మీ పాఠశాల ఆవరణలోని బోరింగ్ మీ పాఠశాల భవనం నుండి ఎంత దూరంలో ఉందో తెలుసుకోవాలనుకోండి. దాని కొరకు ఆ బోరింగ్ అడుగు భాగాన్ని పరిశీలించాలి.

అపుడు,"క్షితిజ సమాంతర రేఖ" కు దృష్టి రేఖ క్రిందికి ఉంటుంది. ఇచ్చట, క్షితిజ సమాంతర రేఖతో దృష్టి రేఖ చేయు కోణాన్ని "నిమ్నకోణం" అంటారు.

సర్వేయరు చాలా వందల యేండ్ల నుండియే త్రికోణమితిని వాడుతూ ఉన్నారు. వారు సర్వే చేసే ప్రక్రియలో ఊర్ధ్వకోణం, నిమ్నకోణాలను కనుక్కోడానికి "థియోడలైట్' అనే పరికరాన్ని వాడతారు. 19వ శతాబ్దంలో "గ్రేట్‌ట్రిగనా మెట్రిక్ సర్వే" పేరుతో బ్రిటిష్ ఇండియా భారతదేశంలో సర్వే చేయడానికి రెండు పెద్ద "థియోడలైట్"లను తయారు చేయించింది. ఆ సర్వే జరుగుతుండగా, 1852లో ప్రపంచంలోనే ఒక అతి పెద్ద పర్వత శిఖరాన్ని భారతదేశంలో కనుగొన్నారు. 160 కి.మీ. దూరం నుండి చుట్టు ఉన్న ఆరు విభిన్న కూడళ్ల నుండి పరిశీలించి పర్వతం యొక్క ఎత్తును కనుగొన్నారు. 1856 లో ఆ సర్వే చేసిన అధికారియైన "సర్ జార్జ్ ఎవరెస్ట్" గౌరవార్థం అ శిఖరానికి అతని పేరు పెట్టడం జరిగింది. మొట్టమొదటగా అతడు ఉపయోగించిన ఆ థియోడలైట్‌లను డెహెరాడూన్‌లోని సర్వేఆఫ్ ఇండియా మ్యూజియంలో సందర్శనార్థం పెట్టారు.

12.2 సమస్యల సాధనకు పటాలు గీద్దాం

ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధించడానికి పటాలను గీసేటప్పుడు కింది విషయాలను దృష్టిలో పెట్టుకోవాలి.

(i) గణిత పరంగా సౌలభ్యం కొరకు టవర్లు, చెట్లు, భవనాలు, ఓడలు, పర్వతాలు మొ॥ వాటిని రేఖీయంగానే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

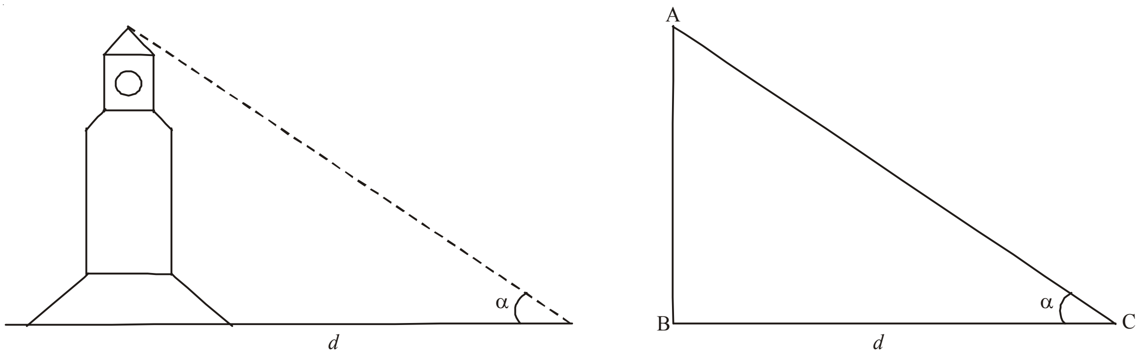
(ii) ఊర్ధ్వకోణం లేదా నిమ్న కోణాన్ని క్షితిజ సమాంతర రేఖ ఆధారంగానే తీసుకోవాలి.

(iii) సమస్యలో పరిశీలిస్తున్న వ్యక్తి ఎత్తు ఇవ్వనట్లైతే, అతడి ఎత్తును ఉపేక్షించి సమస్యను సాధించాలి.

ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించే క్రమంలో, ఊర్ధ్వ, నిమ్న కోణాలతో ఆ సందర్భాలను జ్యామితీయంగా ఊహించాల్సి ఉంటుంది. సమస్యలను సాధించటానికి వాటికి సంబంధించిన పటాలను గీయడం చాలా ముఖ్యం. ఆ పటాల ఆధారంగా సులభంగా సమస్యలను సాధించవచ్చు. ఇక కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

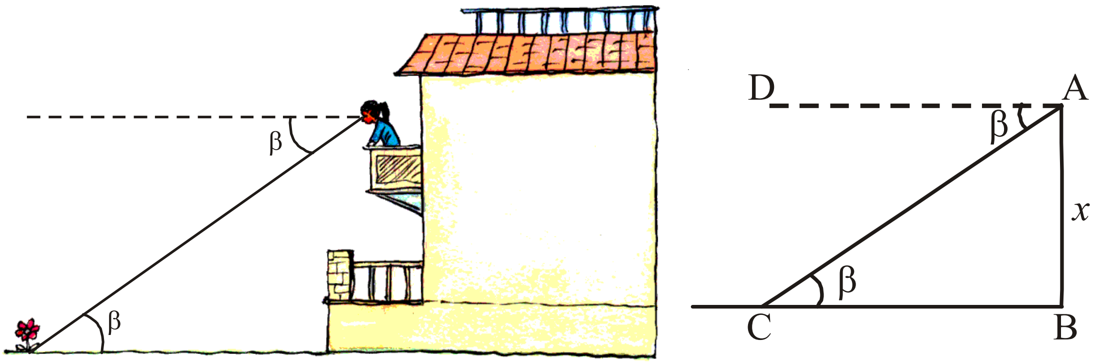
ఉదాహరణ-1. పరిశీలకుని నుండి d మీటర్ల దూరంలో నున్న ఒక క్లాక్ టవర్ యొక్క పై కొన α^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

సాధన : సమస్య ఆధారంగా ఈ క్రింది పటం గీయవచ్చు.



ఉదాహరణ-2. రింకి మొదటి అంతస్థులోని బాల్కనీ నుండి బయటి భూమిపై నున్న పూవును β^0 నిమ్నకోణంతో చూస్తుంది. మొదటి అంతస్థు ఎత్తు 'x' మీటర్లు. ఈ సందర్భంలో పటాన్ని గీయండి.

సాధన :

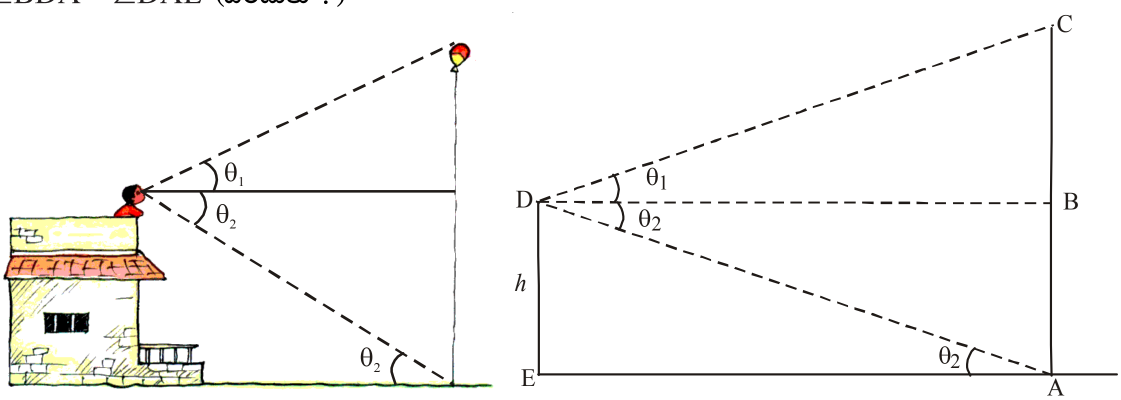


ఇక్కడ $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (ఎందుకు ?)

ఉదాహరణ-3. ఒక పెద్ద త్రాడు సహాయంతో ఒక పెద్ద బెలూన్ గాలిలో తేలుతుంది. ఒక భవనంపై నున్న ఒక వ్యక్తి దానిపై భాగాన్ని θ_1 ఊర్ధ్వకోణంతో మరియు త్రాడు అడుగుభాగాన్ని θ_2 నిమ్నకోణంతో పరిశీలించాడు. ఆ భవనం ఎత్తు h అడుగులు. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

సాధన : ఇక్కడ మనం గమనించగా

$\angle BDA = \angle DAE$ (ఎందుకు ?)



ఇవి చేయండి

1. కింది సందర్భాలకు పటాలను గీయండి.

   (i) ఒక వ్యక్తి 'α' ఊర్ధ్వ కోణముతో ఒక గాలి పటాన్ని ఎగురవేస్తున్నాడు. గాలి పటాన్ని 'ℓ' పొడవు గల దారంతో ఎగురవేస్తున్నాడు. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

   (ii) ఒక నది యొక్క ఒక వైపు ఉన్న 'h' ఎత్తుగల చెట్టుపై నుండి నది యొక్క రెండు తీరాలను θ_1 మరియు θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$ నిమ్న కోణాలతో ఒక వ్యక్తి పరిశీలించాడు నది వెడల్పు 'd' అయిన ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి..

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. మీ పాఠశాల భవనం నుండి 'd' దూరంలో గల బిందువు నుండి భవనంపై భాగాన్ని 'α' ఊర్ధ్వకోణముతో పరిశీలించారు.

   ఈ పాఠశాల భవనం ఎత్తును కనుగొనడానికి ఏ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని ఎంచుకొంటారు ?

2. 'x' మీటర్ల పొడవు గల ఒక నిచ్చెన భూమితో θ కోణం చేస్తూ ఒక గోడకు వేయబడిఉంది. నిచ్చెన పై భాగం స్పృశించిన గోడస్థానం యొక్క ఎత్తును కనుక్కోడానికి ఏ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని ఎంచుకోవాలి?

ఇంతవరకు మనం ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన పటాలను గీయడం, జ్యామితీయంగా వాటిని ఊహించడం చర్చించాం. ఇక మనం ఎత్తులు మరియు దూరాలను కనుగొనే విధానాన్ని చర్చిద్దాం.

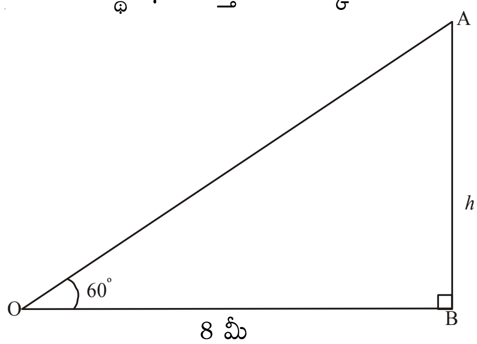
ఉదాహరణ-4. ఒక బాలుడు ఒక విద్యుత్ స్థంభం అడుగు భాగం నుండి 8 మీటర్ల దూరంలో నున్న బిందువు నుండి విద్యుత్ స్థంభం పై భాగాన్ని 60° ఊర్ధ్వ కోణాలతో పరిశీలించాడు. ఆ స్థంభం ఎత్తును కనుక్కోండి.

సాధన : పటం నుండి, త్రిభుజం OAB నుండి

OB = 8 మీటర్లు

$\angle AOB = 60^\circ$

స్తంభం ఎత్తు $= AB = h$ మీటర్లు అనుకొనగా

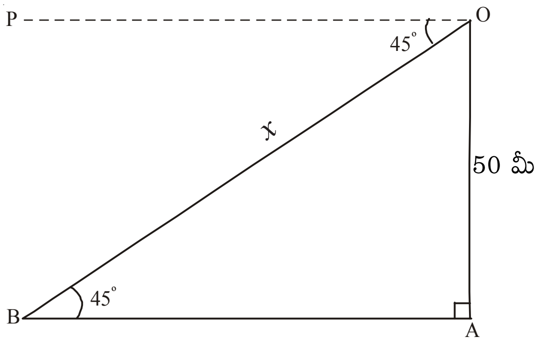


(ΔOAB లో $\angle AOB$ యొక్క ఆసన్న భుజం విలువ మనకు తెలుసు. మనం "ఎదుటి భుజం" విలువను కనుక్కోవాలి. కావున ఆసన్న భుజం మరియు ఎదుటి భుజాల నిష్పత్తి "tan" ను పరిగణించాలి).

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \qquad h = 8\sqrt{3} \text{ మీ.}$$

ఉదాహరణ-5. ఒక హెలికాప్టర్‌లో ఉన్న రాజేందర్ భూమిపై నున్న ఒక వ్యక్తిని 45^o నిమ్నకోణంలో పరిశీలించాడు. భూమిపై నుండి హెలీకాప్టర్ 500 మీటర్ల ఎత్తులో ఎగురుతూ ఉంటే, రాజేందర్‌కు, ఆ వ్యక్తి ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు.



సాధన : పటం నుండి, త్రిభుజం OAB లో

OA = 50 మీటర్లు

$\angle POB = \angle OAB = 45^o$ (ఎందుకు ?)

OB = రాజేందర్ నుండి వ్యక్తి దూరం = x.

(త్రిభుజం OAB లో $\angle OBA$ యొక్క ఎదుటి భుజం కొలత మనకు తెలుసు. కర్ణం OB విలువ కనుక్కోవాలి. ఎదుటి భుజం, కర్ణాల నిష్పత్తి "sin" కావున "sin"ను ఎంచుకొంటాం)

$$\sin 45^o = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{500}{x}$$

$x = 500\sqrt{2}$ మీటర్‌లు

రాజేందర్ నుండి $50\sqrt{2}$ మీటర్‌ల దూరంలో వ్యక్తి ఉన్నాడు.

అభ్యాసం - 12.1

1. భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలిచి ఉంది. ఆ టవర్ అడుగు నుండి 15 మీటర్‌ల దూరం నుండి ఆ టవర్‌పై కొన 45^o ఊర్ధ్వకోణంలో పరిశీలించబడింది. ఆ టవర్ ఎత్తు ఎంత?

2. ఒక చెట్టు గాలికి విరిగి, విరిగిన పై భాగం భూమికి 30^o ల కోణం చేస్తూ భూమిపై పడింది. చెట్టు అడుగుభాగం నుండి, కిందపడిన చెట్టు కొన మధ్యదూరం 6 మీటర్‌లు. చెట్టు విరగక ముందు ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?

3. ఒక పార్క్‌లో పిల్లలు ఆడుకోవడానికి ఒక కాంట్రాక్టర్ ఒక జారుడు బల్లను ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. దానిని 2 మీటర్‌ల ఎత్తుతో, భూమితో 30^o ల కోణం చేసేటట్లు ఏర్పరచాలనుకొంటే ఆ జారుడు బల్ల పొడవు ఎంత ఉంటుంది?

4. ఉదయం 7 గంటలకు 15 మీటర్ల ఎత్తు గల స్థంభం యొక్క నీడ పొడవు $5\sqrt{3}$ మీటర్లు. ఆ సమయంలో సూర్యకిరణాలు, భూమితో ఎంత కోణం చేస్తున్నాయి?

5. పవన్ 10 మీటర్ల ఎత్తు గల స్థంభాన్ని 3 బలమైన తాళ్ళ సహాయంతో నిలబెట్టాలనుకున్నాడు. ఒక్కొక్క త్రాడు స్థంభంతో 30^o కోణం చేయాల్సి ఉంటే ఎంత పొడవు తాడు తీసుకోవాలి ?

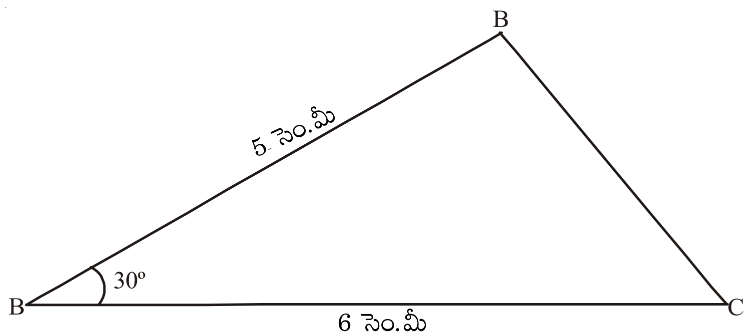
6. విజయ్ భూమి నుండి 6 మీటర్ల ఎత్తు గల భవనంపై నుండి భూమిపై నున్న ఒక లక్ష్యాన్ని 60^o నిమ్నకోణంలో బాణంతో ఛేదించాలనుకున్నాడు. విజయ్ నుండి లక్ష్యం ఎంతదూరంలో ఉంటుంది.

7. 9 మీటర్ల ఎత్తు గల విద్యుత్ స్థంభంపై ఒక ఎలక్ట్రీషియన్ మరమ్మత్తు పని చేయాల్సి ఉంది. మరమ్మత్తు చేయడానికి ఆ స్థంభం పై నుండి 1.8 మీటర్ల తక్కువ ఎత్తుకు చేరాలి. ఒక నిచ్చెనను భూమిపై 60^o కోణంతో పెట్టాల్సి వస్తే ఎంత పొడవు గల నిచ్చెనను తీసుకోవాలి. నిచ్చెన అడుగుభాగం నుండి స్థంభం అడుగుభాగం దూరం ఎంత?

8. ఒక నావ ఒక నదిని దాటాల్సి ఉంది. నదీ ప్రవాహం కారణంగా ఆ నదీ తీరంతో 60^o ల కోణం చేస్తున్న ఆ నావ 600మీటర్లు ప్రయాణించి అవతలి తీరాన్ని చేరింది. ఆ నది వెడల్పెంత?

9. 1.8 మీ ఎత్తు ఉన్న ఒక పరిశీలకుడు ఒక తాటి చెట్టు నుండి 13.2 మీటర్ల దూరంలో ఉన్నాడు. ఆ చెట్టుపై పరిశీలకుడి కంటి నుండి 45^o ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?

10. ప్రక్కనున్న పటంలో AC = 6 సెం.మీ, AB = 5 సెం.మీ మరియు $\angle BAC = 30^o$. అయిన త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

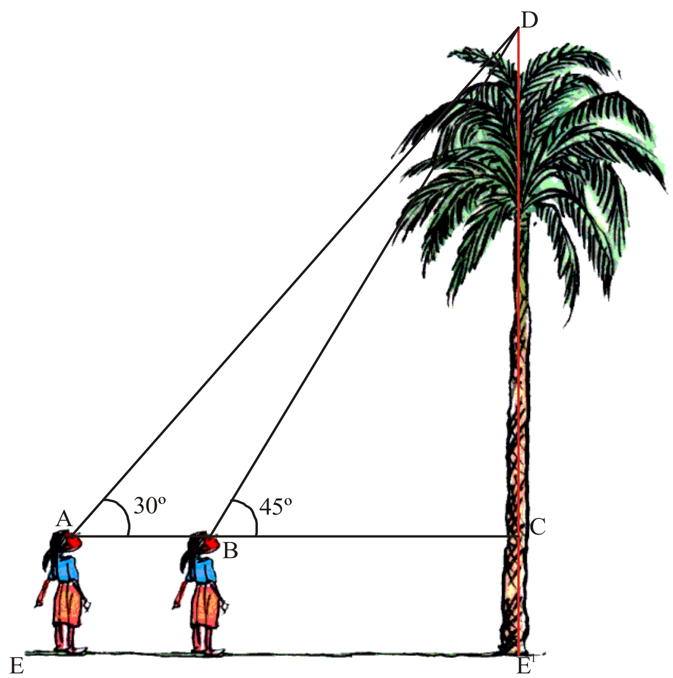


12.3 రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలతో కూడిన సమస్యలు

మనం ఇంతవరకు ఒక త్రిభుజంతో కూడిన సమస్యలను సాధించాం. ఒక వేళ రెండు త్రిభుజాలతో ఒకే సందర్భం ఉంటే, సమస్యను ఎలా సాధించాలి?

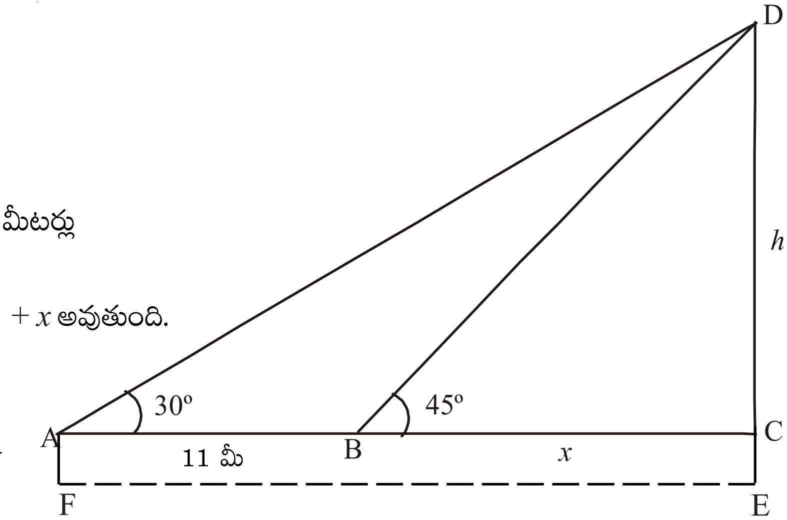
మీరు ఒక తాటి చెట్టును కొంత దూరం నుండి పరిశీలిస్తున్నారనుకోండి. మరియు ఆ చెట్టు ఎత్తును కనుక్కోవాలనుకున్నారను కోండి. మీరు ఆ చెట్టును రెండు వేరువేరు పరిశీలనా స్థానాల నుండి పరిశీలిస్తున్నారనుకోండి.

ఈ సమస్యను ఎలా సాధిస్తారు?
మీరు ఒక తాటి చెట్టుపై కొనను 45^o ఊర్ధ్వకోణంలో పరిశీలిస్తున్నామను కోండి. ఆ తాటి చెట్టును ఇంకా 11 మీటర్ల దూరం పోయిన తర్వాత ఊర్ధ్వకోణం 30^o కు మారిందనుకొనుము.



ఆ చెట్టు ఎత్తును ఎలా కనుగొంటామో చూద్దాం !

పటం నుండి



AB = 11 మీ

$\angle DAC = 30^{o}$

$\angle DBC = 45^{o}$

తాటి చెట్టు ఎత్తు CD = h మీటర్లు

BC పొడవు = x

AC = 11 + x అవుతుంది.

త్రిభుజం BDC నుండి

$$\tan 45^{o} = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h \qquad ...(1)$$

త్రిభుజం ADC నుండి

$$\tan 30^{o} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}} = \frac{11+h}{\sqrt{3}}$$ (ఎందుకు)

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\left(\sqrt{3}-1\right)}$$ మీటర్లు.

గమనిక : తాటిచెట్టు ఎత్తు CD + CE అవుతుంది. ఇక్కడ CE = AE = బాలిక ఎత్తు).

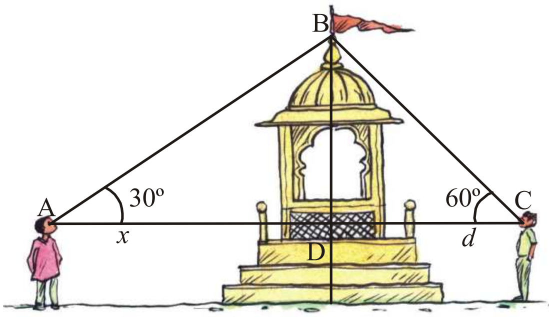
ఉదాహరణ-6. 30 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక గుడి పై భాగాన్ని, దాని ఇరువైపులా ఉన్న ఇద్దరు వ్యక్తులు 30° మరియు 60° ఊర్ధ్వకోణాలలో పరిశీలించారు. ఆ ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య దూరం ఎంత?

సాధన : పటం నుండి దేవాలయం ఎత్తు BD = 30 మీటర్లు

మొదటి వ్యక్తి పరిశీలిస్తున్నపుడు ఊర్ధ్వకోణం $\angle BAD = 30^\circ$

రెండవ వ్యక్తి పరిశీలిస్తున్నపుడు ఊర్ధ్వకోణం $\angle BCD = 60^\circ$

మొదటి వ్యక్తి నుండి గుడి దూరం $AD = x$ రెండవ వ్యక్తి నుండి గుడి దూరం $CD = d$ అనుకొనగా



ΔBAD నుండి

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \quad .... (1)$$

ΔBCD నుండి

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \quad .... (2)$$

(1) & (2) ల నుండి ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్యదూరం = BC + BA = $x + d$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ మీటర్లు}$$

ఉదాహరణ-7. ఒక టవర్ పాదం వరకు ఒక చక్కని (straight) రహదారి ఉంది. ఆ టవర్‌పై నిలబడి ఉన్న రామయ్య అనే వ్యక్తి దూరం నుండి వస్తున్న కారును 30° ల నిమ్నకోణంలో చూసాడు. సమవేగంతో వస్తున్న ఆ కారును 6 సెకండ్ల తర్వాత 60° నిమ్నకోణంలో గమనించాడు. ఈ స్థానం నుండి కారు టవర్‌ను చేరడానికి పట్టు కాలం ఎంత?

సాధన : పటం నుండి

6 సెకండ్లలో కారు ప్రయాణించిన దూరం $= AB = x$ మీటర్లు

టవర్ ఎత్తు $CD = x$ మీటర్లు

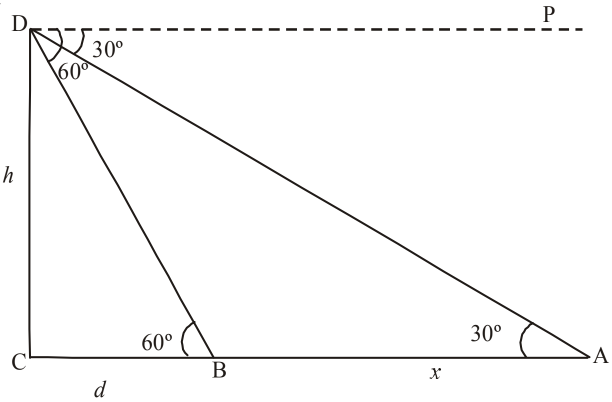
కారు ప్రయాణించాల్సిన మిగిలిన దూరం $BC = d$ మీటర్లు

$AC = AB + BC = (x + d)$ మీటర్లు

$\angle PDA = \angle DAP = 30^\circ$ (ఎందుకు ?)

$\angle PDB = \angle DBP = 60^\circ$ (ఎందుకు?)

ΔBCD నుండి



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \qquad ...(1)$$

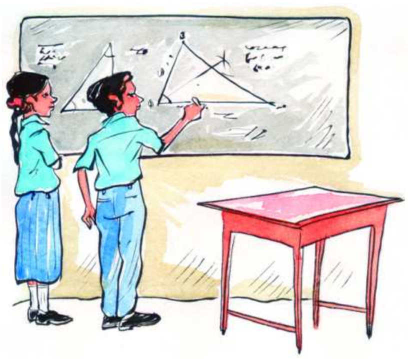
ΔACD నుండి

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$$

(1) & (2) నుండి



$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$

'x' మీటర్ల దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టు కాలం = 6 సెకండ్లు

'd' = $\frac{x}{2}$ మీటర్లు దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టు కాలం = 3 సెకండ్లు.

అభ్యాసం - 12.2

1. ఒక TV టవర్ ఒక రోడ్డు ప్రక్కన నిటారుగా నిలబెట్ట బడి ఉంది. రోడ్డుకు అవతలి వైపు నుండి టవర్ పై కొనను పరిశీలించిన 60^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఇంకా టవర్ పాదం మరియు ఈ స్థానాన్ని కలిపే సరళరేఖపై 10 మీటర్ల దూరం జరిగిన పిదప టవర్ పై కొన 30° ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తును మరియు రోడ్డు వెడల్పును కనుగొనండి.

2. 1.5 మీటర్లు ఎత్తుగల ఒక బాలుడు 30 మీటర్ల ఎత్తు గల గుడిపై కొనను కొంతదూరము నుండి పరిశీలిస్తున్నాడు. అతడు ఉన్న చోటు నుండి ముందుకు నడిచిన గుడి గోపురం కొన అతని కంటితో చేయు కోణం 30^o నుండి 60^o లకు మారింది. అతడు నడిచిన దూరం ఎంత ?

3. ఒక విగ్రహం 2మీటర్ల ఎత్తుగల పీఠం పై నిలబెట్టబడి ఉంది. దానిని కొంత దూరం నుండి పరిశీలించిన విగ్రహంపై భాగం 60^o మరియు పీఠంపై భాగం 45^o ఊర్ధ్వకోణాలు చేస్తున్నాయి. విగ్రహం ఎత్తు ఎంత?

4. ఒక భవనం పై నుండి ఒక సెల్ టవర్ పై భాగాన్ని పరిశీలించిన 60^oఊర్ధ్వకోణం, దాని పాదము 45^o. నిమ్నకోణం చేస్తుంది. భవనం నుండి టవర్‌కు గల మధ్యదూరం 7మీటర్లు అయిన టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.

5. భూమితో 30^0ల ఊర్ధ్వకోణం చేస్తూ 18 మీటర్ల పొడవున్న ఒక ధృడమైన లోహపు తీగ ఆధారంగా ఒక విద్యుత్ స్థంభం నిలబెట్టబడి ఉంది. తీగపొడవు చాలా ఎక్కువ ఉన్న కారణంగా తీగలో కొంత భాగం కత్తిరించి, మిగిలిన దానిని భూమితో 60^o కోణం చేస్తూ అమర్చబడింది. తీగలో కత్తిరించగా మిగిలిన తీగపొడవు ఎంత?

6. ఒక టవర్ అడుగుభాగం నుండి భవనం పై భాగం 30^o ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. భవనం అడుగుభాగం నుండి టవర్‌పై భాగం 60^o ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తు 30 మీటర్లు అయిన, భవనం ఎత్తు కనుగొనుము?

7. 120 అడుగుల వెడల్పైన రోడ్డుకు ఇరువైపుల సమాన ఎత్తు కలిగిన రెండు స్థంభాలు నిలబెట్టబడి ఉన్నాయి. వాటి మధ్యలో ఉన్న రోడ్డుపై ఒక బిందువు నుండి వాటిపై భాగాలను పరిశీలించిన అవి 60^o మరియు 30^o ఊర్ధ్వకోణాలు చేస్తున్నాయి. అయిన ఆ స్థంభాల ఎత్తు కనుగొనుము మరియు ప్రతిస్తంభము అడుగుభాగం నుండి బిందువుకు గల దూరమును కనుగొనుము?

8. టవర్‌తో ఒకే సరళరేఖపై ఉండే 4 మీటర్లు మరియు 9 మీటర్ల దూరంలో నున్న రెండు బిందువుల నుండి టవర్‌కొనను పరిశీలించిన చేసే ఊర్ధ్వకోణాలు పూరకాలు. టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.

9. భూమిపై నున్న A బిందువు నుండి ఒక జెట్ విమానాన్ని పరిశీలిస్తే 60^o ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. 15 సెకన్ల తర్వాత దాని ఊర్ధ్వకోణం 30^o మారుతుంది. ఆ జెట్ విమానం $1500\sqrt{3}$ మీటర్ల స్థిర ఎత్తులో ఎగురుతూ ఉంటే దాని వేగాన్ని కనుక్కోండి. $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$

10. 'h' మీటర్లు ఎత్తు గల PQ టవరుకు కొంతదూరంలో గల బిందువు A నుండి చింకి టవరు పై భాగాన్ని కొంత ఊర్ధ్వకోణములో పరిశీలించింది. బిందువు A నుండి "d" దూరం టవరు వైపు నడిస్తే ఆ ఊర్ధ్వకోణం రెట్టింపయింది. ఆస్థానం నుండి ఇంకా టవరు వైపు $\frac{3d}{4}$ నడిచిన తర్వాత స్థానం A వద్ద ఊర్ధ్వకోణానికి 3 రెట్ల ఊర్ధ్వకోణంలో టవరు పై భాగం కనిపించింది. అయితే $36h^2 = 35d^2$ అని చూపుము.

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[పరీక్షలకొరకు నిర్దేశించబడినది కాదు]

1. 1.2 మీటర్లు ఎత్తు గల బాలిక ఆకాశంలో క్షితిజ సమాంతరంగా, 88.2 మీటర్ల ఎత్తుతోపాటు గాలిలో ప్రయాణిస్తున్న బెలూనును 60^o ఊర్ధ్వకోణంలో గమనించింది. కొంతకాలం తర్వాత ఆ ఊర్ధ్వకోణం 30^0 గా మారింది. ఈ మధ్యకాలంలో బెలూను ప్రయాణించిన దూరం ఎంత ?

2. ఒక భవన పాదం నుండి ఎదురుగా నున్న టవరుపై భాగం 30^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవరు పాదం నుండి భవన పైభాగం 60^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. వాటి ఎత్తులు ఏ నిష్పత్తిలో ఉంటాయి?

3. A, B మరియు C అను మూడు పడవలు ఒకే సరళరేఖలో ప్రయాణిస్తూ లైట్‌హౌస్ వైపు వస్తున్నవి. ఆ పడవలలో నుండి లైట్‌హౌస్ పై భాగాన్ని గమనించిన వరుసగా అవి a, 2a మరియు 3a ఊర్ధ్వకోణాలను చేస్తున్నవి. A మరియు B పడవల మధ్య దూరం x అయిన ఆ లైట్‌హౌస్ ఎత్తు ఎంత?

4. ఒక దీర్ఘ ఘనాకారంలో ఉన్న గూడు లోపలి భాగంలో పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి $1:\sqrt{2}:1$ ఆ గూటిలో పట్టు అతిపెద్ద కఱ్ఱ, దాని భూమితో చేయు కోణం ఎంత?

5. ఒక గోళాకార లోహపు బంతి ఘనపరిమాణం 232848 సెం.మీ^{3}. దానిని కరిగించి 120^0లు శీర్షకోణము చేయు శంఖువు ఆకారంలో పోతపోశారు. అయిన దాని భూవ్యాసార్థం, ఎత్తులను కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

మనం అధ్యాయంలో ఇంతవరకు కింది అంశాలను తెలుసుకొన్నాం.

1. (i) ఒక వస్తువుపై ఒక బిందువు నుండి పరిశీలకుని కంటిని కలిపే సరళరేఖను దృష్టిరేఖ అంటారు.

   (ii) క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టిరేఖపై ఉన్నపుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని ఊర్ధ్వకోణం అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తలపైకెత్త బడుతుంది.

   (iii) క్షితిజ సమాంతర రేఖకు దృష్టి రేఖ క్రింద ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని నిమ్నకోణం అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తల క్రింద వైపుకు చూస్తుంది.

2. ఒక వస్తువు యొక్క పొడవు గాని, ఎత్తును గాని కనుగొనడానికి, రెండు వస్తువుల మధ్య దూరాన్ని లెక్కించడానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను వాడుతూ ఉంటాం.

అధ్యాయము

13 సంభావ్యత

(Probability)

13.1 పరిచయం

కుమార్, సుధలు క్యారమ్స్ ఆట గురించి ఈ విధంగా చర్చిస్తున్నారు.

కుమార్ : ఈ ఆటలో మనం గెలుస్తామని నీవు అనుకుంటున్నావా?

సుధ : గెలుపునకు 50 శాతం అవకాశాలున్నాయి. బహుశా మనం గెలవవచ్చు.

కుమార్ : 50 శాతం అవకాశాలని నీవు ఎట్లా చెప్పగలవు ?

ఈ సంభాషణతో సుధ మాటలు ఎంతవరకు సత్యము అనుకుంటున్నారు?

ఆమె గెలవడానికి 50 శాతం అవకాశాలు ఉన్నాయా ?

ఈ అధ్యాయంలో మనం ఇటువంటి సందర్భాల గురించి చర్చిద్దాం. ఇంకనూ 'బహుశా' 'సంభవము' 'సాధ్యము' మొదలగు పదాల గురించి, వానిని ఎట్లు గణించాలి అను దాని గురించి చర్చిద్దాము. 9వ తరగతిలో పూర్తి సంభవము లేక ఖచ్చిత ఘటనము మరియు పూర్తి అసంభవము లేక అసంభవ సంఘటనల గురించి తెలుసుకున్నాము. ఇంకా ఒక ఘటన యొక్క అవకాశముల గురించి, ఒక ఘటన యొక్క పర్యవసానము ఎల్లప్పుడు ఒకే విధంగా ఉండనవసరం లేదు. అనుదాని గురించి చర్చించి యున్నాము. ప్రస్తుతం ఒక ఘటన సంభవము యొక్క ప్రమాణీకరము గురించి నేర్చుకొందాము.

ఈ విధంగా ప్రమాణీకరణమును సంఖ్యాత్మకంగా తెలుపుటను 'సంభావ్యత' అంటారు.

13.1.1 సంభావ్యత అనగా నేమి?

ఒక ప్రయోగాన్ని గమనించండి. ఒక నాణెమును 1000 సార్లు ఎగురవేసినపుడు 455 సార్లు బొమ్మ, 445 సార్లు బొరుసు పడినది. బొమ్మపడే సంభవాన్ని ప్రమాణీకరణము చేస్తే 1000 కి 455 సార్లు అనగా $\frac{455}{1000} = 0.455$.

ఇట్లు ప్రయోగపూర్వక ఫలితాలను ఆధారం చేసుకొని లెక్కించిన సంభావ్యతను 'ప్రయోగిక సంభావ్యత' (Experimental probability) అంటారు. ఈ ప్రయోగిక సంభావ్యత అంచనాకు ఒక ప్రయోగము దాని ఫలితాలు ఆధారము, అనగా ఇదే ప్రయోగాన్ని మరలా 1000 సార్లు చేసినప్పుడు ఇదే సంభావ్యత ఏర్పడుతుందని చెప్పలేము. స్వల్ప బేధము ఏర్పడవచ్చును.

ఇదేవిధంగా నాణెమును ఎగురవేసి బొమ్మ పడే సంభావ్యతను అంచనా వేసే ప్రయోగాన్ని ప్రపంచము నలుమూలలనుంచి ఎందరో వ్యక్తులు చేసి ఉన్నారు.

ఉదాహరణకు పద్దెనిమిదవ శతాబ్దంలో ఫ్రెంచి శాస్త్రవేత్త కామ్టే డి.బఫన్ నాణెమును 4040 సార్లు ఎగురవేసి 2048 బొమ్మబడినట్లుగా లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత = $\frac{2048}{4040} \simeq 0.507$ (సుమారు).

బ్రిటన్ శాస్త్రవేత్త J.E. కెరిచ్ నాణెమును 10,000 సార్లు ఎగురవేసి 5067 సార్లు బొమ్మ పడినట్లుగా లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత = $\frac{5067}{10000} \simeq 0.5067$ అట్లే సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు కారల్ పియర్సన్ 24000 సార్లు ఎగురవేసి 12012 సార్లు బొమ్మ పడినట్లు లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత. $\frac{12012}{24000} = 0.5005$.

మనమిప్పుడు ఇదే ప్రయోగాన్ని 10 లక్షలసార్లో లేక కోటిసార్లో చేసి బొమ్మపడే సంభావ్యతను లెక్కించవలసి వస్తే, పై ప్రయోగాలన్నింటి యొక్క పర్యవసానముగా బొమ్మకానీ, బొరుసు కానీ పడే సంభావ్యత సంఖ్యాత్మకంగా 0.5 లేక $\frac{1}{2}$ అని చెప్పవచ్చు. అంటే ప్రయోగం చేయకుండానే అన్ని పర్యవసానములను బట్టి ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యతను అంచనా వేయవచ్చును. దీనినే 'సైద్ధాంతిక సంభావ్యత' (Theoretical probability) లేక 'సాంప్రదాయక సంభావ్యత' (Classical probability) అంటారు.

ఈ సిద్ధాంతమును ఆధారంగా చేసికొని కొన్ని ప్రాథమిక సమస్యల సాధన గురించి చర్చిద్దాము.

13.2 సంభావ్యత - సైద్ధాంతిక వివరణ

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో నిష్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట అను సందర్భమును గమనించండి. ఇచ్చట నాణెము సౌష్టవంగా ఉన్నప్పుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పడే సంభవములలో ఏది ఎక్కువ. ఏది తక్కువ అనుటకు అవకాశము లేదు. అందువల్ల నాణెమును నిష్పాక్షికము అని, ఎగురవేయుటను 'యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము' అని అంటారు. బొమ్మ, బొరుసులను 'సమసంభవ ఘటనలు' (equally likely events) అంటారు.

ఈ పాఠ్యాంశములో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వెలువడు ఫలితములు సమసంభవమైనవి గాను మరియు ప్రతి రూప ఆవరణ పరిమితమైనది గాను పరిగణించబడ్డాయి. కనుక నాణెములు లేక పాచికలను తీసుకొన్నప్పుడు అవి నిష్పాక్షికమైనవిగా పరిగణించాలి.

ఒక ఘటన (E) యొక్క ప్రయోగిక సంభావ్యత P(E) ను లెక్కించుటకు

సూత్రం $P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసాన్నల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసాన్నల సంఖ్య}}$

ఇవి చేయండి

అ. క్రింది ఘటనలలో దేని పర్యవసానములన్నీ సమసంభావాలు?

1. పాచిక (dies)ను ఎగురవేసినపుడు 1, 2, 3, 4, 5 లేక 6 పడుట.
2. 5 ఎరుపు, 4 నీలం, 1 నలుపు బంతులు గల సంచి నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీయుట.
3. కారమ్స్ ఆటను గెలుచుట.
4. రెండంకెల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 లేక 9 అగుట.
5. 10 ఎరుపు, 10 నీలం, 10 నలుపు రంగు బంతులు గల సంచి నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీయుట
6. జూలై నెలలో ఒక రోజు వర్షం రావడం

ఆ. పై అన్ని ఘటనల యొక్క పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవాలేనా?

ఇ. పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవాలైన 5 ఘటనలను, సమసంభవాలు కాని 5 ఘటనలను పేర్కొనండి.

కృత్యం

(i) ఒక నాణెమును 50 సార్లు, 100 సార్లు, 150 సార్లు ఎగురవేసి, సంభవమైన బొమ్మ, బొరుసు సంఖ్యలను లెక్కించండి. క్రింది పట్టికలో పూరించండి.

క్రమ సంఖ్య	ప్రయోగాల సంఖ్య	బొమ్మ పడినసంఖ్య	బొమ్మపడుట సంభావ్యత	బొరుసు పడిన సంఖ్య	బొరుసుపడుట సంభావ్యత
1.	50				
2.	100				
3.	150				

పై ప్రయోగము నుండి మీరేమి గమనించారు? ప్రయోగంలోని ప్రయత్నాల సంఖ్య పెరిగే కొద్ది బొమ్మ లేక బొరుసు పడే సంభావ్యత 50% అనగా $\frac{1}{2}$ కు దగ్గరగా అవుతున్నది కదా. ప్రయత్నాలసంఖ్య అపరిమితంగా చేయగల అన్ని ప్రయోగాల విషయంలో ఇటువంటి సంభావ్యతను లెక్కించవచ్చును.

సంభావ్యత – మాదిరి ప్రయోగము

నాణెం ఎగురవేయుటలోను లేక పాచిక దొర్లించడంలోను ప్రయత్నాల సంఖ్య అపరిమితంగా చేయగలిగినప్పటికి, అన్ని ఘటనలవిషయంలో ప్రయాత్నాలకు కొన్ని అవధులు, సాధ్యాసాధ్యములు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు ఒక కృత్రిమ ఉపగ్రహమును అంతరిక్షంలోనికి పంపడం యొక్క ప్రయోగిక సంభావ్యత

కనుగొనడానికి, భూకంపము తాకిడికి పలు అంతస్తులు గల భవనం కూలిపోకుండా ఉండే సంభావ్యత కనుగొనడానికి పలు ప్రయత్నాలను మనం చేయలేము. ఫలితాల నుండి ప్రయోగిక సంభావ్యతను లెక్కించలేము కదా! అందువల్ల అటువంటి మాదిరి సంఘటనలను కృత్రిమంగా చేసి లేక ఊహించి ఏర్పడే వివిధ సమ సంభవ పర్యవసానాలను పరిగణించి సంభావ్యతను అంచనావేస్తారు. అటువంటి మాదిరి ప్రయోగాల విశ్వసనీయత ఆ ప్రయోగం చేయుటలో తీసుకొన్న జాగ్రత్తలు, అంచనాలు మరియు పర్యవసానాలపై ఆధారపడి యుంటుంది. వాతావరణ హెచ్చరికలు, జనాభా విస్తరణ, భూకంపముల గురించి ముందు హెచ్చరికలు, పంటల దిగుబడి మొదలగునవి అన్నింటిని మాదిరి సంఘటనలు ఊహించి పర్యావసానాలను అంచనా వేయడం ద్వారా చెబుతారు.

నాణెమును ఎగుర వేయుట, పాచికను దొర్లించుట వంటి ఉదాహరణలలో చర్చించినట్లుగా "సమసంభవ పర్యవసానములు" అను ఊహ ఆధారంగా సంభావ్యత యొక్క నిర్వచనము క్రింది విధంగా ఇవ్వబడింది.

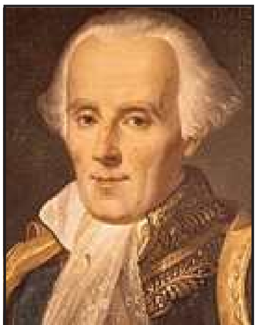
T అనే ఘటన యొక్క సైద్ధాంతిక (లేక సాంప్రదాయక) సంభావ్యతని P(T)అని వ్రాస్తాం.

అనగా $$P(T) = \frac{\text{ఘటన T కు అనుకూల పర్యవసానముల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగంలో సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానముల సంఖ్య}}$$ అని నిర్వచిస్తాం.

ఇచ్చట అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములుగా పరిగణించాలి. సాధారణంగా 'సైద్ధాంతిక సంభావ్యత'ను 'సంభావ్యత' అని వ్యవహరిస్తాము.

సంభావ్యతను మొట్టమొదటిసారిగా 1795లో పియర్ సిమ్సన్ లాప్లేస్ నిర్వచించినాడు.

16వ శతాబ్దములో జె.కార్డన్ అను ఇటలీకి చెందిన భౌతిక శాస్త్రవేత్త, గణితజ్ఞుడు 'The Book on Games of Chance' పుస్తకాన్ని వ్రాయుటతో సంభావ్యత ఒక శాస్త్రంగా ఉద్భవించినది. జేమ్స్ బెర్నౌలి (1654 -1705), ఎ.డి.మావియర్ (1667-1754) మరియు పియర్ సిమ్సన్ లు కూడా సంభావ్యత అధ్యయనానికి, అభివృద్ధికి కృషి చేసారు. వర్తమానంలో సంభావ్యత ప్రాముఖ్యత పెరిగి జీవశాస్త్రం, జెనిటిక్స్, భౌతికశాస్త్రం, సామాజిక శాస్త్రం, ఆర్థిక శాస్త్రంలలో కూడా ప్రముఖ పాత్ర పోషించుచున్నది.


పియర్ సిమ్సన్ లాప్లేస్
(1749 – 1827)

13.3 పరస్పర వర్జిత ఘటనలు (Mutually Exclusive Events)

ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పడుతుంది కానీ రెండూ ఒకేసారి సంభవము కాదు. అదేవిధంగా ఉన్నత పాఠశాలలోని ఏ విద్యార్థిని అయినా తీసుకొంటే అతడు 6, 7, 8, 9 లేక 10 తరగతులలో ఏదో ఒక తరగతికి మాత్రమే చెంది ఉంటాడు. అనగా పరిగణించిన ఘటన ఒక పర్యవసానము అయితే మిగిలిన పర్యవసానములు అన్నీ అసంభవములే. ఇటువంటి సంఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంత కన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే, ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

13.4.1 సంభావ్యతను గణించుట

సమసంభవ ఘటనల యొక్క సంభావ్యతను ఎలా కనుగొంటాము? నాణెమును ఎగురవేయుట అనేది సమసంభవ పర్యవసానములు గల ప్రయోగముగా పరిగణిస్తాము. అనగా ప్రతిసారి రెండు సమసంభవ పర్యవసానములు ఉంటాయి. ఈ పర్యవసానముల సమూహమును 'ప్రతిరూప ఆవరణము' (sample space) అంటారు. ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు ప్రతి రూప ఆవరణము $\{H, T\}$. ఎరుపు, నీలం, పసుపు, తెలుపు బంతుల గల సంచి నుండి ఒక బంతిని తీయుటలో ప్రతిరూప ఆవరణము $\{R, B, Y, W\}$ అట్లే ఒక పాచికను దొర్లించుటలో ప్రతిరూప ఆవరణమును ఊహించగలరా?

ఇవి చేయండి

సమసంభవ పర్యవసానములు గల ఐదు సందర్భాలను పేర్కొని వాని ప్రతిరూప ఆవరణలను వ్రాయండి.

సమసంభవము మరియు పరస్పర వర్జిత ఘటనలయొక్క సంభావ్యతను ఎట్లు గమనించవచ్చునో కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. ఒక నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మపడే సంభావ్యతను, బొరుసు పడే సంభావ్యతను లెక్కించండి.

సాధన : నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు సాధ్యపడు పర్యవసానములు రెండు, బొమ్మ (H) లేక బొరుసు (T). బొమ్మ పడుట అనే ఘటన E అయితే అనుకూల పర్యవసానములు 1.

$$P(E) = P(\text{బొమ్మ}) = \frac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసాన్నల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసాన్నల సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

ఇదేవిధంగా బొరుసుపడు అనే ఘటన F అయిన

$$P(F) = P(\text{బొరుసు}) = \frac{1}{2} \text{ (ఎందుకు? చర్చించండి)}$$

ఉదాహరణ-2. ఒక సంచిలో ఒక ఎరుపు బంతి, ఒక నీలం బంతి, ఒక పసుపు రంగు బంతి ఉన్నాయి. అన్ని బంతులు ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉన్నాయి. సంచిలోనికి చూడకుండా మానస ఒక బంతిని తీస్తే ఆ బంతి (i) పసుపు రంగు బంతి (ii) ఎరుపు బంతి (iii) నీలం బంతి అవడానికి సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

సాధన : మానస చూడకుండా బంతిని తీసుకున్నది. కావున అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములు. పసుపు రంగు బంతిని తీయు ఘటన Y, నీలం బంతి తీయు ఘటన B మరియు ఎరుపు బంతి తీయు ఘటన R అయిన ప్రతి రూప ఆవరణము $\{Y, B, R\}$. పర్యవసానములు $= 3$.

(i) Y కి అనుకూల పర్యవసానములు $= 1$.

$$\therefore P(Y) = \frac{1}{3} \text{ అదేవిధంగా } P(R) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{1}{3}$$

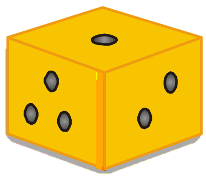
పరిశీలనలు

1. ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానము ఒక్కటి మాత్రమే అయిన దానిని ప్రాథమిక ఘటన (Elementary event) అంటారు. 1వ ఉదాహరణలో E మరియు F లు ప్రాథమిక ఘటనలు అట్లే 2వ ఉదాహరణలో Y, B, R లు కూడా ప్రాథమిక ఘటనలే.
2. ఒకటవ ఉదాహరణను గమనిస్తే : $P(E) + P(F) = 1$
   అదే విధంగా 2వ ఉదాహరణలో : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$.

   ఒక ప్రయోగంలో అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తము 1 అవుతుంది.
3. పాచికను దొర్లించుటలో 3 కన్నా తక్కువ పడు ఘటనలు కానీ, 3లేక అంతకన్నా ఎక్కువ పడు ఘటనలు కానీ ప్రాథమిక ఘటనలు కావు. కానీ రెండు నాణెములను ఎగురవేసినప్పుడు {HH}, {HT}, {TH}, {TT} లు ప్రాథమిక ఘటనలు.

ఉదాహరణ-3. ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు (i) 4 కన్నా ఎక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యత (ii) 4 లేక అంతకన్నా తక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యతను కనుగొనండి.

సాధన : (i) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు



ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

మొత్తం పర్యవసానములు $n(S) = 6$

'4 కన్నా ఎక్కువ' అను ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానాలు $E = \{5, 6\}$

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(E) = 2$

$\therefore$ ఘటన E సంభావ్యత $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) F అనే ఘటన 4 లేక అంతకన్నా తక్కువ పడుట అయిన

ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

మొత్తం పర్యవసానాలు $n(S) = 6$

Fకు అనుకూల పర్యవసానాలు $F = \{1, 2, 3, 4\}$

అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(F) = 4$

ఘటన F యొక్క సంభావ్యత $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

గమనిక : పై ఉదాహరణలోని ఘటనలు E మరియు F లు ప్రాథమిక ఘటనలా ?

కావు ఘటన Eకు పర్యవసానాలు 2, ఘటన F కు పర్యవసానాలు 4 కావున EF లు ప్రాథమిక ఘటనలు కావు.

13.4.2 పూరక ఘటనలు - సంభావ్యత (complementary events - probability)

ముందు విభాగములో ప్రాథమిక ఘటనల గురించి తెలుసుకొన్నాము. కానీ ఉదాహరణ 3 లోని ఘటనల ప్రాథమిక ఘటనలు కానప్పటికి, వాటి సంభావ్యతలను పరిశీలిస్తే

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

ఈ ఉదాహరణలో ప్రయోగంలో E, F లు మాత్రమే ఘటనలు 'F' మరియు 'E కానిది' సమానములు. 'E కానిది' అను ఘటనను $\overline{E}$ అని చూపుతాము. దీనిని ఘటన E యొక్క 'పూరక ఘటన' అంటారు.

$\therefore$ P(E) + P(E కానిది) = 1

లేక $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, దీని నుండి $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

సాధారణంగా E ఏదైనా ఒక ఘటన అయిన $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

ఇవి చేయండి

(i) బొమ్మ పడుట అనేది బొరుసు పడుటకు పూరక ఘటనా? కారణాలు తెలపండి.

(ii) పాచికతో 1 పడుట అనేది 2, 3, 4, 5, 6 పడుట అనే ఘటనలకు పూరక ఘటనయేనా ?

(iii) పరస్పరం పూరక ఘటనలయ్యే జతలకు 5 ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

13.4.3 అసాధ్యఘటన, ఖచ్చిత లేక ధృడ ఘటనలు (Impossible and Certain Events)

1, 2, 3, 4, 5, 6 అని గుర్తించి పాచికను దొర్లించామనుకొనండి.

(i) పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినపుడు 7 పడే సంభావ్యత ఎంత?

ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు 1, 2, 3, 4, 5,6 అను 6 పర్యవసానాలు మాత్రమే సంభవాలు కానీ 7 గుర్తించబడి ఉండదు కాబట్టి 7 యొక్క అనుకూల పర్యవసానములు శూన్యము.

$$\therefore \text{ P(7 పడుట)} = \frac{0}{6} = 0$$

అనగా 7 పడుట అసంభవము. ఇటువంటి ఘటననే "అసాధ్యఘటన" అంటారు.

(ii) పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినపుడు 6 లేక 6 కన్నా తక్కువపడే సంభావ్యత ఎంత?

పాచికను ఒకవైపు 6 మరియు మిగిలిన వైపులు 6 కన్నా తక్కువ 1, 2, 3, 4, 5 లు గుర్తింపబడి ఉంటాయి. కనుక పాచికను దొర్లించినపుడు 6 కానీ, 6 కన్నా తక్కువ కానీ పడుతుంది. అనగా అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య, మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్యలు సమానం.

$\therefore$ P(E) = P(6 లేక 6 కన్నా తక్కువ పడుట) = $\frac{6}{6} = 1$

ఘటన సంభవము ఖచ్చితము మరియు సంభావ్యత 1. ఇటువంటి ఘటనలనే ఖచ్చిత లేక దృఢఘటనలు అంటారు.

గమనిక: పై ఉదాహరణలన్నింటి నుండి సంభావ్యత నిర్వచనం $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ లోని లవము ఎల్లప్పుడు హారము కన్నా తక్కువ లేక సమానము అని తెలియుచున్నది కావున $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక పాప వద్దగల పాచిక ముఖాలపై A, B, C, D, E, F అని ముద్రించబడి యున్నది. ఆ పాచికను దొర్లించినపుడు (i) A? (ii) D పడే సంభావ్యతలను లెక్కించండి?
2. క్రింది వానిలో ఏవి ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యతను సూచించలేవు ?

   (a) 2.3 (b) –1.5 (c) 15% (D) 0.7

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి

1. ఏదైనా ఆటలో ఏ జట్టువారు మొదటి బంతిని తీసుకోవాలో నిర్ణయించడానికి నాణెమును వేయడమే నిష్పాక్షికం అంటారెందుకు ?
2. ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత $\frac{7}{2}$ ఉంటుందా? వివరించండి.
3. క్రింది వాటిలో ఏయే వాదనలు సత్యములు ?

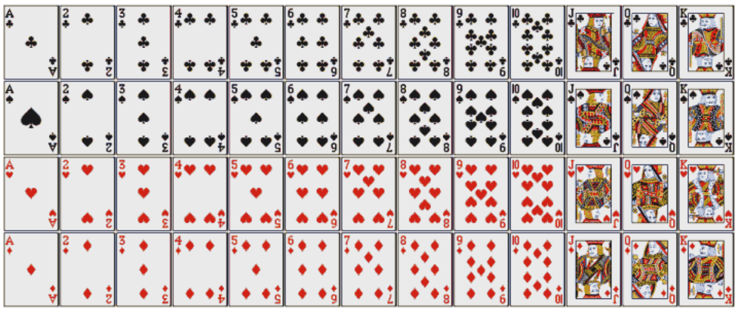
   i) రెండు నాణెములు ఎగురవేసినప్పుడు 3 పర్యవసానాలు ఉంటాయి. రెండు బొమ్మలు, రెండు బొరుసులు, ఒక్కటి బొమ్మ మరొకటి బొరుసు. కనుక ఒక్కొక్క పర్యవసానము యొక్క సంభావ్యత $\frac{1}{3}$.

   ii) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు పడేది సరిసంఖ్య లేక బేసి సంఖ్య. కావున బేసి సంఖ్య పడే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$.

13.5 పేక ముక్కలు కార్డులు – సంభావ్యత (Playing Cards - Probability)

మీరు ఎప్పుడైనా పేక ముక్కలను చూచారా? ఒక కట్టలో 52 కార్డులు ఉంటాయి. వాటిలో ఒక్కొక్కటి 13 కార్డులు గల 4 విభాగాలు ఉంటాయి. ఆ విభాగాల గుర్తులు నలుపు స్పేడ్‌లు (♠), ఎరుపు హృదయం గుర్తులు (♥), ఎరుపు డైమండులు (♦) మరియు నలుపు కళావరులు (♣).

మరలా ఒక్కొక్క విభాగంలో ఏస్, రాజు, రాణి, జాకీ 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 గుర్తించబడిన 13 కార్డులు ఉంటాయి. రాజు, రాణి, జాక్ కార్డులను ముఖకార్డులంటారు. ఒక కట్టలోని అన్ని కార్డులు, కొన్ని కార్డులు లేక రెండు కట్టలను ఉపయోగించి రకరకాల ఆటలను ఆడుతారు. ఈ కార్డులను పంచుటలో, ఎదుటివారి వద్ద ఉన్న కార్డులను ఊహించుటలో, గెలుచుటకు ఎత్తులు వేయుటలో సంభావ్యత ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.



ఉదాహరణ-4. బాగుగా కలుపబడిన పేకాట కార్డుల కట్టలో 52 కార్డుల నుండి ఒక్క కార్డు తీయుటలో అది (i) ఏస్ అగుటకు (ii) ఏస్ కాక పోవుటకు సంభావ్యతలను లెక్కించండి.

సాధన : కార్డులు బాగుగా కలుపబడ్డాయి. కావున పర్యవసానాలన్నీ సమసంభవములుగా పరిగణించాలి.

(i) ఒక కట్టలో 4 ఏస్‌లు ఉంటాయి.

తీసుకొన్న కార్డు ఏస్ అవడం అనే ఘటన E అయితే

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 4

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 (ఎట్లో ఊహించగలరా ?)

$\therefore$ కార్డు ఏస్ అగుటకు సంభావ్యత, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) తీసుకున్న కార్డు ఏస్ కాదు అనే ఘటన F అయితే

F కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 - 4 = 48 (ఎందుకు?)

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52

$\therefore$ కార్డు ఏస్ కాకపోవుటకు సంభావ్యత $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి : ఘటన F అనగా E కానిది ($\overline{E}$) కావున పూరక ఘటనలను ఉపయోగించి F యొక్క సంభావ్యత కనుగొనవచ్చు.

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

ప్రయత్నించండి

మీ దగ్గర ఒక కట్ట పేకాట కార్డులు బాగుగా కలుపబడి ఉన్నాయి అనుకొనండి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికముగా తీసిన కార్డు

1. రాణి అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

2. ముఖ కార్డు అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?
3. స్పేడ్ అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?
4. స్పేడ్, ముఖ కార్డు అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?
5. ముఖకార్డు కాకపోవుటకు సంభావ్యత ఎంత?

13.6 సంభావ్యత యొక్క ఉపయోగాలు

సంభావ్యత ఉపయోగపడే మరికొన్ని సందర్భాలను పరిశీలిద్దాం. ఆటల పోటీలలో కొన్ని దేశాలు చాలా బలమైనవి, కొన్ని అంత బలమైనవి కాదు కదా? ఒక ఆటలోని ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు సమానంగా ఆడగలరని చెప్పలేము. ఒక ఆటగాడు లేక జట్టు గెలిచే సంభావ్యత ఖచ్చితంగా రెండవ ఆటగాడు లేక జట్టు యొక్క సంభావ్యత కన్నా ఎక్కువ. మన బంధువులు, స్నేహితుల పుట్టిన రోజులు ఒకే రోజు వస్తాయి. ఇలా రావడం సాధారణమా, యాదృచ్ఛికమా? అవకాశాలెంత ఉంటాయి? మొదలగు ప్రశ్నలకు జవాబులకు, ప్రమాణీకరణ చేయడానికి సాంప్రదాయక సంభావ్యత ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ-5. సంగీత, రేష్మాలు టెన్నీస్ ఆటను ఆడుతున్నారు. సంగీత గెలిచే సంభావ్యత 0.62 అయినప్పుడు రేష్మ గెలిచే సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : సంగీత, రేష్మాలు ఆటను గెలిచే ఘటనలను S, R లు సూచిస్తున్నాయి అనుకొనుము.

సంగీత గెలిచే సంభావ్యత $= P(S) = 0.62$ (దత్తాంశం)

పూరక సంభావ్యతలను అనుసరించి
రేష్మ గెలిచే సంభావ్యత $= P(R) = 1 - P(S)$

$= 1 - 0.62 = 0.38$

ఉదాహరణ-6. శారద, హమీద మంచి స్నేహితులు. వారిద్దరి పుట్టిన రోజు పండుగలు సంవత్సరంలో (లీపు సంవత్సరం కాదు) (i) వేరువేరు రోజు రావడానికి ? (ii) ఒకే రోజు రావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

సాధన : సంవత్సరంలో 365 రోజులలో ఇద్దరిలో ఎవరి పుట్టినరోజు అయినా ఏరోజు అయినా రావచ్చును. కావున మొత్తం 365 పర్యవసానాలు సమసంభవములని పరిగణించాలి.

(i) శారదా, రేష్మల పుట్టిన రోజులు వేరువేరు రోజులు అవడానికి అనుకూల పర్యవసానాలు = 365 - 1 = 364

$\therefore$ P (వేరు వేరు పుట్టిన రోజులు) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(ఒకే రోజు పుట్టిన రోజు) = 1 - P (వేరు వేరు పుట్టిన రోజులు)

$$= 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$$

ఉదాహరణ-7. 40 మంది విద్యార్థులు కల తరగతిలో 25 మంది బాలికలు, 15 మంది బాలురు ఉన్నారు. తరగతి ప్రతినిధిని నియమించడానికై, వారి ఉపాధ్యాయురాలు అందరి పేర్లను విడివిడి కార్డులపై వ్రాసి, ఒక పెట్టెలో వేసి, బాగా కలిపి, ఒక కార్డును తీసారు. ఆ కార్డుపై పేరు (i) అమ్మాయి లేక (ii) అబ్బాయిది కావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

సాధన : కార్డులన్నీ సమానం అయితే 40 మందిలో ఎవరి పేరు కార్డు అయినా రావచ్చును.

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య 40

(i) తీసిన కార్డుపై అమ్మాయి పేరు ఉండడానికి అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 25

$\therefore$ P (అమ్మాయి పేరుగల కార్డు) = P(అమ్మాయి) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) తీసిన కార్డుపై అబ్బాయి పేరు ఉండడానికి అనుకూల పర్యవసానాలు = 15

$\therefore$ P(అబ్బాయి పేరు గల కార్డు) = P(అబ్బాయి) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

లేదా P(అబ్బాయి) = 1 - P(అబ్బాయికానిది)

= 1 - P(అమ్మాయి) $= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

అభ్యాసము - 13.1

1. క్రింది ప్రవచనాలను పూరించండి.

(i) ఘటన E యొక్క సంభావ్యత + ఘటన 'Eకాదు' సంభావ్యత = ______________

(ii) ఎల్లప్పుడు సాధ్యపడని ఘటన యొక్క సంభావ్యత __________ .
దానిని __________ ఘటన అంటారు.

(iii) ఖచ్చితంగా సంభవించే ఘటన యొక్క సంభావ్యత __________.
దానిని______ ఘటన అంటారు.

(iv) ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తము __________

(v) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎల్లప్పుడు __________ కన్నా ఎక్కువ లేక సమానము మరియు ________ కన్నా తక్కువ లేక సమానము గా ఉంటుంది.

2. క్రింది ప్రయోగాలలో దేని పర్యవసానములు సమసంభవములు ? వివరించండి.

(i) స్టార్టు చేయబోయిన కారు స్టార్టు అవుతుంది లేక కాదు.

(ii) ఒక ఆటగాడు బాస్కెట్ బాల్‌ను కొట్టబోతే, అది తగులుతుంది, లేక తగలదు

(iii) తప్పు-ఒప్పు ప్రశ్నకు సమాధానము వ్రాసినప్పుడు అది సరికావచ్చు, కాకపోవచ్చు.

(iv) పుట్టిన పసిపాప అబ్బాయి లేక అమ్మాయి కావచ్చు.

3. P(E) = 0.05 అయిన 'E కాదు' యొక్క సంభావ్యత ఎంత?
4. ఒక సంచిలో నిమ్మవాసన గల చాకొలేట్‌లు ఉన్నాయి. మాలిని చూడకుండా సంచినుండి ఒక చాకొలేట్ తీస్తే అది (i) నారింజవాసన గలది అవడానికి (ii) నిమ్మ వాసనగలది అవడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.
5. రహీమ్ ఒక పేకాట కార్డుల కట్టలోని అన్ని హృదయపు గుర్తు గల కార్డులను తొలగించాడు. ఇప్పుడు
   i. ఒక కార్డును ఎన్నుకొంటే అది ఏస్ అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?
   ii. డైమండును ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత?
   iii. హృదయం గుర్తు లేని కార్డు ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత ?
   iv. హృదయం గుర్తు గల ఏస్‌ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత?
6. ముగ్గురు విద్యార్థులలో ఇద్దరి పుట్టిన రోజులు సంవత్సరములో ఒకేరోజు రాని సంభావ్యత 0.992 అయిన ఒకేరోజు వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?
7. ఒక పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినప్పుడు ఏర్పడు పర్యవసానములతో క్రింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

   (i) ప్రధానసంఖ్య; (ii) 2, 6ల మధ్య సంఖ్య; (iii) బేసి సంఖ్య
8. ఒక పేకముక్కల కట్ట నుండి ఎరుపు రంగు రాజును తీయు సంభావ్యత ఎంత?
9. పాచికలను, కార్డులను, పుట్టినరోజు సందర్భాలను ఉపయోగించు కొని ఐదు సమస్యలను తయారుచేసి వాటి సాధనలను గురించి మిత్రులతో ఉపాధ్యాయునితో చర్చించండి.

13.7 సంభావ్యత యొక్క మరికొన్ని అనువర్తనాలు

ఇప్పటివరకు సంభావ్యత కొరకు కొన్ని సందర్భాలను చర్చించాము. ఆ సందర్భములలోని విషయమును, సంభావ్యతను గణించుటలో పాటించిన వివిధ పద్ధతులను గమనించండి. పూరక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతున్నది. ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది. ఇప్పటి వరకు చర్చించిన ఉదాహరణలతో, అభ్యాసము సమస్యలలో ఈ విషయాలను గమనించారా ? మీ మిత్రులతో, ఉపాధ్యాయులతో చర్చించండి. మరికొన్ని ప్రత్యేక ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-8. ఒక పెట్టెలో 3నీలం, 2 తెలుపు, 4 ఎరుపు గోళీలు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా పెట్టె నుండి ఒక గోళీను తీసుకొంటే అది (i) తెలుపు (ii) నీలం (iii) ఎరుపు రంగు గోళీ అగుటకు సంభావ్యతలు గమనించండి.

సాధన : యాదృచ్ఛికంగా గోళీను తీసుకొనుట అనగా అన్ని పర్యవసనాలు సమ సంభవాలు.

$\therefore$ ప్రతి రూప ఆవరణలోని పర్యవసనాల సంఖ్య $= 3 + 2 + 4 = 9$

తెల్లని గోళీ తీయు ఘటనను W చే, నీలం గోళీ తీయు ఘటనను Bచే, ఎరుపు గోళీతీయు ఘటనను R చే గుర్తిస్తే

(i) W కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 2

$\therefore P(W) = \frac{2}{9}$

ఇదేవిధంగా, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

గమనిక $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

ఉదాహరణ-9. హర్ప్రీత్ రెండు నాణెములను (₹1 మరియు ₹2) ఒకేసారి ఎగురవేసినాడు. కనీసం ఒక బొమ్మ పడుటకు సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : బొమ్మను Hతో బొరుసును T తో సూచిస్తే, రెండు నాణెములు ఎగురవేసినప్పుడు ఏర్పడు అన్ని పర్యవసానములు (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) ఇవి అన్నీ సమసంభవాలే. ఇందు (H, H) అనగా మొదటి నాణెం (₹1) బొమ్మ, రెండవ నాణెం (₹2) బొమ్మ అని అర్థం. అట్లే (H, T) అనగా మొదటి నాణెం బొమ్మ రెండవ నాణెం బొరుసు అని అర్థం. అట్లే మిగిలిన పర్యవసానాలు.

కనీసం ఒక బొమ్మకు అనుకూల పర్యవసానాలు $E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(E) = 3$.

$P(E) = \frac{3}{4}$ [$\because$ ప్రతిరూప ఆవరణలో పర్యవసానాలు 4]

అనగా హర్ప్రీత్ కనీసం ఒక బొమ్మ పొందే సంభావ్యత $= \frac{3}{4}$

సరిచూడండి.

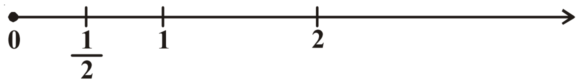
ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అన్ని సందర్భములలో ప్రతిరూప ఆవరణములోని పర్యవసానముల సంఖ్య పరిమితము.

కొన్ని ప్రయోగములలో పర్యవసానములు రెండు సంఖ్యల మధ్య అన్ని సంఖ్యలు, ఒక వృత్తం లేక దీర్ఘచతురస్రం లోని అన్ని బిందువులు అయ్యే అవకాశం ఉంది. ఇటువంటి సందర్భాలలో పర్యవసానముల సంఖ్యను లెక్కించలేము. అవి అపరిమితములు (రెండు సంఖ్యల మధ్య అపరిమిత వాస్తవ సంఖ్యలు ఉంటాయి, వృత్తం లేక దీర్ఘ చతురస్రం లోని బిందువులు అపరిమితం) సంభావ్యత యొక్క సైద్ధాంతిక నిర్వచనం, సూత్ర రూపములు ఈ సందర్భములో ఉపయోగపడవు.

అటువంటి సమస్యలను ఎట్లు గణించవచ్చునో క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ-10. (వార్షిక పరీక్షలకు కాదు) మ్యూజికల్ చైర్స్ ఆటలో, ఆట మొదలైన 2 నిమిషాల లోపు ఏదో ఒక సమయంలో పాట ఆగుతుంది, ఆటగాళ్ళు ఆగాలి. అయితే ఆట మొదలైన $\frac{1}{2}$ నిమిషంలోపు పాట ఆపు ఘటనకు సంభావ్యతను లెక్కించండి.

సాధన : పాట ఆపు సమయం యొక్క పర్యవసనాలు 0 మరియు 2 ల మధ్య గల అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు. దీనిని సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తే



$\frac{1}{2}$ నిమిషంలోపు పాట ఆగును అనుఘటనను E ని సూచిస్తే

E కు అనుకూల పర్యవసానములు అనగా సంఖ్యారేఖపై 0 , $\frac{1}{2}$ ల మధ్య గల అన్ని బిందువులు

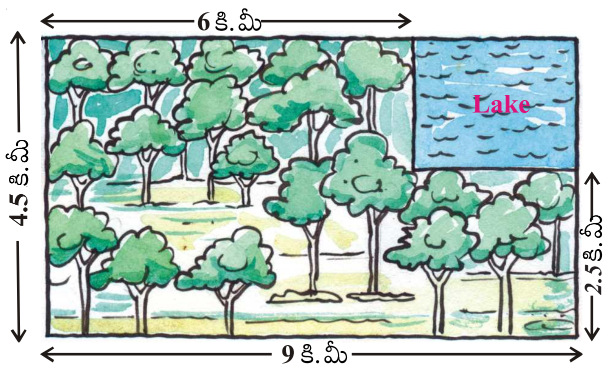
0కు, 2కు మధ్యగల దూరం 2 అయిన 0, $\frac{1}{2}$ ల మధ్యదూరం $\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ప్రయోగంలోని అన్ని పర్యవసానములన్నీ సమసంభవములు కావున మొత్తం దూరం (కాలం) 2 అని, E కు అనుకూల దూరం (కాలం) $\frac{1}{2}$ అని పరిగణించవచ్చును.

$$\therefore \ P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల దూరము}}{\text{మొత్తం దూరము}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ఇదే విధమైన మార్పును వైశాల్యము లకు కూడా విస్తరించి ఎట్లు ఉపయోగించవచ్చునో క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-11. ప్రక్క పటంలో చూపబడిన దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రాంతంలో ఒక హెలికాప్టరు కూలిపోయిందని సమాచారం వచ్చింది. అది కొలను (lake)లో కూలి పోయి ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంత?



సాధన : మొత్తం దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలములో హెలికాప్టర్ ఏ బిందువు వద్ద అయినా కూలి ఉండవచ్చును.

$\therefore$ ఘటన జరుగుటకు పూర్తి స్థల వైశాల్యము $n(S) = (4.5 \times 9)$ కి.మీ^{2} $= 40.5$ కి.మీ^{2}

ఘటన E జరుగుటకు అనుకూల ప్రాంతము $n(E) = (2 \times 3)$ కి.మీ^{2} $= 6$ కి.మీ^{2}

$\therefore$ P (హెలికాప్టరు సరస్సులో కూలుట) $= \frac{6}{40.5} = \frac{4}{27}$

ఉదాహరణ-12. ఒక పెట్టెలోని 100చొక్కాలలో 88సరిగ్గా ఉన్నవి. 8 చొక్కాలు కొద్ది లోపాలను, 4 చొక్కాలు ఎక్కువ లోపాలను కలిగి ఉన్నాయి. జానీ అనే వ్యాపారి మంచి చొక్కాలను మాత్రమే కొంటాడు. సుజాత అను మరొక వ్యాపారి ఎక్కువ లోపాలున్న చొక్కాలను మాత్రమే నిరాకరిస్తుంది (కొనదు) పెట్టెలో నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక చొక్కాను తీస్తే ఎవరు కొనే సంభావ్యత ఎంత? (i) జానీ (ii) సుజాత

సాధన : పెట్టెలోని 100 చొక్కాలలో నుండి 1 చొక్కా యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినది అనగా పర్యవసానములన్నీ సమసంభవాలు.

(i) జానీ కొనుటకు అనుకూల పర్యవసనాలు $= 88$

$$P\,(\text{జానీ చొక్కాను కొనుట}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

(ii) సుజాత చొక్కా కొనుటకు అనుకూల పర్యవసానాలు $= 88 + 8 = 96$

$$\therefore\ P\,(\text{సుజాత చొక్కాను కొనుట}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

ఉదాహరణ-13. రెండు పాచికలు, ఒకటి ఎర్రనిది, ఒకటి తెల్లనిది, ఒకేసారి దొర్లించడం జరిగింది. సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానములను పేర్కొనండి రెండు పాచికలపై కనిపించే సంఖ్యల మొత్తం . (i) 8 (ii) 13 మరియు (iii) 12 లేక 12 అంతకన్నా తక్కువ అవడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

సాధన : ఎరుపు పాచికపై 1 ఉన్నప్పుడు తెలుపు పాచికపై 1, 2, 3, 4, 5 లేక 6 ఏదయినా ఉండవచ్చును అట్లే ఎరుపు పాచికపై '2', '3', '4', '5' లేక '6' లు ఉన్నప్పుడు కూడా వివిధ పర్యవసానములు ఉంటాయి. ప్రయోగంలో సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానములు పట్టికలో క్రమ యుగ్మాలుగా చూపబడ్డాయి. ప్రతి క్రమయుగ్మంతో మొదటిది ఎరుపు పాచికపై సంఖ్య, రెండవది తెలుపు పాచికపై సంఖ్య

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

కావున ఉదాహరణకు (1, 4) , (4, 1) క్రమయుగ్మాలు సమానం కావు.

$\therefore$ మొత్తం సాధ్యపడు పర్యవసానాల సంఖ్య $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

(i) ఘటన E (రెండు సంఖ్యల మొత్తం 8) యొక్క

అనుకూల పర్యవసానాలు $= \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(E) = 5$

$$\therefore\ P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(ii) ఘటన F (రెండు సంఖ్యల మొత్తం 13) కు అనుకూల పర్యవసానాలు శూన్యము.

$$\therefore\ P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) ఘటన G (12 లేక అంతకన్నా తక్కువ)కు అన్ని పర్యవసానాలు అనుకూలములే

$$\therefore\ P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

అభ్యాసము - 13.2

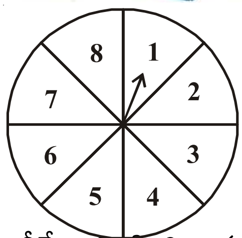
1. ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు, 5 నలుపు బంతులు కలవు. సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీస్తే అది (i) ఎరుపుదై ఉండుటకు (ii) ఎరుపుది కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

2. ఒక పెట్టెలో 5 ఎరుపు, 8 తెలుపు, 4 ఆకుపచ్చ గోళీలు కలవు. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక గోళీను తీస్తే అది (i) ఎరుపు (ii) తెలుపు (iii) ఆకుపచ్చకానిది అగుటకకు సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

3. ఒక కిడ్డి బ్యాంకు డబ్బాలో వంద 50పై నాణెములు, యాభై ₹1 నాణెములు, ఇరవై ₹2 నాణెములు, పది ₹5 నాణెములు ఉన్నాయి. డబ్బాను తలక్రిందులు చేసి నప్పుడల్లా యాదృచ్ఛికంగా ఒక్క నాణెం పడుతుంటే అది (i) 50 పై నాణెం అగుటకు, (ii) ₹5 నాణెం కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

4. గోపి అక్వేరియం నుండి ఒక చేపను కొన్నాడు. అక్వేరియంలో 5 మగ చేపలు, 8 ఆడచేపలు ఉండినప్పుడు, వ్యాపారి యాదృచ్ఛికముగా ఒక చేపను తీసి ఇచ్చి ఉ ంటే, ఆ చేప మగ చేప అవడానికి సంభావ్యత ఎంత?

5. ఒక ఆట నందు వేగంగా త్రిప్పబడిన బాణపు గుర్తు పటములో చూపబడినట్లు, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 లేక 8 ని సూచిస్తూ ఆగుతుంది. అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములైతే క్రింది ఘటనల సంభావ్యతలు లెక్కించండి. బాణపు గుర్తు సూచించేది



(i) 8 (ii) ఒక బేసిసంఖ్య

(iii) 2 కన్నా పెద్ద సంఖ్య (iv) 9 కన్నా చిన్న సంఖ్య

6. బాగుగా కలుపబడిన పేక ముక్కల (52) కట్టనుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీస్తే అది క్రింది కార్డు అగుటకు సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

(i) ఎరుపు రాజు (ii) ముఖ కార్డు (iii) ఎరుపు, ముఖ కార్డు

(iv) హృదయం గుర్తు గల జాకీ (v) స్పేడ్ (vi) డైమండుగుర్తు గల రాణి

7. పేక ముక్కలలోని డైమండు గుర్తుగల ఐదు కార్డులు; 10, రాజు, రాణి, జాకీ మరియు ఏస్‌లను మాత్రం తీసుకొని, బాగా కలిపి, యాదృచ్ఛింగా ఒక కార్డును ఎన్నుకొంటే

(i) ఆ కార్డు రాణి అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

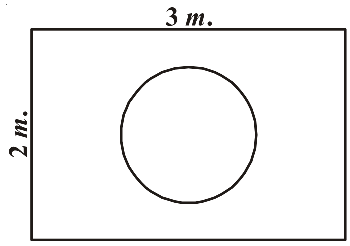
(ii) రాణి కార్డును తొలగించి రెండవ కార్డును ఎన్నుకొంటే అది (ఎ) ఏస్ అగుటకు (బి) రాణి అగుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

8. లోపాలు గల 12 పెన్నులు పొరపాటుగా 132 మంచి పెన్నులలో కలిసిపోయాయి. చూడగానే పెన్నులోని లోపాన్ని గుర్తించలేము. అయితే యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్నును ఎన్నుకొంటే అది మంచి పెన్ను అవడానికి సంభావ్యత ఎంత?

9. 20 విద్యుత్ బల్బులు కల పెట్టెలో 4బల్బులు లోపాలు కలిగి ఉన్నవి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన బల్బు లోపాలు కలిగి ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంత? ఒకవేళ అది మంచి బల్బు అయిఉండి, దానిని పెట్టెలో పెట్టకుండా రెండవ బల్బును తీసుకొంటే అది కూడా మంచిదై ఉండుటకు సంభ్యావత ఎంత?

10. ఒక పెట్టెనందు 1 నుండి 90 వరకు వ్రాయబడి ఉన్న 90 ఫలకాలు ఉన్నాయి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక ఫలకాన్ని ఎన్నుకొంటే దానిపై క్రింది సంఖ్యలు ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంతెంత? (i) రెండంకెల సంఖ్య (ii) ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య (iii) 5 చే భాగింపబడు సంఖ్య.

11. పటంలో చూపినట్లు దీర్ఘచతురస్రాకార పలకపై 1మీ వ్యాసం గల వృత్తం గీయబడి ఉన్నది. ఒక పాచికను ఈ పలకపై జారవిడిస్తే అది వృత్తంలో పడుటకు సంభావ్యత ఎంత?



12. ఒక వ్యాపారి వద్ద 144 పెన్నులు ఉన్నాయి. అందులో 20 లోపాలు కలిగి ఉన్నాయి. సుధ పెన్ను కొనడానికి వస్తే వ్యాపారి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్ను ఇస్తే దానిని (i) సుధ కొనుటకు (ii) కొనలేకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

13. ఒకేసారి రెండు పాచికలను దొర్లించి వాటిపై సంఖ్యలను కూడినచో వచ్చు (i) మొత్తాల సంభావ్యతను తెలుపు పట్టికను పూరించండి.

రెండు పాచికలపై మొత్తం (ఘటన)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{12}{36}$

(ii) ఒక విద్యార్థి ఈ ప్రయోగంలో 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 అనే 11 పర్యవసానములు ఉన్నవి కావున ఒక్కొక్క పర్యవసానము యొక్క సంభావ్యత $\frac{1}{11}$ అన్నాడు. ఈ సమాధానంతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? వివరించు.

14. ఒక రూపాయి నాణెమును 3 సార్లు ఎగురవేసి బొమ్మ, బొరుసులను పరిశీలించాలనుకొన్నారు. అవి మూడు బొమ్మలు లేక బొరుసులు అయితే హనీష్ గెలుస్తాడు. హనీష్ ఓడిపోవడానికి సంభావ్యత కనుగొనండి.

15. ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించారు. రెండు సార్లు వరుసగా (i) 5 పాచికపై కనిపించడానికి (ii) 5 పాచికపై కనిపించకపోవడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[ఇది పరీక్షలలో ఇచ్చుటకు కాదు]

1. ఇద్దరు వినియోగదారులు శ్యామ్, ఏక్తాలు ఒక అంగడిలో ఒకే వారము (మంగళవారం నుండి శనివారం వరకు) దర్శించారు. వారిద్దరు విడివిడిగా ఏరోజు అయినా దర్శించి ఉండవచ్చును. అయిన ఆ ఇద్దరు (i) ఒకే రోజు (ii) ప్రక్క ప్రక్క రోజులు (iii) వేరువేరు రోజులు అంగడిని దర్శించి ఉండడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

2. ఒక సంచిలో 5 ఎరుపు బంతులు, కొన్ని నీలం బంతులు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా నీలం బంతి తీయు సంభావ్యత, ఎరుపు బంతి తీయు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయిన ఎన్ని నీలం బంతులు కలవు ?

3. ఒక పెట్టెలో 12 బంతులు కలవు. అందు x బంతులు నల్లనివి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన బంతి నలుపుది అవడానికి సంభావ్యత ఎంత? ఇంకా 6 నలుపు బంతులు కలిపితే అప్పుడు మొత్తం నుండి నలుపు బంతి తీయు సంభావ్యత రెట్టింపు (ప్రస్తుతం కన్నా) అవుతుంది. అయిన x ఎంత?.

4. ఒక పాత్రలో 24 గోళీలు ఉన్నాయి. అందులో కొన్ని ఆకుపచ్చనివి, కొన్ని నీలం రంగువి పాత్ర నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఆకుపచ్చరంగు గోళీ తీయు సంభావ్యత $\frac{2}{3}$ అయిన నీలం గోళీ తీయు సంభావ్యత ఎంత?

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయంలోని చర్చల ద్వారా క్రింది విషయాలను అవగాహన చేసుకొన్నాము.

1. ప్రయోగిక సంభావ్యత, సైద్ధాంతిక సంభావ్యతల గురించి తెలుసుకొన్నాము.
2. ఘటన E యొక్క సైద్ధాంతిక సంభావ్యతను P(E) తో సూచిస్తాము. మరియు

   $P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసాన్నల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసాన్నల సంఖ్య}}$. ఇందు అన్ని పర్యవసానాలు సమసంభవాలని పరిగణిస్తాము.
3. ఖచ్చిత లేక ధృఢ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1.
4. అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.
5. ఘటన E యొక్క సంభావ్యత P(E) సంఖ్యాత్మకం మరియు $0 \leq P(E) \leq 1$
6. ఒకే ఒక అనుకూల పర్యవసానము గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది.
7. E ఒక ఘటన అయిన 'E కాదు' అనుఘటనను $\overline{E}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని పూరక ఘటన అంటారు.

   $P(E) + P(\overline{E}) = 1$.
8. ఈ అధ్యాయంలో క్రింది నిర్వచనాల గురించి చర్చించాము.

సమసంభవ ఘటనలు : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు సంభవించ డానికి సమాన అవకాశములు ఉంటే వాటిని సమ సంభవ ఘటనలు అంటారు.

పరస్పర వర్జిత ఘటనలు : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంత కన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలంటారు.

పూరక ఘటనలు : ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటన యొక్క అనుకూల పర్యవసానములు కాని, ప్రతిరూప ఆవరణలోని మిగిలిన అన్ని పర్యవసానములు గల ఘటనను మొదటి దాని యొక్క పూరక ఘటన అంటారు.

పూర్ణ ఘటనలు : ఒక ప్రయోగములోని అన్ని ఘటనల సమ్మేళనము ప్రతిరూప ఆవరణము అయిన, వానిని పూర్ణఘటనలు అంటారు.

ఖచ్చిత ఘటన : ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము ఖచ్చితము మరియు సంభావ్యత 1 అయిన దానిని ఖచ్చిత లేక ధృఢ ఘటన అంటారు.

అసాధ్యఘటన : ఒక ప్రయోగంలో ఒక ఘటన ఎప్పుడూ సాధ్యపడక పోతే దానిని అసాధ్య ఘటన అంటారు.

అధ్యాయము

14 సాంఖ్యకశాస్త్రం
(Statastics)

14.1 పరిచయం

గణేష్ తన తరగతిలోని 26 మంది విద్యార్థులు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం- I గణితంలో పొందిన మార్కులను క్రింది విధముగా రిజిష్టర్‌లో నమోదు చేశాడు.

అర్జున్	76	నారాయణ	12
కామిని	82	సురేష్	24
షఫీక్	64	దుర్గా	39
కేశవ్	53	శివ	41
లత	90	రహీమ్	69
రాజేందర్	27	రాధ	73
రాము	34	కార్తీక్	94
సుధ	74	జోసెఫ్	89
కృష్ణ	76	ఇక్రం	64
సోము	65	లక్ష్మి	46
గౌరీ	47	సీత	19
ఉపేంద్ర	54	రెహనా	53
రామయ్య	36	అనిత	69

పైన ఇవ్వబడిన దత్తాంశము వర్గీకృత దత్తాంశమా? కాదా? ఎందుకు?

వారి గణిత ఉపాధ్యాయుడు గణేష్‌ను తరగతిలో విద్యార్థులు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం -1, గణితంలో చూపిన ప్రతిభపై నివేదిక ఇవ్వమని కోరాడు.

తరగతి విద్యార్థులు గణితంలో చూపిన ప్రతిభను అవగాహన చేసుకోవడానికి గణేష్ ఈ క్రిందివిధంగా పట్టికను రూపొందించాడు

మార్కులు	విద్యార్థి సంఖ్య
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

ఇపుడు, పై దత్తాంశము వర్గీకృతమా? అవర్గీకృతమా?

పై పట్టికను తన ఉపాధ్యాయునికి చూపగా, ఉపాధ్యాయుడు గణేష్‌ను మెచ్చుకున్నాడు. ఈ పట్టిక సంక్షిప్తంగా సమగ్రముగా ఉన్నదని చెప్పాడు. ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు '51-75' మధ్య మార్కులు పొందినట్లుగా తెలియుచున్నది. పట్టికను రూపొందించడంలో గణేష్ తక్కువ తరగతి అంతరాన్ని ఉపయోగిస్తే బాగుంటుందని మీరు భావిస్తున్నారా? ఎందుకు?

క్రింది తరగతులలో మీరు వర్గీకృత, అవర్గీకృత దత్తాంశాల మధ్య భేదాలను గూర్చి తెలుసుకున్నారు. అదేవిధంగా ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టిక రూపంలో ప్రదర్శించే పద్ధతిని కూడ తెలుసుకున్నారు. మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క "సగటు"కనుగొనడాన్ని తెలుసుకున్నారు. ఇపుడు దీనిని మరొకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకొని వర్గీకృతదత్తాంశం యొక్క సగటు, మధ్యగతం మరియు బాహుళకములను ఎలా కనుక్కోవాలో తెలుసుకుందాం.

14.2 అవర్గీకృత దత్తాంశ సగటు

ఇవ్వబడిన రాశులు (observations)యొక్క మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచే భాగిస్తే "సగటు" వస్తుందని తెలుసుకదా! $x_1, x_2, \ldots, x_n$ రాశుల యొక్క పౌనఃపున్యాలు వరుసగా $f_1, f_2, \ldots, f_n$. అనగా x_1 అనేరాశి f_1 సార్లు. x_2 అనే రాశి f_2 సార్లు పునరావృతం అయిందని అదేవిధంగా $x_3, \ldots, x_n$ లు కూడా.

ఇపుడు, రాశుల మొత్తము $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$,

మరియు రాశుల సంఖ్య $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $(\bar{x})$

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

పై 'సగటు'ను సంక్షిప్తంగా గ్రీకు అక్షరం (సిగ్మా) '$\sum$' ($\sum$ అనగా మొత్తం) నుపయోగించి పదం సూచిస్తారో తెచ్చుకుందాము. $\bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

ఉదాహరణ-1. ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థులు గణితంలో పొందిన మార్కులు పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల సగటు కనుక్కోండి.

పొందిన మార్కులు (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

సాధన : పై దత్తాంశాన్ని క్రింద చూపిన పట్టికలో తిరిగి వ్రాయగా

పొందిన మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (fi)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
మొత్తం	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

కాబట్టి, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

$\therefore$ మార్కుల సగటు 59.3.

దైనందిన జీవితంలో చాలా సందర్భాలలో, చాలా పెద్ద పెద్ద దత్తాంశాలను సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి, అట్టి (అవర్గీకృత) దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత దత్తాంశంగా మార్చుకోవాల్సిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. అట్లు మార్చుకొని, దాని సగటును కనుగొనుటకు పద్ధతులను చర్చిద్దాము.

ఉదాహరణ-1లో ఇవ్వబడిన అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని, 'తరగతి అంతరం' 15 గా ఉండేటట్లుగా వర్గీకరించుకుందాం. ఇవి అవిభాజిత తరగతి అంతరాలు కావున పౌనఃపున్యాలను కేటాయించేటప్పుడు ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దుకి సమానమైన దత్తాంశాన్ని పొందిన విద్యార్థులను తరువాత తరగతిలో చూపించాలని గుర్తుంచుకోవాలి. ఉదాహరణకు 40 మార్కులు పొందిన నలుగురు విద్యార్థులు '25-40' తరగతిలో కాక, తరువాత తరగతి '40-55' లోకి తీసుకున్నాము. దీనిని దృష్టిలో ఉంచుకొని మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేసుకుందాం.

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

తరగతి మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక విలువ (point) మనకు అవసరం. ఒక తరగతి పౌనఃపున్యము (అనగా తరగతిలోని అన్ని రాశులు) ఆ తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ చుట్టు కేంద్రీకృతమైనట్లు భావిస్తారు. కాబట్టి ఒక తరగతి యొక్క మధ్యవిలువను ఆ తరగతి యొక్క అన్ని విలువలను ప్రాతినిధ్యంగా భావిస్తాము. దీనినే తరగతి 'మార్కు' (class mark) లేక 'మధ్య విలువ' అంటారు. ఈ తరగతి మార్కు అనేది ఆ తరగతి యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ అవధుల సరాసరి అని గుర్తుంచుకోవాలి.

$$\text{ఒక తరగతి మధ్యవిలువ} = \frac{\text{ఆ తరగతి ఎగువ అవధి + ఆ తరగతి దిగువ అవధి}}{2}$$

10 -25 అనే తరగతి యొక్క 'తరగతి మార్కు = $\frac{10+25}{2}$ =17.5. అదే విధంగా మిగిలిన తరగతుల యొక్క 'తరగతుల మార్కు'లను కనుగొనవచ్చు. ఈ తరగతి చిహ్నాలను x_i' గా సూచిస్తూ పట్టికలో పొందుపరుస్తాము. ఇపుడు, సగటు కనుగొనుటకు పై ఉదాహరణ మాదిరిగా ఉపగమిద్దాం.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థులసంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\sum f_i$=30		$\sum f_ix_i$ =1860.0

పై పట్టికలో చివరి నిలువు వరుసలలో గల విలువల మొత్తం $\sum f_ix_i$ ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $(\bar{x})$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

సగటును కనుగొనే ఈ కొత్తపద్ధతిని 'ప్రత్యక్ష పద్ధతి' అంటారు.

పై రెండు సందర్భాలలో కూడా ఒకే దత్తాంశానికి, ఒకే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సగటును కనుగొన్నపుడు ఉదా-1లో ఖచ్చిత సగటు 59.3 కాగా, 62 అనేది సరాసరి సగటుగా పరిశీలించవచ్చు. ఈ రెండు సందర్భాలలో సగటు విలువలో బేధం ఎందుకు వచ్చిందో? ఆలోచించండి?

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. వర్గీకృత మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశానికి సగటును కనుగొనవచ్చు. వీటిలో ఏది అత్యంత ఖచ్చితమైన సగటు అని నీవు భావిస్తావు? ఎందుకు?
2. దత్తాంశ విశ్లేషణకు వర్గీకృత దత్తాంశము ఎప్పుడు అనువైనది ?

కొన్ని సందర్భాలలో x_i, f_i విలువలు చాలా పెద్దగా ఉండి వాటి లబ్దాన్ని గణించడం కష్టం మరియు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. సగటు కనుగొనుటలో గణనను సులభతరం చేయుటకు 'మరొకపద్ధతిని' గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

మనము 'f_i' లను మార్చే అవకాశం లేదు కాని x_i, f_i ల లబ్ధమును సులభతరం చేయుటకు 'x_i' లను చిన్నవిలువలుగా మార్చుకోవచ్చు. కాని ఇది ఎలా చేయగలం ?

ఉదా-1 లోని దత్తాంశమునకు సగటు కనుగొనుటను ఈ క్రింది పద్ధతి ద్వారా ప్రయత్నించి చూద్దాం. మొదటిసోపానంలో x_i లలోని ఒక దాని విలువను "ఊహించిన సగటు"గా ఎన్నుకొంటాము. దీనినే 'a' చే సూచిస్తాము. గణనలను మున్ముందు మరింత సులభతరం చేయడానికి $x_1, x_2, ..., x_n$ ల మధ్య విలువ 'a' ను ఎంచుకుంటాము. కావున మనం $a = 47.5$ లేదా $a = 62.5$ ఎన్నుకోవచ్చు. ఇప్పుడు $a = 47.5$ అని ఎన్నుకొందాము.

రెండవ సోపానంలో ప్రతి x_i నుండి a యొక్క దూరము $(x_i - a)$ ను కనుగొందాము. దీనిని విచలనము d_i గా సూచిస్తాము.

i.e., $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$ ను కనుగొనుట

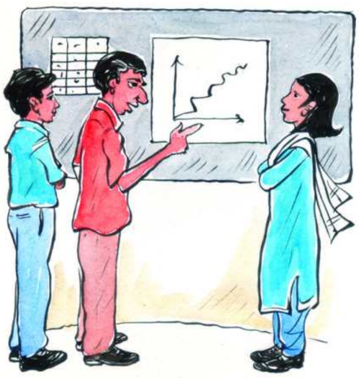
మూడవ సోపానంలో d_i మరియు వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యం (f_i) ల లబ్దాన్ని మరియు $f_i\, d_i$ ల యొక్క మొత్తాన్ని కనుగొంటాము. ఈ గణనలు క్రింది పట్టికలో చూపబడ్డాయి.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి చిహ్నం (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $x_i = a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
మొత్తం	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

పై పట్టిక నుండి విచలనాల సగటు $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ఇప్పుడు, $\bar{d}$ మరియు $\bar{x}$ ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం !

d_i ని పొందడానికి మనకు ప్రతి 'x_i' నుండి 'a' ను తీసివేసినాము. అందువల్ల సగటు ($\bar{x}$) ను పొందడానికి 'a' ను $\bar{d}$ కి కూడవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనిని గణితపరంగా క్రింది విధంగా వివరించవచ్చునైనది.



విచలనాల సగటు, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

అందువల్ల $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a$$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

పట్టికలోని a, $\sum f_i d_i$ మరియు $\sum f_i$ ల విలువలను, పై సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

$\therefore$ విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62.

పైన చర్చించబడిన విధానాన్ని "విచలన పద్ధతి"(Deviation Method) లేదా "ఊహించిన సగటు పద్ధతి"(Assumed Mean Method) అంటారు.

కృత్యము

ఉదాహరణ-1లోని దత్తాంశములోని x_i యొక్క వరుస విలువలు అనగా 17.5, 32.5, ...లను ఊహించిన సగటులుగా తీసుకొని "అంకగణిత సగటు"ను గణన చేయండి. ఇపుడు ఈ క్రింది వానిని గూర్చి చర్చించండి.

1. పై సందర్భాలలో వివిధ పద్ధతుల్లో కనుగొనబడిన అంకగణితసగటు విలువలు సమానమేనా?
2. ఒకవేళ మనం వాస్తవ సగటునే, ఊహించిన సగటుగా తీసుకుంటే అపుడు $\sum f_i d_i$ విలువ ఎంత?
3. ఒక తరగతి మధ్యవిలువ (class mark) ను "ఊహించిన సగటు" గా తీసుకోవడానికి కారణమేమిటి?

ప్రక్క పేజీలో ఇవ్వబడిన పట్టికలోని '4' వ నిలువు వరుసలోని విలువలను గమనించగా, ఆ విలువలన్నీ 15 యొక్క గుణిజాలే. అందువల్ల ఒకవేళ మనం 4వ నిలువు వరుసలోని విలువలను 15 చే భాగించగా, మనకు ఆ విలువలు చిన్న సంఖ్యలలో వస్తాయి. అపుడు ఆ విలువలను f_i తో గుణించడం సులభం (ఇక్కడ, 15 అనేది తరగతి అంతరం లేదా 4వ నిలువు వరుసలోని విలువలయొక్క గ.సా.కా.).

అందువల్ల, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ గా తీసుకుంటాము, ఇచ్చట a ఊహించిన సగటు మరియు h అనేవి తరగతి అంతరం.

పై విధంగా, u_i విలువలను వరుసగా కనుగొనాలి. (i. e., $f_i u_i$ కనుగొనాలి తరువాత $\sum f_i u_i$ విలువను కనుగొనాలి). $h = 15$ గా తీసుకొని (సాధారణంగా తరగతి పొడవును "h"గా తీసుకుంటాం. కాని h అనేది ప్రతీ సందర్భంలో తరగతి పొడవు కానవసరం లేదు).

అందువల్ల, $\bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్య విలువ (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
మొత్తం	$\sum f_i$=30			$\sum f_i u_i$=29	

ఇచ్చుట, మరలా $\bar{u}$ మరియు $\bar{x}$ మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \quad \text{మరియు}$$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \quad \text{అని మనకు తెలుసు.}$$

అందువల్ల
$$\bar{u} = \frac{\sum f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

లేదా
$$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + h\left\{\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right\}$$

లేదా $$\overline{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

పై సమీకరణంలో , $\sum f_i u_i$ మరియు $\sum f_i$ విలువలను పట్టిక నుండి తీసుకొని ప్రతిక్షేపించగా

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \frac{29}{30}$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

అందువల్ల, విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62.

పైన చర్చించబడిన పద్ధతిని "సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి" లేదా "సోపానవిచలన పద్ధతి" అంటారు.

గమనించినది :

- ఒకవేళ d_i లకు ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉంటే, సోపాన విచలన పద్ధతి అనేది వినియోగించడానికి అనుకూలమైన పద్ధతి.
- పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనబడిన సగటు విలువ ఒకటే.
- ఊహించిన సగటు పద్ధతి మరియు సోపాన – విచలన పద్ధతులు అనేవి ప్రత్యక్ష పద్ధతి యొక్క సులభతరం చేయబడిన పద్ధతులు మాత్రమే.
- ఒకవేళ a మరియు h విలువలు పైవిధంగా ఇవ్వనప్పటికినీ, శూన్యేతర సంఖ్యలు అయి $\overline{x} = a + h\overline{u}$ అనే సూత్రము వ్యవస్థితం అవుతుంది. ఎందుకనగా $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

ఈ పద్ధతులను మరికొన్ని ఉదాహరణలకు అనువర్తింపజేద్దాం.

ఉదాహరణ-2. భారతదేశములోని వివిధ రాష్ట్రాలు మరియు కేంద్రపాలిత ప్రాంతాలకు చెందిన గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళ ఉపాధ్యాయుల శాతముల వివరములు ఈ క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినాయి. పై మూడు పద్ధతులనుపయోగించి మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతాన్ని కనుక్కోండి.

మహిళా ఉపాధ్యాయులశాతం	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య	6	11	7	4	4	2	1

(*NCERT* వారు నిర్వహించిన 7వ అఖిలభారతీయ పాఠశాల విద్యా సర్వే గణాంకాల ప్రకారం)

సాధన : తరగతి మధ్యవిలువ x_i కనుగొని, దానిని పట్టికలో పొందుపరుచుదాం.

ఇచ్చట $a = 50$, $h = 10$,

అపుడు $d_i = x_i - 50$ మరియు $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$

ఇపుడు మనము d_i మరియు u_i విలువలను కనుగొని పట్టికలో పొందుపరచగా

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	రాష్ట్రాల/కేంద్ర పాలితప్రాంతాల సంఖ్య	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ $f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$	
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
మొత్తం	35				1390	-360	-36

పై పట్టిక నుండి, $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా $\quad \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

$\therefore$ గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతము = 39.71.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా సాధించబడిన ఫలితము ఒకటేనా ?
2. ఒక వేళ x_i మరియు f_i లు చాలినంత చిన్నగా ఉంటే, అపుడు ఏ పద్ధతిని ఎన్నుకోవడం అనుకూలమైనది?
3. ఒక వేళ x_i మరియు f_i ల విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినపుడు ఏ పద్ధతి సరియైన పద్ధతి?

ఒకవేళ తరగతి పొడవులు వేరువేరుగా ఉన్ననూ మరియు x_i విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినప్పటికినీ d_i ల యొక్క సామాన్య కారణాంకాన్ని h గా తీసుకొని, సంక్షిప్త విచలన పద్ధతిలో సగటు కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ-3. వన్‌డే క్రికెట్ ఆటలో బౌలర్లు సాధించిన వికెట్ల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో చూపించనైనది. సరియైన పద్ధతిని ఎంచుకొని బౌలర్లు సాధించిన సగటు వికెట్లను కనుగొనుము. ఇట్టి సగటు యొక్క ప్రాముఖ్యత ఏమిటి?

వికెట్ల సంఖ్య	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
బౌలర్ల సంఖ్య	7	5	16	12	2	3

సాధన : ఇచ్చట తరగతి పొడవులు వేరువేరుగా ఉన్నాయి, మరియు x_i విలువలు పెద్దవిగా ఉన్నాయి. అయినప్పటికీనీ సగటు కనుగొనడానికి సంక్షిప్త విచలన పద్ధతినే ఎంచుకుందాము; ఇచ్చట $a = 200$ మరియు $h = 20$.

వికెట్ల సంఖ్య	బౌలర్ల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ($h = 20$)	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
మొత్తం	45				-106

అందువల్ల $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$

$\therefore$ 45 మంది బౌలర్లు వన్‌డే క్రికెట్‌లో సాధించిన వికెట్ల సగటు = 152.89.

తరగతిగది ప్రాజెక్టు :

1. మీ పాఠశాలలో ఇటీవల నిర్వహించిన పరీక్షల్లో, గణితంలో మీ తరగతి విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల వివరాలను సేకరించండి. దీనికి వర్గీకృత పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికను తయారుచేయండి. అదేవిధంగా మిగతా విషయాలకు సంబంధించిన మార్కుల వివరాలకు కూడా పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలను తయారు చేయండి. ప్రతివిషయానికి సంబంధించిన సగటును తగు పద్ధతి ద్వారా కనుగొని, ఆ విలువలను పోల్చుము.
2. మీ పట్టణం / గ్రామంలో 30 రోజుల్లో నమోదు అయిన "గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు" వివరాలను సేకరించండి. ఇట్టి దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపండి. అదేవిధంగా ఇట్టి దత్తాంశానికి, సరియైన పద్ధతిని ఎంచుకొని సగటు కనుగొనండి.
3. మీ తరగతి లోని విద్యార్థుల యొక్క ఎత్తులను కొలిచి, అట్టి సమాచారానికి వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారుచేయుము. తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఇట్టి దత్తాంశమునకు సగటు కనుగొనుము.

అభ్యాసము - 14.1

1. ఒక గ్రామంలో కొంతమంది విద్యార్థుల జట్టు 'పర్యావరణ పరిరక్షణ–అవగాహన' అనే కార్యక్రమంలో భాగంగా, 20 ఇండ్లలో సర్వేనిర్వహించి, ఎన్నెన్ని మొక్కలు నాటినారో సమాచారాన్ని సేకరించి, ఈ క్రింది పట్టికలో నమోదు చేసినారు. సగటున ఒక ఇంటికి ఎన్నిమొక్కలు నాటినారో కనుక్కోండి.

మొక్కల సంఖ్య	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
ఇండ్ల సంఖ్య	1	2	1	5	6	2	3

2. ఒక కర్మాగారంలోని 50 మంది కార్మికుల దినసరి భత్యము ఈక్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి

దినసరిభత్యము (₹)	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
కార్మికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఆ కర్మాగారంలోని కార్మికుల సగటు భత్యమును కనుక్కోండి.

3. ఒక ఆవాసప్రాంతంలో పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చులు (pocket allowance) వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వనైనది. పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు ₹ 18 అయిన క్రింది పట్టికలో లోపించిన పౌనఃపున్యం (f)ను కనుగొనుము.

పిల్లల రోజువారి చేతిఖర్చు (₹)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

4. ఒక వైద్యశాలలో వైద్యులు 30 మంది స్త్రీలకు వైద్య పరీక్షలు నిర్వహించి, వారి యొక్క హృదయ స్పందనలను క్రింద చూపిన పట్టికలో క్రోడీకరించారు. తగు విధానాన్ని ఎంచుకొని ఇట్టి స్త్రీల యొక్క హృదయస్పదనల సరాసరి (ఒక నిమిషానికి) కనుక్కోండి.

హృదయస్పందనలసంఖ్య/నిమిషం	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
స్త్రీల సంఖ్య	2	4	3	8	7	4	2

5. పండ్ల మార్కెట్‌లో, పండ్ల వ్యాపారులు నారింజపండ్లను పెట్టెలలో ఉంచి అమ్ముతారు. ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే 'నారింజపండ్ల' సంఖ్య వేరువేరుగా ఉంటుంది. పెట్టెల్లోని నారింజపండ్ల పంపకాన్ని ఈ క్రింది పట్టికలో చూపనైనది.

నారింజపండ్ల సంఖ్య	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
పెట్టెల సంఖ్య	15	110	135	115	25

ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే నారింజపండ్ల సగటు కనుక్కోండి. సగటు కనుగొనుటకు ఏ పద్ధతిని ఎంచుకుంటారో తెల్పండి.

6. ఒక ఆవాసప్రాంతంలోని 25 కుటుంబాల సంబంధించిన దినసరి భోజన ఖర్చుల వివరాలను ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వనైనది.

దినసరిభోజనఖర్చు (₹)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
కుటుంబాల సంఖ్య	4	5	12	2	2

తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఒక్క కుటుంబానికి అయ్యే సగటు భోజన ఖర్చును కనుక్కోండి.

7. ఒక పట్టణంలోని 30 నివాసప్రాంతాలలో, గాలిలో గల SO_2 యొక్క గాఢత (in parts per million, i.e., ppm), ను ఈ క్రింది పట్టికలో క్రోడీకరించనైనది.

SO_2 యొక్క గాఢత (in ppm)	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
పౌనఃపున్యము	4	9	9	2	4	2

గాలిలో గల సగటు SO_2 గాఢతను కనుక్కోండి.

8. ఒక తరగతి ఉపాధ్యాయుడు ఒక టర్మ్‌లో తన తరగతికి చెందిన 40 మంది విద్యార్థుల హాజరు వివరాలను, ఈ క్రింది చూపిన పట్టికలో చూపనైనది. ఈ టర్మ్‌లో ఒక విద్యార్థి సగటు హాజరు ఎంత?

రోజుల సంఖ్య	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
విద్యార్థుల సంఖ్య	1	3	4	4	7	10	11

9. 35 పట్టణాలకు సంబంధించి అక్షరాస్యత రేటు (శాతములలో) ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వనైనది. సగటు అక్షరాస్యతా రేటును కనుక్కోండి.

అక్షరాస్యతరేటు (%)	45–55	55-65	65-75	75-85	85-95
పట్టణాల సంఖ్య	3	10	11	8	3

14.3 బాహుళకము (MODE)

ఇవ్వబడిన పరిశీలనల్లో లేదా రాశులలో ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయ్యే రాశిని "బాహుళకము" అంటారు.

వర్గీకృత దత్తాంశానికి "బాహుళకాన్ని" కనుగొనే విధానం నేర్చుకునే ముందుగా మనం అవర్గీకృత దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుగొను విధానాన్ని ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

ఉదాహరణ-4. 10 క్రికెట్ మ్యాచ్ లలో ఒక బౌలర్ తీసిన వికెట్లు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3. ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని' కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తాంశములోని అంకెలను (రాశులను) ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చగా అనగా 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

పై దత్తాంశంను పరిశీలించగా, ఎక్కువ మ్యాచుల్లో బౌలర్ '2' వికెట్లను తీసినట్లుగా స్పష్టంగా తెలియుచున్నది. (అనగా 3 సార్లు). అందువల్ల ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 2.

ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. బాహుళకము ఎల్లప్పుడు దత్తాంశమునకు మధ్యలో ఉంటుందా?
3. ఉదాహరణ-4లోని దత్తాంశానికి మరొక రాశిని చేర్చగా బాహుళకము మారుతుందా? వ్యాఖ్యానించండి.
4. ఒకవేళ ఉదాహరణ-4లోని రాశులలోని గరిష్ఠవిలువ '8' కి మారిన, దాని ప్రభావం, అట్టి దత్తాంశం యొక్క బాహుళకంపై ఉంటుందా? వ్యాఖ్యానించుము.

వర్గీకృత పౌనఃపున్యవిభాజనానికి (వర్గీకృత దత్తాంశానికి), పౌనఃపున్యాలను పరిశీలించి "బాహుళకము" కనుగొనడం సాధ్యం కాదు. ఇచట మనం గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం ఉన్న ఒక తరగతిని మాత్రం సూచించగలం, అట్టి తరగతిని బాహుళక తరగతి (modal class) అంటారు. బాహుళక తరగతిలో ఉండే ఒక విలువ మరియు దీనిని క్రింది సూత్ర సహాయమున లెక్కించవచ్చును.

బాహుళకము $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

ఇచ్చట, l = బాహుళక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు

h = బాహుళక తరగతి పొడవు

f_1 = బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_2 = బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము.

ఈ సూత్రాన్నుపయోగించి బాహుళకమును కనుగొనే విధానాన్ని ఈ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలించుదాం.

ఉదాహరణ-5. ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో కొంత మంది విద్యార్థుల బృందం. 20 కుటుంబాలను సర్వేచేసి, కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్యను ఈ క్రింద చూపిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపవైనది.

కుటుంబపరిమాణం	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
కుటుంబాల సంఖ్య	7	8	2	2	1

ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని' కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చట, గరిష్ఠ తరగతి పౌనఃపున్యము 8, ఈ పౌనఃపున్యానికి సంబంధించిన తరగతి 3-5. అందువల్ల బాహుళక తరగతి 3-5.

ఇపుడు,

బాహుళక తరగతి = 3-5, మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు (l) = 3, తరగతి పొడవు (h) = 2

బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యము (f_1) = 8,

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_0) = 7,

బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_2) = 2.

పై విలువలను, ఈ క్రింది సూత్రములో ప్రతిక్షేపించుదాం.

బాహుళకం $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

$\therefore$ పై దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 3.286.

ఉదాహరణ--6. ఒక తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కులు పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టిక ఈ క్రింది నీయబడినది. ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకము'ను కనుగొనుము. అదేవిధంగా బాహుళకము మరియు సగటులను పోల్చి, వ్యాఖ్యానించుము.

తరగతిఅంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\sum f_i=30$		$\sum f_ix_i=1860$

సాధన : దత్తాంశములోని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు (7గురు) '40−55' తరగతి అంతరంలోని మార్కులు సాధించియున్నారు. కనుక '40-55' అనేది బాహుళక తరగతి అవుతుంది.

మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు $(l) = 40$,

తరగతి పొడవు $(h) = 15$,

బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము $(f_1) = 7$,

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి పౌనఃపున్యము $(f_0) = 3$,

బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న పౌనఃపున్యము $(f_2) = 6$.

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times7-6-3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

వ్యాఖ్యానం (Interpretation) : పైదత్తాంశానికి బాహుళకము 52; అదేవిధంగా సగటు 62 (ఉదాహరణ-1, ద్వారా) అని తెలియుచున్నది. అనగా తరగతిలోని 52 మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎక్కువ మంది ఉన్నారని, ఒక్కొక్క విద్యార్థి యొక్క సగటు మార్కులు 62.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. సందర్భాన్ని బట్టి మనము తరగతిలోని విద్యార్థుల అందరి సరాసరి మార్కులు, లేక ఎక్కువమంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు కనుగొంటాము.
   a. మొదటి సందర్భంలో మనం ఏ కేంద్రీయస్థానపు విలువను కనుక్కొంటాం?
   b. రెండవ సందర్భంలో మనం ఏ కేంద్రీయస్థానపు విలువను కనుక్కొంటాం?
2. వేరువేరు తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశమునకు కూడా 'బాహుళకము'ను కనుగొనవచ్చునా?

అభ్యాసం - 14.2

1. ఒక సంవత్సరకాలంలో, ఒక వైద్యశాలలో చేరిన రోగుల యొక్క వయస్సుల వివరాలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి.

వయస్సు (సం॥లలో)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

పై దత్తాంశానికి సగటు మరియు బాహుళకాలను కనుగొనుము. అదేవిధంగా అట్టి కేంద్ర స్థాన విలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించుము.

2. ఈ క్రింది పట్టికలో 225 విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల (గంటలలో) వివరాలు ఇవ్వబడినాయి.

జీవితకాలం (గంటలలో)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
పౌనఃపున్యం	10	35	52	61	38	29

పై విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల బాహుళకాన్ని కనుగొనుము.

3. ఒక గ్రామంలోని 200 కుటుంబాల యొక్క నెలసరి ఖర్చుల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. అట్టి కుటుంబాల నెలసరి ఖర్చుల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి. అదేవిధంగా నెలసరి సరాసరి ఖర్చును కనుక్కోండి.

నెలసరి ఖర్చు (రూపాయలలో)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
కుటుంబాల సంఖ్య	24	40	33	28	30	22	16	7

4. రాష్ట్రాల వారిగా సెకండరీ పాఠశాలల్లో గల ఉపాధ్యాయ – విద్యార్థి నిష్పత్తి విలువలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వనైనది. ఇట్టి దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని మరియు సగటును గణించండి. మరియు ఈ రెండు కేంద్రస్థాన విలువల పై వ్యాఖ్యానించుము.

విద్యార్థుల సంఖ్య	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
రాష్ట్రాల సంఖ్య	3	8	9	10	3	0	0	2

5. వన్‌డే క్రికెట్ మ్యాచుల్లో ప్రపంచంలో అత్యున్నతశ్రేణి బ్యాట్స్‌మెన్‌లు సాధించిన పరుగుల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వనైనది.

పరుగులు	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
బ్యాట్స్‌మెన్‌ల సంఖ్య	4	18	9	7	6	3	1	1

పై దత్తాంశమునకు బాహుళకాన్ని కనుగొనుము.

6. ఒక విద్యార్థి, రోడ్డుపై ఒక స్థానం నుంచి వెళ్ళుచున్న కార్ల సంఖ్యను ప్రతి మూడు నిమిషాలకు ఒకసారి (1 పీరియడ్), 100 పీరియడ్‌లలో లెక్కించి, వివరాలను ఈ క్రింది పట్టికలో క్రోడీకరించాడు.

కార్ల సంఖ్య	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
పౌనఃపున్యం	7	14	13	12	20	11	15	8

పై దత్తాంశానికి "బాహుళకాన్ని" కనుక్కోండి.

14.4 వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము (Median)

'మధ్యగతము' అనేది కేంద్రస్థాన విలువలు (Measure of central tendency)లో ఒకటి, ఇది ఇవ్వబడిన దత్తాంశములోని రాశుల లేదా పరిశీలనాంశాల యొక్క 'మధ్యవిలువ'ను ఇస్తుంది. అవర్గీకృత దత్తాంశానికి 'మధ్యగతా'న్ని కనుగొనే విధానాన్ని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. అవర్గీకృత దత్తాంశానికి 'మధ్యగతం'ను కనుగొనుటకు, ముందుగా దత్తాంశంలోని రాశులను లేదా పరిశీలనాంశాలను 'ఆరోహణక్రమం'లో అమర్చుకోవాలి.

అపుడు, ఒకవేళ రాశులసంఖ్య 'n' బేసి సంఖ్య అయితే, మధ్యగతము అనేది $\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశి లేదా పరిశీలనాంశము అవుతుంది.

ఒకవేళ, 'n' సరిసంఖ్య అయితే 'మధ్యగతం' అనేది $\left(\frac{n}{2}\right)$వ రాశి మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది.

ఒక పరీక్షలో 50 గరిష్ఠమార్కులకు, 100 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఇట్టి దత్తాంశమునకు 'మధ్యగతాన్ని' ఎలా కనుగొనాలో గమనిద్దాము.

సాధించిన మార్కులు	20	29	28	33	42	38	43	25
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	28	24	15	2	4	1	20

మొదట, మనం మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి, పౌనఃపున్యపట్టికను ఈ క్రింది విధంగా తయారుచేయాలి.

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపున్యము)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
మొత్తం	100

ఇచ్చట $n = 100$, అది ఒక సరిసంఖ్య అపుడు మధ్యగతము $\left(\frac{n}{2}\right)$వ రాశి మరియు మొత్తం $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది. అనగా, 50 వ రాశి 51వ రాశిల సరాసరి అవుతుంది.

ఈ మధ్యమ విలువల స్థానమును కనుగొనుటకు మనము 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను' రాస్తాము.

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము
20	6	6
25 వరకు	$6 + 20 = 26$	26
28 వరకు	$26 + 24 = 50$	50
29 వరకు	$50 + 28 = 78$	78
33 వరకు	$78 + 15 = 93$	93
38 వరకు	$93 + 4 = 97$	97
42 వరకు	$97 + 2 = 99$	99
43 వరకు	$99 + 1 = 100$	100

ఇపుడు మనం ఈ సమాచారం ఆధారంగా పౌనఃపున్యపట్టికకు మరో నిలువు వరుసను; కలపడం ద్వారా వచ్చే నూతన పట్టికను సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికగా పేర్కొందాము.

పై పట్టిక నుండి క్రింది విషయాలు మనం సులభంగా గమనించవచ్చు.

50 వ పరిశీలనాంశం 28 (ఎందుకు?)

51 వ పరిశీలనాంశం 29

$$\text{మధ్యగతము} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

గమనిక : పై పట్టికలోని 1వ మరియు 3వ నిలువ వరుసలను కలిపి సంచితపౌనఃపున్యపట్టిక అంటాం. 'మధ్యగత మార్కులు 28.5' అనేది 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 మార్కుల కంటె తక్కువగాను 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 మార్కుల కంటె ఎక్కువ వచ్చాయనే విషయాల్ని తెల్పుతుంది..

ప్రక్క పట్టికలోని వర్గీకృత దత్తాంశంలో ఒక పరీక్షలో 100 మార్కులకు గాను 53 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

ఈ పట్టిక ఆధారంగా క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను చెప్పే ప్రయత్నం చేద్దాం.

10 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత? 5 మంది అని మనకు స్పష్టంగా తెలుసు. మరి 20 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంతో చెప్పండి?

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచితపౌనఃపున్యం)
10 కంటె తక్కువ	5
20 కంటె తక్కువ	5 + 3 = 8
30 కంటె తక్కువ	8 + 4 = 12
40 కంటె తక్కువ	12 + 3 = 15
50 కంటె తక్కువ	15 + 3 = 18
60 కంటె తక్కువ	18 + 4 = 22
70 కంటె తక్కువ	22 + 7 = 29
80 కంటె తక్కువ	29 + 9 = 38
90 కంటె తక్కువ	38 + 7 = 45
100 కంటె తక్కువ	45 + 8 = 53

20 కంటె తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులలో; 0-10 మార్కులు పొందినవారు, 10-20 మార్కులు పొందిన వారు కూడ కలిసి ఉంటారు. కాబట్టి 20 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందినవారు 5 + 3 అనగా 8 మంది విద్యార్థులు. అందువల్ల మనం 10-20 అనే తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం 8 గా చెప్పవచ్చు. అదేవిధంగా మనం మిగిలిన తరగతుల యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యాలను కూడా కనుగొన వచ్చును. అంటే 30 మార్కుల కంటె తక్కువ మార్కుల పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను; 40 మార్కుల కంటె తక్కువ .... 100 మార్కుల కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చును.

ఈ పట్టికను 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం విభాజన పట్టిక' అంటాము. ఇక్కడ 10, 20, ..., 100 లు వరుస తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు అవుతాయి.

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచితపౌనఃపున్యం)
0 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	48 + 5 = 53
10 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	45 + 3 = 48
20 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	41 + 4 = 45
30 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	38 + 3 = 41
40 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	35 + 3 = 38
50 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	31 + 4 = 35
60 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	24 + 7 = 31
70 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	15 + 9 = 24
80 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	8 + 7 = 15
90 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	8

పైన చెప్పిన విధంగా 0గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య (ఇది తరగతులన్నింటి పౌనఃపున్యాల మొత్తానికి సమానం), 10 లేదా అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందినవారి సంఖ్య ఇది పై మొత్తంలో నుంచి మొదటి తరగతి పౌనఃపున్యం తీసివేయగా వచ్చినది, 20 లేదా అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య (ఇది తరగతులన్నింటి పౌనఃపున్యాల మొత్తంలో నుంచి మొదటి రెండు తరగతుల పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని తీసివేయగా వచ్చినది), ఈ విధంగా పట్టికను తయారు చేయవచ్చు.

'0' కంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారు 53 మంది ఉన్నారని పరిశీలించవచ్చు. 0−10 తరగతిలో 5 గురు విద్యార్థులున్నారు. కాబట్టి 10 గాని

అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 53–5=48గా నిర్ధారించవచ్చు. ఇదేవిధంగా 20 గాని అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 48 – 3 = 45 అవుతుంది. అలాగే 30 గాని అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 45–4=41 అవుతుంది. ఇదేవిధంగా ప్రక్క పట్టికలో చూపించినట్లు 90 గాని, అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు.

ఈ పట్టికను 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం విభాజన పట్టిక' అంటాము. ఇక్కడ 0, 10, 20, ..., 90 లు వరుస తరగతుల యొక్క దిగువ హద్దులు అవుతాయి.

ఇప్పుడు వర్గీకృతక దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతాన్ని కనుగొనడంలో ఈ సంచితపౌనఃపున్య విభాజనపట్టిక నుండి ఏదైనా ఒక దానిని ఉపయోగించు కోవచ్చు.

వర్గీకృత దత్తాంశంలో సంచిత పౌనఃపున్యపట్టికల నుండి మధ్య విలువ అనేది ఏదో ఒక తరగతి అంతరంలోని ఒక విలువ అవుతుంది. కాబట్టి ఈ మొత్తం విభాజనమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే తరగతిలోని ఒక మధ్యవిలువను మనం కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. కాని అది ఏ తరగతి అవుతుందో ఎలా కనుగొనడం? ఈ తరగతి కనుగొనడానికి మనం $\frac{n}{2}$ విలువను మరియు అన్ని తరగతుల యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యాలు కనుగొంటాము. తర్వాత ఏ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{n}{2}$ ను మొదటిసారి అధిగమిస్తుందో ఆ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా గుర్తిసాము.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

పై విభాజనమునందు $n = 53$. కావున $\frac{n}{2} = 26.5$.

26.5 కన్నా ఎక్కువైన కనీస సంచిత పౌనఃపున్యంగల తరగతి 60-70. దీనిని మధ్యగత తరగతి అంటారు.

సంచిత పౌనఃపున్యం 29. ($\frac{n}{2} = 26.5$. కంటె కొంచెం పెద్దది)

ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొంటాము.

మధ్యగతము $$M = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

ఇందులో l = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు

n = దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య

cf = మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యము

f = మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

h = మధ్యగత తరగతి పొడవు

పట్టిక నుండి $\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60, cf = 22,\quad f = 7,\quad h = 10$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

మధ్యగతము $$= 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6} \right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

$\therefore$ తరగతిలోని సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా తక్కువ మార్కులు మిగిలిన సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా ఎక్కువ మార్కులు వచ్చి ఉంటాయి..

ఉదాహరణ-7. ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతి బాలికల ఎత్తు గురించి చేసిన సర్వేఫలితాలు ప్రక్క పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. వారి ఎత్తుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

ఎత్తు (సెం.మీలలో)	బాలికల సంఖ్య
140 కన్నా తక్కువ	4
145 కన్నా తక్కువ	11
150 కన్నా తక్కువ	29
155 కన్నా తక్కువ	40
160 కన్నా తక్కువ	46
165 కన్నా తక్కువ	51

సాధన : మధ్యగతము కనుగొనుటకు మొదట తరగతి అంతరాలను, వాటి సంబందిత పౌనఃపున్యములను కనుగొన వలెను. ఇచ్చిన విలువలు ఎగువ హద్దు కన్నా తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యములు కావు, ఎత్తులు 140, 145, 150, . . ., లు ఎగువ హద్దులు, అనగా తరగతి అంతరాలు 140 కన్నా తక్కువ, 140 - 145, 145 - 150 . . . అవుతాయి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యము	సంచిత పౌనఃపున్యము
140 కన్నా తక్కువ	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

పట్టికను పరిశీలిస్తే 140 కన్నా తక్కువ పొడవు గల బాలికల సంఖ్య 4 అనగా 140 కన్నా తక్కువ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము 4. 145 సెం.మీ కన్నా తక్కువ పొడవు గల వారు 11 మంది. అనగా 140−145 తరగతి పౌనఃపున్యం 11− 4 = 7 . ఇదేవిధంగా మిగిలిన పౌనఃపున్యములను లెక్కించవచ్చు.

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 51$, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

దత్తాంశంలోని 25.5 వ రాశి 145 - 150 తరగతికి చెందుతుంది.

$\therefore$ 145 - 150 మధ్యంతర తరగతి.

మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు $l = 145$,

మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి సంచితపౌనఃపున్యం $cf = 11$,

మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము $f = 18$,

మధ్యగత తరగతి పొడవు $h = 5$.

సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతం $= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} \quad = 149.03$$

$\therefore$ బాలికల పొడవుల యొక్క మధ్యగతము 149.03 సెం.మీ అనగా తరగతిలో 50% మంది బాలికలు 149.03 సెం.మీ కన్నా ఎక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు. మిగిలిన 50% మంది 149.03 సెం.మీ. కన్నా తక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు.

ఉదాహరణ-8. క్రింది దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 525 మరియు దత్తాంశం లోని రాశుల మొత్తం 100 అయిన x, y విలువలను కనుగొనండి. (పట్టికలో CI అనగా తరగతి అంతరం, Fr అనగా పౌనఃపున్యం)

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

సాధన :

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 100$ అని ఇవ్వబడింది.

$\therefore\ 76 + x + y = 100$, i.e., $x + y = 24$ (1)

మధ్యగతం 525 అను రాశి 500 – 600 తరగతికి చెందుతుంది.

కావున, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

సూత్రము ఉపయోగించి

$$\text{మధ్యగతము} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

సమీకరణం (1)నుండి $9 + y = 24$

$$\therefore \quad y = 15$$

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y$

గమనిక : వేరువేరు తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశమునకు కూడా ఇదే సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతమును కనుగొనవచ్చు.

14.5 వివిధ కేంద్రీయస్థాన విలువలు – ప్రత్యేక సందర్భములు

అంకమధ్యమము దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల విలువలను (అత్యల్ప, అత్యధిక విలువలు కూడా) పరిగణనలోనికి తీసుకొంటుంది. కనుక అంకమధ్యమమును అత్యంత విశ్వసనీయమైన కేంద్రీయస్థాన విలువ అంటారు. దీనిని ఉపయోగించి రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులు లేక విభాజనములను సులభముగా పోల్చవచ్చును. ఉదాహరణకు రెండు పాఠశాలలోని విద్యార్థుల పరీక్షా ఫలితాల సరాసరులు కనుగొని పోల్చడం ద్వారా ఏ పాఠశాల సమర్థవంతంగా పనిచేస్తున్నది అని చెప్పవచ్చును.

కొన్ని దత్తాంశములలోని అంత్యవిలువలు అంకమధ్యమంపై ఎక్కువ ప్రభావం చూపుతాయి. సాధారణంగా పౌనఃపున్యాలన్నీ దాదాపు సరిసమానంగా ఉన్న తరగతులతో కూడిన దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము ఆ దత్తాంశమునకు సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుంది. కానీ ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం 2, మిగిలిన పౌనఃపున్యాలు 20, 5, 20, 21, 18. అయినప్పుడు అంకమధ్యమము సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువ కాదు.

దత్తాంశములోని విడివిడి రాశులు, ప్రత్యేకంగా అంత్యమ రాశుల విలువలకు, ప్రాముఖ్యత లేనప్పుడు దత్తాంశమునకు ప్రాతినిధ్య విలువను కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు, ఉదాహరణకు ఒక ప్రాంతములోని అందరు శ్రామికుల వేతనములకు ప్రాతినిధ్య విలువ కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు (మిగిలిన రాశుల కన్నా ఎక్కువ భేదంతో అత్యల్ప, అత్యధిక విలువలుగల రాశులున్నప్పుడు) మధ్యగతమును అనువైన కేంద్రీయ స్థాన విలువగా తీసుకొంటారు.

పలుమార్లు పునరావృతమగు, బహు ప్రాముఖ్యముగల రాశులను గుర్తించవలసిన సందర్భములలో బాహుళకమును కేంద్రీయస్థాన విలువగా గణిస్తారు. ఉదాహరణకు ఎక్కువ మంది వీక్షించే టెలివిజన్ ప్రోగ్రాము కనుగొనుటకు, ఎక్కువ అమ్మకము గల వస్తువు కనుగొనుటకు ఎక్కువ మంది ఉపయోగించు వాహనము రంగు కనుగొనుటకు బాహుళకం ఉపయోగిస్తారు.

EXERCISE - 14.3

1. ఒక ఆవాస ప్రాంతములోని 68 మంది వినియోగదారుల యొక్క నెలసరి విద్యుత్ వినియోగం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొని వానిని పోల్చండి.

నెలవారి వినియోగం(యూ)	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
వినియోగదారుల సంఖ్య	4	5	13	20	14	8	4

2. క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన 60 రాశుల మధ్యగతం 28.5 అయిన x, y విలువలు కనుగొనుము.

తరగతిఅంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యము	5	x	20	15	y	5

3. ఒక జీవిత భీమా సంస్థ ఉద్యోగి, పాలసీదారుల వయస్సులను బట్టి తయారు చేసిన విభాజన పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడింది. పాలసీదారుల వయస్సుల మధ్యగతం కనుగొనండి. [18 సంవత్సరముల నుండి 60 సంవత్సరముల వయస్సు గల వారికి మాత్రమే పాలసీలు ఇస్తారు]

వయస్సు (సం॥)	20 కన్నా తక్కువ	25 కన్నా తక్కువ	30కన్నా తక్కువ	35 కన్నా తక్కువ	40కన్నా తక్కువ	45కన్నా తక్కువ	50 కన్నా తక్కువ	55కన్నా తక్కువ	60 కన్నా తక్కువ
పాలసీదారుల సంఖ్య	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4. ఒక చెట్టు యొక్క 40 ఆకుల పొడవులు దగ్గర మి.మీ వరకు కొలిచి తయారు చేసిన క్రింది పట్టిక నుండి వాని పొడవులు మధ్యగతము కనుగొనండి.

ఆకు పొడవు (మి.మి)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
ఆకుల సంఖ్య	3	5	9	12	5	4	2

(**సూచన :** మధ్యగతము లెక్కించుటకు తరగతి హద్దులు నిర్మించవలెను)

5. ఒక పరిశీలనలో 400 నియాన్ బల్బుల జీవితకాలం క్రింది విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

జీవితకాలం (గంటలలో)	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
బల్బుల సంఖ్య	14	56	60	86	74	62	48

బల్బుల జీవితకాలములకు మధ్యగతము కనుగొనండి.

6. ఒక టెలిఫోను డైరక్టరీ నుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటిపేర్లను తీసుకొన్నారు. వాటిలోని అక్షరాల సంఖ్యను బట్టి క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేయబడినది.

అక్షరాల సంఖ్య	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
ఇంటిపేర్ల సంఖ్య	6	30	40	16	4	4

ఇంటిపేర్లలోని అక్షరాల సంఖ్యకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొనండి.

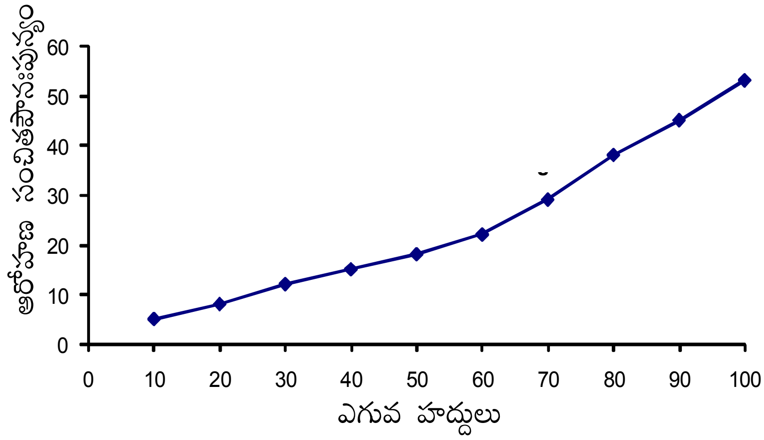
7. క్రింది విభాజన పట్టికలో 30 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడ్డాయి. వారి బరువుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

భారము(కి.గ్రా)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	8	6	6	3	2

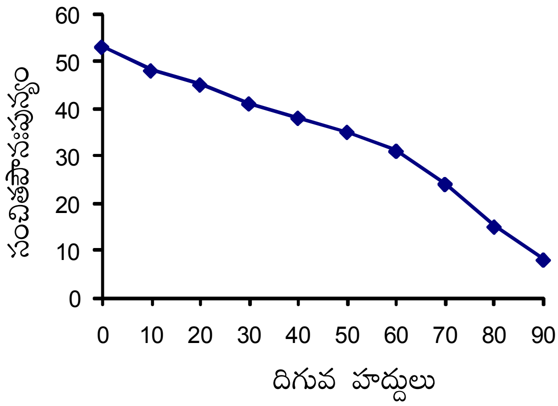
14.6 సంచిత పౌనఃపున్యముల రేఖాచిత్రములు

పదాల కన్నా పటాలు ఎక్కువ అవగాహన కల్పిస్తాయి అని విదితమేకదా. రేఖా చిత్రాలు దత్తాంశమును సమగ్రంగా, శీఘ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఉపయోగపడతాయి. కమ్మీ చిత్రాలు, సోపాన చిత్రాలు, పౌనఃపున్య బహుభుజి మరియు వక్రము ల గురించి క్రింది తరగతులతో చర్చించి ఉన్నాము. సంచిత పౌనఃపున్యములకు రేఖాచిత్రములు నిర్మించుట గురించి చర్చిద్దాము.

ఈ రేఖా చిత్రముల కొరకు ఉదాహరణ 6లోని దత్తాంశమును తీసుకొందాం. దీనికొరకై దత్తాంశంలోని తరగతులు అవిభాజక తరగతులై ఉండాలి. (సంచిత పౌనఃపున్యములు తరగతి హద్దులతో సంబంధం కలిగి ఉంటాయి) అవధులతో కాదు.



దత్తాంశములోని వరుస తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు 10, 20, 30, 100 అని గమనించండి. అనువైన స్కేలును తీసుకొని X-అక్షముపై ఎగువ హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యములను గుర్తించండి. ప్రతి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు, దానికి సంబంధించిన సంచిత పౌనఃపున్యములతో ఏర్పడు హద్దులను (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) లను గ్రాఫు తలంపై గుర్తించి, ఆ బిందువులను సరళ వక్రంతో కలపండి. ఈ వక్రమును ఆరోహణ సంచితపౌనఃపున్య వక్రము లేక ఓజీవ్ వక్రము అంటారు.



' ఒజీ ' అనే ఫ్రెంచి పదమునుండి 'ఓజీవ్' అను పదము తయారైనది. ఒజీ అనగా పుటాకార వక్రంగా మొదలై కుంభాకార వక్రంగా అంతమయ్యే ఆకారము, దాదాపు ఆంగ్ల అక్షరం 'S' వంటి ఆకారం. **14, 15** శతాబ్దములలో గోతిక్ పద్ధతి నిర్మాణములలో ఇది ఒక ప్రముఖమైన ఆకారము.

మరలా అవరోహణ సంచితపౌనఃపున్య వక్ర నిర్మాణం గురించి పరిశీలిద్దాము. పై దత్తాంశములోని తరగతుల దిగువ హద్దులు 0, 10, 20, ..., 90 అని గమనించండి. అనువైన స్కేలును తీసుకొని X-అక్షము పై దిగువ హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచితపౌనఃపున్యములను గుర్తించాలి. ప్రతి తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు. దానికి సంబంధించిన అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యముల యొక్క క్రమయుగ్మాలు (0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) లను గ్రాఫ్ తలముపై గుర్తించి ఒక సరళ వక్రముతో కలుపవలెను. ఈ వక్రమును 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము' లేక 'ఓజీవ్ వక్రము' అంటారు.

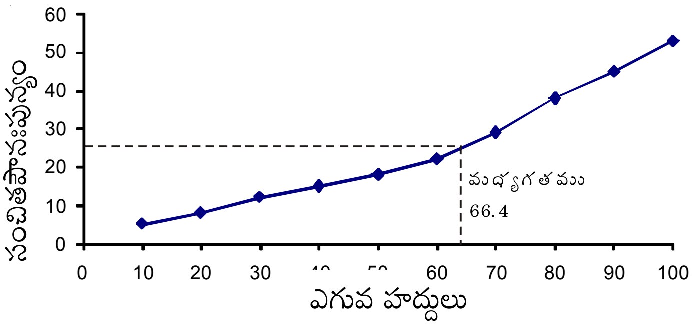
14.6.1 ఓజీవ్ వక్రము నుండి మధ్యగతము కనుగొనుట

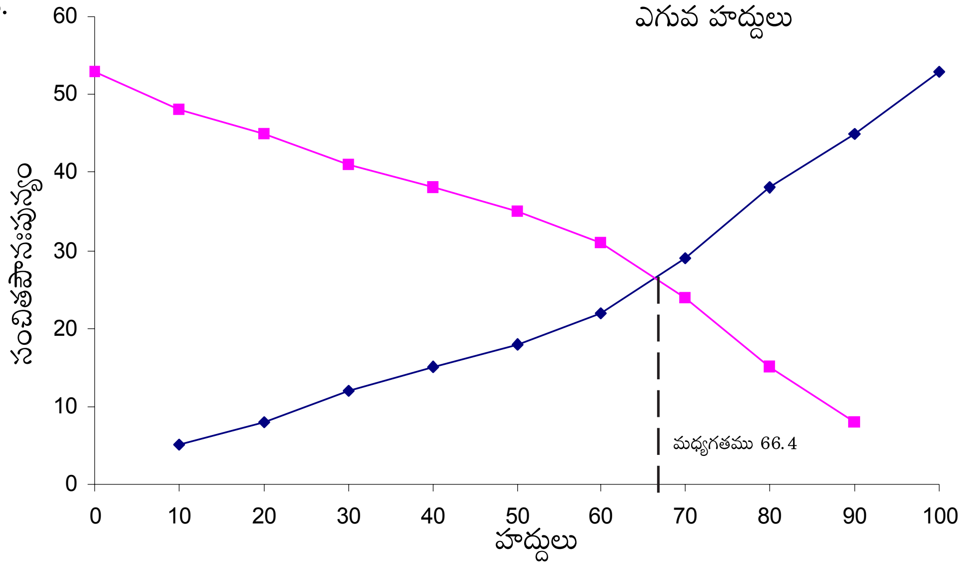
ఓజీవ్ వక్రము నుండి ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము కనుగొనగలమా? పరిశీలిద్దాము.

ఆరోహణ లేక అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రముయొక్క Y−అక్షముపై మొదట $\frac{n}{2}$ వ రాశి(ఈఉదాహరణలో $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$)ని సూచించు బిందువును గుర్తించాలి. ఈ బిందువు నుండి x-అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక రేఖ గీచి అది వక్రమును ఖండించు బిందువును గుర్తించాలి. ఈ బిందువు నుండి x-అక్షం మీదకు ఒక లంబమును గీచినచో, ఆ లంబపాదము మధ్యగతమును సూచిస్తుంది. ప్రక్క రేఖాచిత్రములను పరిశీలించండి.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి :

ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క ఆరోహణ, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను నిర్మించి, రెండు ఓజీవ్ వక్రముల ఖండన బిందువు నుండి x-అక్షము మీదకు ఒక లంబమును గీయగా, ఆ లంబపాదము దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును సూచిస్తుంది.



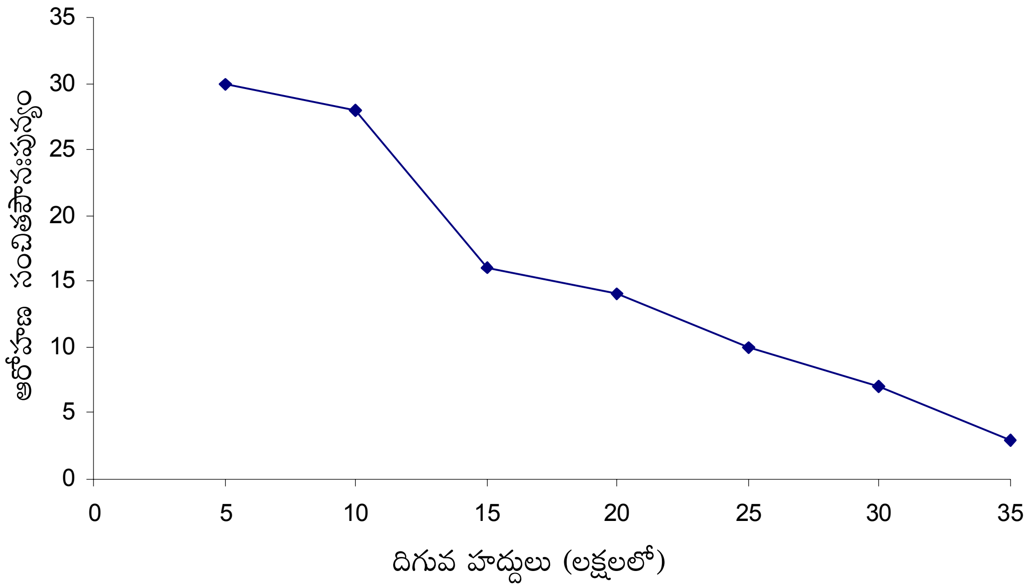


ఉదాహరణ -9. ఒక ప్రాంతములోని 30 అంగళ్ళ యొక్క సంవత్సర ఆదాయములు క్రింది పట్టిక రూపంలో ఇవ్వబడ్డాయి.

లాభము(లక్ష ₹)	అంగళ్ళ సంఖ్య
5 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	30
10 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	28
15 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	16
20 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	14
25 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	10
30 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	7
35 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	3

పై దత్తాంశమునకు రెండు ఓజీవ్ వక్రాలు గీయండి. అందు నుండి లాభముల యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.

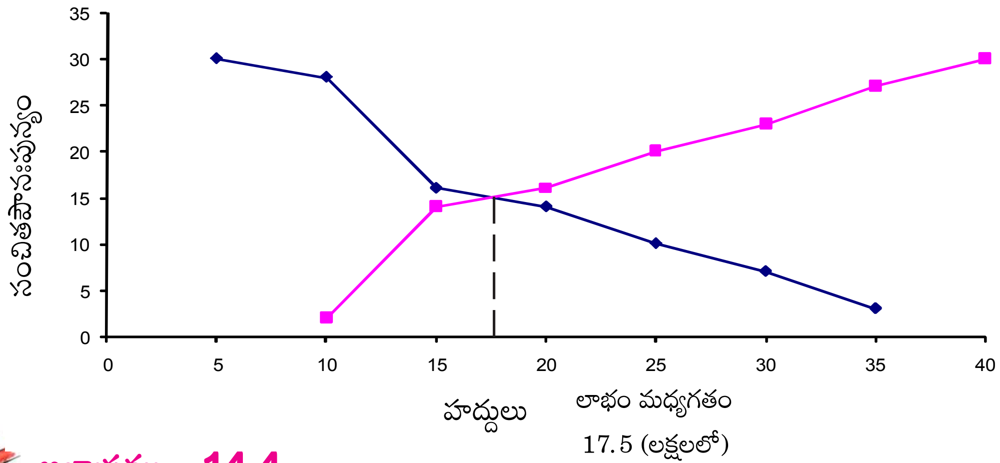
సాధన : ఇచ్చిన దత్తాంశములోని విలువలు దిగువ హద్దులు, సంబంధిత అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు. వీటితో మొదట అవరోహసంచిత పౌనఃపున్య వక్రము గీయుటకు అనువైన స్కేలు తీసుకొని x-అక్షము పై దిగువ హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యములను గుర్తించి వాటిని కలుపుతూ సరళ వక్రమును గీయాలి. ఇది అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము అవుతుంది.



ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి తరగతి అంతరాలు, పౌనఃపున్యములు, ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను తయారు చేయగా

తరగతి అంతరాలు	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
అంగళ్ళ సంఖ్య	2	12	2	4	3	4	3
ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	2	14	16	20	23	27	30

పై దత్తాంశమునుండి ఏర్పడు బిందువులు (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) బిందువులను అదే గ్రాఫ్‌పై గుర్తించి సరళ వక్రముతో కలుపగా ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము ఏర్పడుతుంది. ఈ రెండు వక్రములు పరస్పరం ఖండించుకొన్న బిందువు నుండి x-అక్షం మీదకు లంబమును గీయగా, ఆ లంబపాదము 17.5 అని గుర్తించవచ్చు. అనగా దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 17.5 లక్షల రూపాయలు.



అభ్యాసము - 14.4

1. 50 మంది శ్రామికుల దినసరి భత్యములు క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

దినసరి(₹ లలో)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
శ్రామికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

ఈ దత్తాంశమనకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను తయారు చేసి, ఓజీవ్ వక్రము గీయండి.

2. ఒక పాఠశాలలో జరిగిన వైద్య పరీక్షలలో తరగతిలోని 35 మంది విద్యార్థులు బరువులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

బరువు (కి.గ్రా)	విద్యార్థుల సంఖ్య
38 కన్నా తక్కువ	0
40 కన్నా తక్కువ	3
42 కన్నా తక్కువ	5
44 కన్నా తక్కువ	9
46 కన్నా తక్కువ	14
48 కన్నా తక్కువ	28
50 కన్నా తక్కువ	32
52 కన్నా తక్కువ	35

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము గీచి దాని నుండి మధ్యగతమును గుర్తించండి. ఈ దత్తాంశమునకు సూత్ర సహాయంతో మధ్యగతము కనుగొని రెండు విలువలు సరిచూడండి.

3. ఒక గ్రామములోని 100 మంది రైతులు పొలములలో హెక్టారుకు దిగుబడి ధాన్యము క్రింది విభాజనము నందు ఇవ్వబడింది.

ధాన్యం దిగుబడి (క్వింటాల్/టాక్టర్)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
రైతుల సంఖ్య	2	8	12	24	38	16

ఈ దత్తాంశమునకు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము తయారు చేసి ఓజీవ్ వక్రము గీయండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒక వర్గీకృత విభాజనము యొక్క అంకమధ్యమము లెక్కించుటకు సూత్రాలు

   (i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి : $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) విచలన పద్ధతి : $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి : $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు బాహుళక సూత్రము:

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

3. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు మధ్యగతము

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

4. మధ్యగతము కనుగొనుటకు తరగతి హద్దులు ఉపయోగించాలి.

5. ఆరోహణ, అవరోహణ సంచితపౌనఃపున్య వక్రములు గీయుట గురించి తెలుసుకొన్నాము.

6. ఓజీవ్ వక్రాలు గ్రీయుటలో X-అక్షముపై హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యములను తీసుకొనవలెను.

7. రెండు అక్షములపై తీసుకొను స్కేలు సమానంగా ఉండనవసరం లేదు.

8. ఒకే దత్తాంశము యొక్క రెండు ఓజీవ్ వక్రాలు పరస్పరం ఖండించుకొన్న బిందువు నుండి X-అక్షం మీదికి గీచిన లంబపాదము ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును తెలుపుతుంది.

అనుబంధం

గణిత నమూనా విధానాలు

(Mathematical Modelling)

A.I.1 పరిచయం

శాస్త్ర, సాంకేతిక రంగాలలో అమెరికా, రష్యా, జపాన్ వంటి అగ్రదేశాల సరసన నిలిచిన భారతదేశంలో ఫిబ్రవరి 25, 2013న ఇస్రో (భారత అంతరిక్ష పరిశోధనా సంస్థ) వారు PSLV C20, అనే వాహన నౌక ద్వారా సరల్ (SARAL) అనే ఉపగ్రహంను కక్ష్యలో ప్రవేశపెట్టినారు. ఈ శాటిలైట్ యొక్క బరువు సుమారు 407 కి.గ్రా మరియు ఇది భూమి నుండి 781 కి.మీ ఎత్తులో ఉంటూ 98.5^o ల కోణంతో కక్ష్యలో పరిభ్రమణం చేస్తుంది.

పై సమాచారాన్ని చదివిన మనకు సహజంగానే కొన్ని సందేహాలు తలెత్తుతాయి. అవి ఏంటంటే

(i) శాస్త్రవేత్తలు, శాటిలైట్ 781కిమీల ఎత్తులో పరిభ్రమిస్తుందని అంత ఖచ్చితంగా ఎలా చెప్పగలిగారు. నిజంగానే వారు అంతరిక్షానికి వెళ్ళి దూరాన్ని కొలిచి చూశారా ?

(ii) భ్రమణ కోణం 98.5^o లు అని ఎలా నిర్ధారించగలిగారు ?

మన నిజజీవితంలోని కొన్ని అద్భుతమైన విషయాలు, మనల్ని ఆశ్చర్యచకితుల్ని చేస్తాయి. అసలు గణిత మేధావులు గాని శాస్త్రవేత్తలు గాని ఇంత ఖచ్చితంగా ఈ విలువలను ఎలా అంచనా వేయగలిగారు ? అని మనం నివ్వెర పోతాము. అలాంటి ఉదా॥లు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాము.

(i) సూర్యుని ఉపరితలంపైన ఉష్ణోగ్రత దాదాపు $6,000^oC$ ఉంటుంది.

(ii) మానవుని గుండె ప్రతీ నిమిషానికి ఒకసారి 5 నుండి 6 లీ॥ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుంది.

(iii) సూర్యునికి, భూమికి మధ్య దూరము 1,49,000 కిమీ॥లు.

పైన పేర్కొన్న ఉదా॥లలో ఏ శాస్త్రవేత్త కూడ సూర్యుని పైకి వెళ్ళి అక్కడి ఉష్ణోగ్రతను కొలవలేదు. అదేవిధంగా మనిషి గుండెను బయటకు తీసి అది ఎన్ని లీ॥ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుందో పరిశీలించలేదు.

మరి ఇలాంటి ప్రశ్నలకు ఇంత ఖచ్చితమైన సమాధానాన్ని ఎలా చెప్పగలిగారు ?

"గణితనమూనా విధానం" ద్వారా ఇలాంటి ఊహకు అందని ప్రశ్నలకు ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని కనుక్కోగల్గుతాము.

"గణితనమూనా విధానం అనేది కేవలం శాస్త్రజ్ఞులు, మేధావులకు మాత్రమే ఉపయోగపడుతుందనుకోవడం పొరపాటే అవుతుంది. ఎందుకంటే మన నిజజీవితంలో ఎన్నో సందర్భాలలో గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి మన సమస్యలను పరిష్కరించుకుంటాము. ఉదా॥కు మనం రూ. 100 లను వేరేవారికి 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా ఇస్తే 1 సం॥ కాలం తర్వాత మనకు ఎంత డబ్బు వస్తుందో తెలుసుకోవాలి, లేదా మన ఇంటి గది గోడలన్నింటికి రంగు వేయించాలంటే ఎన్ని లీ॥ల పెయింట్ అవసరమో కనుక్కునే సందర్భాలలో మనకు గణిత నమూనా ప్రక్రియ ఉపయోగపడుతుంది.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

మనం నేరుగా కొలవలేని సందర్భాలలో గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి ఖచ్చితమైన విలువలను అంచనా వేయగలిగిన, నిజజీవిత సన్నివేశాలలోని మరికొన్ని ఉదా॥లను మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

A.II.2 గణిత నమూనాలు

త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనుటకు ఏ సూత్రం వాడుతామో మీకు గుర్తుందా ?

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు కదా !

అదే విధంగా సాధారణ వడ్డీ కనుగొనుటకు సూత్రం $I = \frac{PTR}{100}$; ఈ సూత్రం లేదా సమీకరణం అనేది వడ్డీ (I); అసలు(P); కాలం (T); మరియు వడ్డీ రేటు (R). ల మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

ఈ సూత్రాలను మనం గణిత నమూనాలకు ఉదాహరణలుగా చెప్పుకోవచ్చు.

గణిత నమూనాలకు సంబంధించి మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

(i) వేగం (S) = $\frac{\text{దూరం (d)}}{\text{కాలం (t)}}$

(ii) చక్రవడ్డీలో మొత్తం $(A) = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

ఇచట P = అసలు

r = వడ్డీరేటు

n = వడ్డీ కట్టే పర్యాయముల సంఖ్య

కాబట్టి,

> నిజజీవిత సందర్భాలలో మనం ఉపయోగించే గణిత వివరణలు లేదా గణిత సూత్రాలే "గణిత నమూనాలు".

ఇవి చేయండి

మీరు క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న "గణిత నమూనాలు" కొన్నింటిని రాయండి.

A.I.3 గణిత నమూనా విధానం

మన దైనందిన జీవితంలోని కొన్ని సందర్భాలలో సమస్యలను ఎదుర్కొవాల్సి వస్తుంది. వాటిని పరిష్కరించుకోవడానికి మనం ఆ సమస్యకు సరిపడు గణిత సమీకరణంను రాసుకొని దాని సాధనను కనుగొంటాము. తర్వాత దశలో మనం కనుగొన్న సాధన; మన సమస్యకు పరిష్కారంగా సరిపోతుందో లేదో విశ్లేషించుకుంటాము. ఈ విధంగా ఒక గణిత నమూనాను నిర్మించుకొని; దాని ఆధారంగా సమస్యను సాధించే విధానంనే "గణిత నమూనా విధానం"గా వ్యవహరిస్తాము.

ఇప్పుడు గణితనమూనా విధానాలు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. వాణి; ₹ 19,000 ధర కలిగిన ఒక వాషింగ్ మెషిన్‌ను కొనాలని అనుకొన్నది. కాని ఆమె వద్ద కేవలం ₹ 15,000 మాత్రమే ఉన్నాయి. మిగిలిన డబ్బుల కోసం ఆమె తన వద్ద ఉన్న రూపాయలను సం॥నికి 8% వడ్డీరేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా ఇవ్వాలనుకుంది. అయితే ఎన్ని సం॥ల తర్వాత వాణికి మిగిలిన డబ్బులు వచ్చి, తాను అనుకున్న వాషింగ్‌మెషిన్ కొనగలదు?

సాధన :

సోపానం 1 : (సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం): ఈ సోపానంలో మనం సమస్యను అర్థం చేసుకొనే ఏయే అంశాలు ఇవ్వబడ్డాయి ? ఇంకా ఏమి కనుగొనాల్సి ఉందో తెలుసుకుంటాము. ఈ సమస్యలో మనకు అసలు, వడ్డీరేటు ఇవ్వబడ్డాయి. వాణి అప్పుగా ఇచ్చిన అసలు ₹ 15,000; ఎన్ని సం॥ల తర్వాత ₹ 19000 అవుతాయో మనం కనుగొనాలి.

సోపానం 2 : (గణితపరమైన వివరణ మరియు సూత్రీకరణ) ఈ సోపానంలో ఇచ్చిన సమస్యలోని వివిధ పదాలకు విస్తృతార్థంలో వివరణ రాసుకొని చరరాశులను గుర్తిస్తాము. సమస్యకు సరిపడు సమీకరణం లేదా అసమీకరణాలను రాసుకొని అవసరమైన సమాచారాన్ని సేకరిస్తాము.

ఈ సమస్యలో మనం సాధారణ వడ్డీకి సంబంధించిన సూత్రం

$I = \frac{PTR}{100}$ (నమూనా) ను ఉపయోగిస్తాము. దీనిలో

P = అసలు T = కాలం (సం॥లలో) R = వడ్డీరేటు I = సాధారణ వడ్డీ

ఈ నమూనాలో మనం కాలం (T)ని కనుగొనాల్సి ఉంది. $T = \frac{100I}{RP}$ అవుతుంది.

సోపానం 3: (గణిత సమస్యను సాధించడం) : ఈ సోపానంలో, 2వ సోపానంలో అభివృద్ధి పరిచిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించుకొని సమస్యను సాధిస్తాము. వాణి వద్ద ప్రస్తుతం ఉన్న డబ్బు కేవలం ₹ 15,000 మాత్రమే అని మనకు తెలుసు. ఇదే మనకు సమస్యలో అసలు (P) అవుతుంది.

₹ 19000 విలువ గల వాషింగ్‌మెషిన్ కొనడానికి వాణికి ఇంకా 19,000-15,000 = 4,000 అవసరం. అంటే ఇది వడ్డీ (I) కి సమానం.

$$P = ₹15,000 \quad R = 8\%, \quad I = 4000, \quad T = \frac{100 \times 4,0\cancel{00}}{15,0\cancel{00} \times 8} = \frac{400}{120}, \quad T = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ సం॥లు}$$

సోపానం 4 : (సాధనను విశ్లేషించుకోవడం): పై సోపానంలో వచ్చిన సాధనను ఈ సోపానంలో విశ్లేషించుకుంటాము.

ఇక్కడ మనకు T = $3\frac{1}{3}$ సం॥లు అని వచ్చింది. అంటే 3సం॥లు మరియు ఇంకా సం॥లో 3వ వంతు అని లేదా 3 సం॥ల 4నెలలు అని అర్థం. అంటే వాణి 3 సం॥ల 4 నెలల తర్వాత తాను అనుకొన్న వాషింగ్ మెషిన్ కొనగలదు.

సోపానం 5 : (నమూనా యొక్క విశ్వసనీయత): సమస్యా సాధనలో వచ్చిన సాధన (ఫలితం) నిజజీవితానికి సరిపోతుందని అన్నిసార్లు విశ్వసించలేము. ఒక వేళ సాధన మనకు సరిపోదని అనిపిస్తే మళ్ళీ మళ్ళీ మన నమూనాని పరీక్షించుకుంటూ దానిని మెరుగుపరుచుకోవచ్చు.

ఈ సమస్యను సాధించే క్రమంలో మనం సమస్యలోని 2 అంశాలు ఎప్పటికీ మారవని ఊహించుకొని సమస్యను సాధించాము అవి i) వడ్డీరేటు ii) వాషింగ్ మెషిన్ ధర ప్రతీ సం॥ ₹ 19,000 ఉండడం. ఒకవేళ ఈ రెండు విలువలు మారితే $\frac{PTR}{100}$ అనే నమూనా మనకు వర్తించదు.

ఉదాహరణ-2. లోకేశ్వరం ఉన్నతపాఠశాలలో 10వ తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులు మరియు వారి గణిత ఉపాధ్యాయుడు కలిసి లోకేశ్వరం నుండి హైదరాబాద్‌కు విహార యాత్రకు వెళ్ళాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ఒక్కొక్క వాహనంలో డ్రైవర్ కాకుండా కేవలం 6 గురు వ్యక్తులు మాత్రమే కూర్చోగలరు. అయిన వారు ఎన్ని వాహనాలు అద్దెకు తీసుకోవాలి.

సోపానం 1 : ఈ సమస్యలో ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం డ్రైవర్ కాకుండా 6గురు వ్యక్తులు ఇవి ఇవ్వబడింది. 51 మంది ప్రయాణించడానికి అవసరమగు వాహనాల సంఖ్యను మనం కనుగొనాల్సి ఉంది.

సోపానం 2 : వాహనాల సంఖ్య = (మొత్తం వ్యక్తులు) / (ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం)

సోపానం 3 : వాహనాల సంఖ్య = 51/6 = 8.5

సోపానం 4 (వ్యాఖ్యానం/విశ్లేషణ): వాహనాల సంఖ్య 8.5 గా ఉండదని మనకు తెలుసు. కాబట్టి వారు అద్దెకు తీసుకోవాల్సిన వాహనాల సంఖ్య, 8.5కు దగ్గరి పూర్ణాంకమైన 9 గా ఉండాలి

∴ కావాల్సిన వాహనాల సంఖ్య = 9

సోపానం 5 (విశ్వసనీయత) : ఈ గణిత నమూనాలో మనం సన్నగా ఉన్న విద్యార్థులు; లావుగా ఉన్న విద్యార్థులు అందరూ సమాన స్థలాన్ని ఆక్రమించి కూర్చుంటారని భావించి సమస్యను సాధించాము. అలా భావించకపోతే ఈ నమూనా మనకు ఉపయోగపడదు.

ప్రయత్నించండి

1. మీ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని ఏదైనా ఒక రాత సమస్యను తీసుకొని దానికి గణిత నమూనాను తయారు చేసి ఆ సమస్య సాధనను కనుగొనండి.

2. ఒక కారు 'A' అనే స్థానం నుండి బయలుదేరి 40 కి.మీ/గం. వేగంతో ప్రయాణించి "B" అనే గమ్యస్థానాన్ని చేరుకుంది. అదే సమయంలో మరో కారు "B" నుండి బయలుదేరి 30 కి.మీ/గం॥ వేగంతో A వైపుకు బయలుదేరింది. A, B ల మధ్యదూరం 100 కి.మీలు అయితే ఆ రెండు కార్లు ఎంత సమయం తర్వాత కలుసుకుంటాయి ?

   పై సమస్యకు గణిత నమూనాను తయారుచేసి సాధించండి.

ఇప్పటి వరకు మనం సరళమైన రాత సమస్యలకు "గణిత నమూనాలు" తయారు చేశాము. ఇప్పుడు ఒక నిజజీవిత సమస్యను తీసుకొని దానికి గణిత నమూనాను ఎలా తయారుచేయాలో చూద్దాం!

ఉదాహరణ-3. 2000 సం॥లో ఐక్యరాజ్య సమితిలో సభ్యత్వం గల 191 దేశాలు, లింగ వివక్షతను తగ్గించడానికి ఒక ఒప్పందంను కుదుర్చుకున్నాయి. అందులో భాగంగా ప్రాథమిక, మాధ్యమిక పాఠశాలల్లోని బాలికల నిష్పత్తిని పెంచాలని లక్ష్యంగా నిర్ణయించుకున్నాయి. ఈ ఒప్పందంపై భారతదేశం కూడా సంతకం చేసింది. భారతదేశంలో వివిధ సం॥లలో ప్రాథమిక పాఠశాలల్లోని బాలికల నమోదు శాతం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A.I.1

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

పై సమాచారం ఆధారంగా ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు స్థాయి ఏ రేటున పెరుగుతుందో తెల్పి, 50% నమోదును ఏ సం॥లో చేరుతామో అంచనా వేయండి.

సాధన :

సోపానం 1 : (సూత్రీకరణ) మొదట ఈ సమస్యను గణిత సమస్యరూపం లోకి మార్చుకోవాలి.

పట్టిక A1.1 మనకు 1991 – 92, 1992- 93 మొ॥లగు సం॥లలో ఉన్న నమోదు శాతాన్ని తెల్పుతుంది. దీనిలో మనం విద్యా సంవత్సరాలను 1991, 1992 గా తీసుకోవచ్చు. పట్టిక A1.1 లో సూచించిన విధంగా ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు శాతం ఒకే రేటులో పెరగుతుందని అనుకుందాం. అపుడు మనకు ఏఏ సం॥ల మధ్య 50% నమోదు స్థాయిని చేరగలం అనడం కంటే ఎన్ని సం॥లలో అంత నమోదు స్థాయికి చేరగలం అనేది ముఖ్యం. (ఉదాహరణకు ₹ 15000 లను సం॥నకు 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున 3 సం॥లకు సాధారణ వడ్డీకి ఇస్తే. ఆ 3 సం॥లు 1999–2002 లేదా 2001–2004 అనేది అప్రస్తుతం. ఇక్కడ వడ్డీ రేటు; ఎన్ని సం॥లకు వడ్డీకి ఇస్తున్నాం అనేదే ముఖ్యము).

అదే విధంగా ఈ సమస్యలో కూడా 1991 తో పోల్చితే మిగిలిన సం॥లలో నమోదు స్థాయి ఎలా పెరిగిందని చూడాలి. దానికి మనం 1991 ను 0 సం॥గా మరియు 1992 ను 1గా సూచిద్దాం. ఎందుకంటే 1991 తర్వాత 1 సం॥ గడిచింది కాబట్టి. అదే విధంగా 1993 ని 3 గాను 1994 ను 4 చేత సూచిద్దాము. అప్పుడు పట్టిక ఇలా మారుతుంది.

పట్టిక A.I.2

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ఒక్కొక్క సంవత్సరంలో నమోదు శాతం ఎంత పెరిగిందో క్రింది పట్టిక A.I.3లో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A.I.3

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 నుండి 1992 సం॥ల మధ్య మొదట సం॥ల కాలంలో నమోదు శాతం 41.9% నుండి 42.6% కు అంటే 0.7% పెరిగింది. 2వ సం॥ చివర 42.6% నుండి 42.7% కు అంటే 0.1% పెరిగింది. పై పట్టికను ఆధారంగా చేసుకొని సంవత్సరాలకు మరియు నమోదుశాతానికి ఒక ఖచ్చితమైన సంబంధాన్ని ఏర్పరచలేము. కాని పెరుగుదల అనేది ఒక్క మొదటి, చివరి సం॥లలో తప్ప మిగిలిన సం॥లలో స్థిరంగా ఉంది.

ఈ పెరుగుదల శాతాల యొక్క సరాసరి తీసుకుంటే

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22 \qquad .... (1)$$

సరాసరి 0.22 కాబట్టి నమోదు శాతం స్థిరంగా 0.22% చొప్పున పెరుగుతుందని అనుకుందాం.

సోపానం 2 : (గణిత పరమైన వివరణ)

ప్రతీ సం॥ నమోదు శాతంలో స్థిరమైన పెరుగుదల 0.22% ఉందని అనుకున్నాం కాబట్టి

మొదటి సం॥ తర్వాత నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22$

రెండవ సం॥ తర్వాత ,, ,, $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

మూడవ సంవత్సరం ,, ,, $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

"n"వ సం॥ తర్వాత నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22n,\ n \geq 1.$ .... (2)

పై సమస్యలో మనం 50% నమోదు ఎన్ని సం॥లకు చేరుతుందో కన్గొనాలి. కాబట్టి మనం "n" విలువను క్రింది సూత్రం (నమూనా) ద్వారా రాబట్టవచ్చు.

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

సోపానం 3 : సాధన **:** "n" విలువ కోసం పై సమీ॥ను సాధించగా

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

సోపానం 4 : (వివరణ): సం॥ల సంఖ్య దశాంశ రూపంలో ఉండదు కాబట్టి 36.8 కి దగ్గరగా ఉన్న పూర్ణాంకం 37 ను సం॥ల సంఖ్యగా తీసుకుంటాం. అంటే నమోదు శాతం 50% ని చేరే సం॥ 1991 + 37 = 2028.

సోపానం 5 : (విశ్వసనీయత): మనం నిజ జీవిత సమస్యను సాధిస్తున్నాం కాబట్టి మనకు వచ్చిన ఫలితం ఈ సమస్యకు ఎంతమేరకు సరిపోతుందో సరిచూసుకోవాలి.

సోపానం 2 లో వచ్చిన ఫలితం మనం వాస్తవం అని అనుకుందాము. సమస్యలో ఇచ్చిన విలువలతో; సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలను పోల్చుకొని చూద్దాం. ఈ విలువలు క్రింది పట్టిక A.I.4 లో ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక A.I.4

సంవత్సరం	నమోదు (శాతంలో)	సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలు(శాతంలో)	భేదం (శాతంలో)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

పై పట్టిక ఆధారంగా వాస్తవ విలువల కన్న; సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలు 0.3% లేదా 0.5% శాతం కంటె తక్కువగా ఉన్నట్లు మనం గమనించవచ్చు. ఈ తేడా వల్ల వచ్చే సమస్య ఏమిటంటే మనకు కావల్సిన సం॥ల సంఖ్యలో 3 నుండి 5 సం॥ల తేడా వస్తుంది. ఎందుకంటే వాస్తవ పెరుగుదల 1% నుండి 2%. మాత్రమే ఉంది. ఒకవేళ మనం ఇంత తేడాను అంగీకరిస్తే కనుక సోపానం 2 లో వచ్చినదే మనకు కావాల్సిన "గణిత నమూనా" అవుతుంది. అలా కాక ఈ తేడాను ఇంకా తగ్గించదలచుకుంటే ఈ నమూనాను మళ్ళీ మనం మెరుగుపరుచుకోవచ్చు. దానికోసం మళ్ళీ సోపానం 2కు వెళ్ళి సమీకరణాన్ని మార్చాల్సి ఉంటుంది.

అలా మర్చి చూద్దామా !

సోపానం 1 : (సమీకరణ పునరుత్పాదన) : మనం; నమోదు రేటు 0.22%, చొప్పున స్థిరంగా ఉందనుకొన్నప్పటికి ఈ దోషాన్ని సవరించుటకు ఒక స్థిరాంకాన్ని ప్రవేశపెడదాము. దాని కోసం పై పట్టికలో వచ్చి "భేదంల" యొక్క సరాసరిని తీసుకుందాము.

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

ఈ బేధాల యొక్క సరాసరి సహాయంతో మళ్ళీ మన సూత్రాన్ని సరిదిద్దుకోవచ్చు లేదా మెరుగుపరుచుకోవచ్చు.

వివరణ యొక్క పునఃసమీక్ష : సోపానం 2లో వచ్చిన విలువలన్నింటికి మనకు వచ్చిన సరాసరిని కలపడం వల్ల క్రింది సరైన సూత్రం లభిస్తుంది.

'n' వ సం॥లో నమోదు శాతం

$$= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n, \text{(ఇక్కడ } n \geq 1) \quad \ldots (3)$$

అపుడు, మొదట వచ్చిన సమీకరణం (2); ఇలా మారుతుంది.

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad \ldots (4)$$

సవరించిన సాధన :

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

వివరణ : n = 36 వచ్చింది కాబట్టి ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదుశాతం 50% కి; 1991 + 36 = 2027 లో చేరుతుంది.

సాధన యొక్క విశ్వసనీయత : మరొక్కసారి సమీకరణం (4) ద్వారా వచ్చిన విలువలతో వాస్తవ విలువలను పోల్చుకుంటే పట్టిక A.I.5 లోని విలువలు వస్తాయి.

పట్టిక A.I.5

సం॥	నమోదు (శాతం)	సమీకరణం(2)ద్వారా వచ్చినవిలువలు	భేదం	సమీకరణం(4) వచ్చిన విలువలు	భేదం
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

పట్టికను జాగ్రత్తగా గమనిస్తే సమీకరణం (4) ద్వారా వచ్చిన విలువలు సమీకరణం (2) ద్వారా వచ్చిన విలువ కంటె కూడా వాస్తవ విలువలకు చాలా దగ్గరగా ఉన్నాయి. అంటే ఇక్కడ భేదాల సరాసరి "0"గా చెప్పవచ్చు.

A.I.4 గణిత నమూనా విధానం యొక్క ఉపయోగాలు

1. ఒక నిజ జీవిత సమస్యను గణిత సమస్యగా మార్చుకొని, దానిని సాధించి ముఖ్యమైన సమాచారంను రాబట్టడమే "గణిత నమూనా విధానం" యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము. ప్రత్యక్ష పరిశీలన ద్వారా లేదా ప్రయోగాలు నిర్వహించి గాని; అత్యంత ఖర్చుతో కూడుకొని ఉన్న సందర్భంలో గాని సమాచార సేకరణ కష్టం అయినపుడు 'గణిత నమూనా విధానం" చాలా ఉపయోగకరము.

   ఉదా॥కు ఆగ్రాలో ఉన్న తాజ్‌మహల్ పైన "మధుర" నూనె శుద్ధి కర్మాగారం యొక్క కాలుష్య ప్రభావాన్ని తెలుసుకోవాలంటే తాజ్‌మహల్ పైన ప్రత్యక్షంగా ప్రయోగాలు చేయలేము. ఎందుకంటే దాని వల్ల ఒక అద్భుతమైన కట్టడానికి ప్రమాదం వాటిల్లే అవకాశం ఉంది. ఇలాంటి సందర్భంలో గణిత నమూనా విధానంను ఉపయోగించుకోవచ్చు.

2. అనేక రకాల సంస్థలు గాని, వ్యవస్థలు గాని ముందస్తు ప్రణాళికతో పని చేస్తాయి. ఎందుకంటే కీలక నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో భవిష్యత్ ప్రణాళిక ఇమిడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు

(i) మార్కెటింగ్ రంగంలో ఏఏ వస్తువులకు ఎక్కువ డిమాండ్ ఉంటుందో ప్రణాళిక సిద్ధం చేసుకొని అమ్మకాలు పెంచుకుంటారు.

(ii) పాఠశాలల్లో విద్యార్థుల నమోదు శాతాన్ని పెంచడానికి ఏఏ ఆవాస ప్రాంతాలలో బడి ఈడు పిల్లలు ఉన్నారో ముందుగానే ప్రణాళిక సిద్ధం చేసుకొని ఆయా ప్రాంతాల్లో నూతన పాఠశాలలు ప్రారంభించాలని విద్యాశాఖ నిర్ణయించుకుంటుంది.

3. అడవిలో ఉన్న చెట్ల సంఖ్య; సరస్సులోని చేపల సంఖ్య; ఓటింగ్‌లో పోలయిన ఓట్లు చెప్పడం లాంటి అనేక సందర్భాలలో మనం "అంచనా వేయడం" అనే ప్రక్రియను ఉపయోగిస్తుంటాము.

   "గణిత నమూనా విధానం" ను ఉపయోగించే మరికొన్ని సందర్భాలను గమనిద్దాము.

   (i) రాబోయే కొన్ని సం॥ల తర్వాత ఉండే భవిష్యత్ జనాభా

   (ii) రాబోయే కొన్ని రోజుల్లో ఉండే వాతావరణం వివరాలు

   (iii) రాబోయే కొన్ని సం॥లలో ఉండే అక్షరాస్యత శాతం

   (iv) ఒక చెట్టుకు ఉండే ఆకుల సంఖ్యను ఊహించగల్గడం

   (v) మహాసముద్రాల లోతును లెక్కించడం

A.I.5 గణిత నమూనా విధానం యొక్క పరిమితులు

అన్ని సమస్యలకు పరిష్కారాన్ని "గణిత నమూనా విధానం" చూపుతుందా?

ఖచ్చితంగా చూపదనే చెప్పవచ్చు. ఎందుకంటే దీనికి కూడ కొన్ని పరిమితులు ఉంటాయి. కాబట్టి దీనిని నిజ జీవిత సమస్యకు కేవలం ఒక సూక్ష్మరూపంగానే మనం గ్రహించాలి. ఒక దేశానికి సంబంధించిన పటం, అసలైన దేశంకు మధ్య భేదం ఎలా ఉంటుందో ఇది కూడా అలాగే ఉంటుంది. పటం సహాయంతో ఒక ప్రదేశం; సముద్ర మట్టం నుండి ఎంత ఎత్తులో ఉందో కనుగొనవచ్చు కాని అక్కడి ప్రజల జీవన విధానాన్ని గాని వారి లక్షణాలను గాని చెప్పలేము. ఎక్కడ అత్యవసరమో అక్కడ మాత్రమే "గణిత నమూనా ప్రక్రియ"ను ఉపయోగించగలం. గత ఉదాహరణ సమస్యలలో సాధనను కనుగొనే సందర్భంలో వడ్డీరేటు మారదని; వాషింగ్‌మెషిన్ ధర అలాగే ఉంటుందనే కొన్ని ఊహనలు చేసుకున్నాం గుర్తుందా? అంటే దీనిని బట్టి గణిత నమూనా విధానంకు కూడా పరిమితులు ఉంటాయని తెలుసుకోవచ్చు.

A.I.6 ఒక నమూనాను ఎంత మేరకు మెరుగుపరచగలం ?

ఒక గణిత నమూనాను మెరుగుపరచడంలో చాలా అంశాలను పరిగణలోనికి తీసుకోవాల్సి ఉంటుంది. ఇలా చేయడం వల్ల మన గణిత సమీకరణంలో ఇంకా కొన్ని చరరాశులు పెరిగే అవకాశం ఉంది. దాని వల్ల నమూనా క్లిష్టంగా మారి ఉపయోగించడానికి వీలు లేకుండా పోతుంది. కాబట్టి ఎప్పుడైనా ఒక గణిత నమూనా అనేది సరళంగా ఉండి ఖచ్చితంగా ఉపయోగించే విధంగా ఉండాలి. అంటే మంచి నమూనా అనేది ఎప్పుడూ కూడా వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉండాలి.

ప్రయత్నించండి

క్రీ.శ 13వ శతాబ్దంలో లియోనార్డో ఫిబోనాకి సంబంధించిన సమస్య ఇది. ఒక సం॥కాలంలో ఉత్పత్తి చేసే కుందేళ్ళ సంఖ్యకు సంబంధించింది. ఒక కుందేళ్ళ జత ప్రతినెల చివర మరొక కుందేళ్ళ జతకు జన్మనిచ్చి, మరల ఈ జత మరో 2 నెలల్లో మరొక జతకు జన్మనిస్తాయని అనుకుందాం. నెలనెలా ఈ జతల సంఖ్య అనేది మొదటి 2 నెలలు తప్ప మిగిలిన నెలల్లో వాటి ముందు 2 నెలల్లోని కుందేళ్ళ జత సంఖ్యకు సమానం.

కుందేళ్ళ సంఖ్య ఏవిధంగా పెరుగుతుందో క్రింది పట్టికలో చూపబడింది.

నెల	కుందేళ్ళ జతల సంఖ్య
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ఒక సం॥కాల తర్వాత 233 జతల కుందెళ్ళు ఉంటాయి. 16 నెలల తర్వాత 1597 జతల కుందేళ్ళ ఉత్పత్తి అవుతాయి.

పై సమస్యకు "గణిత నమూనా విధానం"ను ఉపయోగించి సమస్యలోని వివిధ దశలను తెల్పండి.

ఇప్పుడు “గణిత నమూనా విధానం”ను ఉపయోగించి సాధించగల్గే మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-4. **(పాచికలను విసరడం) :** దీక్షిత మరియు ఆశిష్ ఇద్దరు కలిసి రెండు పాచికలతో ఆడుకుంటున్నారు. అప్పుడు ఆశిష్; రెండు పాచికలు విసిరిన తర్వాత వాటి ముఖాలపై ఉండే అంకెల మొత్తం ముందుగానే ఊహించి సరైన సమాధానం చెబితే దీక్షితకు మంచి బహుమతిఇస్తానని చెప్పాడు. అంకెల మొత్తం ఎంత చెబితే దీక్షిత బహుమతి గెలిచే అవకాశం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

సాధన :

సోపానం 1 (సమస్య అవగాహన) : ఈ సమస్యలో ముందుగా 2 పాచికలను విసిరితే వాటి ముఖాలపై ఏఏ అంకెలు ఎక్కువగా పడతాయో తెలుసుకోవాల్సి ఉంటుంది.

సోపానం 2 (గణిత పరమైన వివరణ) : పాచికలపై ఏఏ సంఖ్య గల ముఖాలు పడే అవకాశం ఉంటుందో, వాటి సంభావ్యతలు ఎలా ఉంటాయో పరిశీలించాలి.

రెండు పాచికలను విసిరితే వాటి ముఖాలపై ఏఏ అంకెలు ఉండవచ్చో ముందుగానే ఊహించడం ద్వారా ఈ సమస్యకు నమూనాను సులభంగా రాసుకోవచ్చు. 2 పాచికలను ఒకేసారి విసరడం ద్వారా మనకు 36 జతలు ఏర్పడుతాయి.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

పై జతలలో మొదటి అంకె 1వ పాచిక ముఖంపై కన్పించే అంకెను, రెండవ అంకె 2వ పాచిక ముఖంపై కన్పించే అంకెను సూచిస్తుంది.

సోపానం 3 (సమస్యా సాధన) : పై జతలలోని అంకెలను కూడడం ద్వారా అంకెల మొత్తం మనకు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 మరియు 12 వచ్చే అవకాశం ఉంది. ఈ 36 జతలలో ఏ మొత్తం పడే సంభావ్యత ఎంతో తెలుసుకోవాలి.

ఈ సంభావ్యతలను క్రింది పట్టికలో చూపుదాము.

మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

పట్టికను నిశితంగా గమనించడం ద్వారా అంకెల మొత్తం 7 వచ్చే సంభావ్యత $\frac{1}{6}$ అని, ఇది మిగిలిన సంభావ్యతల కంటె ఎక్కువ అని చెప్పవచ్చు.

సోపానం 4 (సాధనకు వివరణ) : అంకెల మొత్తం 7 వచ్చే సంభావ్యత ఎక్కువ కాబట్టి, అంకెల మొత్తం 7 అని ఎక్కువ సార్లు చెప్పడం ద్వారా దీక్షిత బహుమతి గెలిచే అవకాశం ఎక్కువ ఉంటుంది.

సోపానం 5 (విశ్వసనీయత) : రెండు పాచికలను తీసుకొని ఎక్కువ సార్లు విసిరి ఒక పరస్పర పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయాలి. ఇప్పుడు పరస్పర పౌనఃపున్యాలను వాటి సంభావ్యతలతో పోల్చి చూడాలి. ఒకవేళ ఇవి ఏకీభవించకపోతే పాచికలు నిష్పాక్షికంగా ఉన్నాయని అంటాము.

"ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యను సాధించడానికి మనం ముందుగా తెలుసుకోవాల్సిన విషయాలు ఏమిటో చూద్దాం.

ఈ రోజుల్లో డబ్బు లేకుండా ఏ పని చేయలేము అనేది వాస్తవం మరియు ప్రతీ మనిషికి ఎదురయ్యే అనుభవమే. నిజజీవిత అవసరాలను తీర్చుకోవడానికి; సుఖమయ జీవితం గడపడానికి డబ్బు అవసరము. పరిమిత ఆదాయం గల కొనుగోలుదారులను ఆకర్షించడానికి అమ్మకందారులు అనుసరించే మార్గమే "వాయిదా పద్ధతి"

పండుగల సమయంలో అమ్మకందారులు ఎక్కువగా అమ్మకాలను పెంచుకోవడానికి ఈ పద్ధతిని ప్రవేశపెడతారు. ఈ వాయిదా పద్ధతిలో కొనుగోలుదారుడు వస్తువు యొక్క వాస్తవ రేటు కన్న ఎక్కువ ధరను చెల్లిస్తాడు. ఎందుకంటే వస్తువు కొనుగోలు సమయంలో దాని ధరలో కొంత మొత్తాన్ని చెల్లించి, మిగిలిన డబ్బును వాయిదాల రూపంలో చెల్లిస్తాడు. తర్వాత కాలంలో చెల్లించే ఈ డబ్బుపైన కొంత వడ్డీని అమ్మకందారుడు విధిస్తాడు.

మనం ఈ అధ్యాయానికి సంబంధించిన కొన్ని పదాలు తరచుగా వింటుంటాము. ఉదా॥కు వినియోగదారుడు చెల్లించే వాస్తవరేటును అమ్మకం వెల అని, వాయిదాల పద్ధతిలో కొన్నట్లయితే ప్రారంభంలో చెల్లించే ధరను "ప్రారంభ చెల్లింపు" (క్యాష్‌డౌన్ పేమెంట్) అని అంటాము.

ఇప్పుడు క్రింది "ప్రయత్నించండి" లోని సమస్యను గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి సాధించండి.

ప్రయత్నించండి

రవి తన అవసరాల నిమిత్తం ఒక సైకిల్ కొనాలని అనుకున్నాడు. మార్కెట్‌లో తనకు నచ్చిన సైకిల్ ధర ₹ 2400 గా ఉంది. కాని రవి వద్ద కేవలం ₹ 1400 మాత్రమే ఉన్నాయి. అప్పుడు షాపు యజమాని రవికి సహాయం చేయదలచి, ప్రస్తుతం ₹ 1400 చెల్లించి మిగిలిన మొత్తాన్ని నెలకు ₹ 550 చొప్పున సమాన నెలసరి వాయిదా చెల్లించమని చెప్పాడు. అయితే రవి మాత్రం ₹ 1,000 లను బ్యాంకులో సం॥నికి 12% చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా తీసుకుందాం అనుకున్నాడు. ఈ రెండు అవకాశాలలో ఏది లాభదాయమైనదో సూచించి రవికి సహాయపడండి.

జవాబులు

అభ్యాసము - 1.1

1. (i) అంతమయ్యే దశాంశం (ii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం
(iii) అంతమయ్యే దశాంశం (iv) అంతమయ్యే దశాంశం
(v) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

2. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $3\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{31}{25}$

3. (i) అకరణీయం (ii) కరణీయం (iii) అకరణీయం (iv) అకరణీయం
(v) అకరణీయం (vi) కరణీయం (vii) అకరణీయం

అభ్యాసము- 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) క.సా.గు = 420, గ.సా.కా = 3 (ii) క.సా.గు = 11339, గ.సా.కా = 1
(iii) క.సా.గు = 1800, గ.సా.కా = 1 (iv) క.సా.గు = 216, గ.సా.కా = 36
(v) క.సా.గు = 22338, గ.సా.కా = 9

అభ్యాసము - 1.3

1. (i) 0.375 (అంతమయ్యే దశాంశం) (ii) 0.5725 (అంతమయ్యే దశాంశం)
(iii) 4.2 (అంతమయ్యే దశాంశం)
(iv) $0.\overline{18}$ (అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం) (v) 0.064 (అంతమయ్యే దశాంశం)

2. (i) అంతమయ్యే దశాంశం (ii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం
(iii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం (iv) అంతమయ్యే దశాంశం
(v) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం (vi) అంతమయ్యే దశాంశం
(vii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం (viii) అంతమయ్యే దశాంశం
(ix) అంతమయ్యే దశాంశం (x) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3

4. (i) అకరణీయం (ii) అకరణీయంకాదు (iii) అకరణీయం

5. m = 5, n = 3

6. m = 4, n = 2

అభ్యాసము - 1.5

1. (i) $\log_3 243 = 5$ (ii) $\log_2 1024 = 10$ (iii) $\log_{10} 1000000 = 6$

(iv) $\log_{10} 0.001 = -3$ (v) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (vi) $\log_6 1 = 0$

(vii) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ (viii) $\log_{\sqrt{49}} 7 = 1$ (ix) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

(x) $\log_{32} \frac{1}{4} = -\frac{2}{5}$

2. (i) $18^2 = 324$ (ii) $10^4 = 10000$ (iii) $a^b = \sqrt{x}$

iv) $4x = 8$ (v) $3y = \frac{1}{27}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) -4 (iv) 0

(v) $\frac{1}{2}$ (vi) 9 (vii) -2 (viii) 3

4. (i) log 10 (ii) log 8 (iii) log 64

(iv) $\log \frac{9}{8}$ (v) log 243 (vi) log 45

5. (i) $3(\log 2 + \log 5)$ (ii) $7\log 2 - 4\log 5$ (iii) $2\log x + 3\log y + 4\log z$

(iv) $2\log p + 3\log q - \log r$ (v) $\frac{1}{2}(3\log x - 2\log y)$

అభ్యాసము - 2.1

1. (i) సమితి (ii) సమితికాదు (iii) సమితికాదు

(iv) సమితి (v) సమితి

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$

(v) $\in$ (vi) $\in$

3. (i) $x \notin A$ (ii) $d \in B$ (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$

4. (i) అసత్యము (ii) అసత్యము
(iii) సత్యము (iv) అసత్యము

5. (i) B = {1, 2, 3, 4, 5}
(ii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71}
(iii) D = {2, 3, 5}
(iv) E = {B, E, T, R}

6. (i) A = {x : x అనేది 3 యొక్క గుణిజం మరియు $x < 13$}
(ii) B = {x : $x = 2^x$ x కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య 6}
(iii) C = {x : x = 5, x అనేది 5 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య}
(iv) D = {x : x అనేది ఒక వర్గ సంఖ్య మరియు $x \leq 10$}

7. (i) A = {51, 52, 53, ..., 98, 99}
(ii) B = {+2, – 2}
(iii) D = {L, O, Y, A}

8. (i) (c)
(ii) (a)
(iii) (d)
(iv) (b)

అభ్యాసము - 2.2

1. (i) శూన్యసమితికాదు (ii) శూన్యసమితి (iii) శూన్యసమితి
(iv) శూన్యసమితి (v) శూన్యసమితికాదు

2. (i) పరిమితసమితి (ii) పరిమితసమితి (iii) పరిమితసమితి

3. (i) పరిమితసమితి (ii) అపరిమితసమితి (iii) అపరిమితసమితి
(iv) అపరిమితసమితి

అభ్యాసము - 2.3

1. (i) సమసమితి అవుతుంది (ii) సమసమితి కాదు (iii) సమసమితి కాదు
2. (i) సమసమితి (=) (ii) సమసమితి కాదు ($\neq$) (iii) సమసమితి (=)
(iv) సమసమితి కాదు ($\neq$) (v) సమసమితి కాదు ($\neq$) (vi) సమసమితి కాదు ($\neq$)
(vii) సమసమితి కాదు ($\neq$)
3. (i) A = B (ii) $A \neq B$ (iii) A = B (iv) $A \neq B$

అభ్యాసము - 2.4

1. (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) సత్యము (iv) సత్యము

2. (i) $\{1, 2, 3, ... 10\} \neq \{2, 3, 4, ... 9\}$.

   (ii) మొదటి సమితి సరి సంఖ్యలను సూచించగా, రెండవ సమితి ఆ బేసిసంఖ్యలను సూచిస్తుంది.

   (iii) మొదటి సమితిలోని '5' అనే మూలకం 15 యొక్క గుణిజం కాదు.

   (iv) మొదటి సమితిలోని 9 ప్రధానసంఖ్య కాదు.

3. (i) $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \phi$

   (ii) $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$

   (iii) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}$,
   $\{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \phi$

   (iv) $\phi, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{1, 16\}, \{4, 9\}, \{4, 16\}, \{9, 16\}$,
   $\{1, 4, 9\}, \{4, 9, 16\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 4, 9, 16\}$

   (v) $\phi, \{10\}, \{100\}, \{1000\}, \{0, 100\}, \{10, 1000\}, \{100, 1000\}, \{10, 100, 1000\}$

అభ్యాసము - 2.5

1. అవును, $A \cap B = B \cap B = \{1, 2, 3\}$

2. $A \cap \phi = \phi$;
   $A \cap A = A$

3. $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$
   $B - A = \{3, 9, 12, 15\}$

4. $A \cup B = B$

5. $A \cap B$ = {సరి సహజ సంఖ్య}
   $\{2, 4, 6, ...\}$
   $A \cap C = C$ = {బేసి సహజ సంఖ్య}
   $A \cap D = D$ = {ప్రధాన సంఖ్య}
   $B \cap C = \phi$;
   $B \cap D$ = {సరి ప్రధాన సంఖ్య} = $\{2\}$
   $C \cap D = \{4, 6, 8, 9, ... 99\}$ = {బేసి ప్రధాన సంఖ్యలు}

6. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$
   (ii) $A - C = \{3, 9, 15, 18, 21\}$
   (iii) $A - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

(iv) B – A = {4, 8, 16, 20}
(v) C – A = {2, 4, 8, 10, 14, 16}
(vi) D – A = {5, 10, 20}
(vii) B – C = {20}
(viii) B – D = {4, 8, 12, 16}
(ix) C – B = {2, 6, 10, 14)
(x) D – B = {5, 10, 15}

7. (i) అసత్యము, ఎందుకంటే ఉమ్మడి మూలకం '3' కలదు
(ii) సత్యము; ఎందుకంటే రెండు సమితులకు ఉమ్మడి మూలకం 'a' కలదు.
(iii) సత్యము; ఎందుకంటే రెండు సమితులకు ఉమ్మడి మూలకాలు లేవు.
(iv) సత్యము; ఎందుకంటే రెండు సమితులకు ఉమ్మడి మూలకాలు లేవు.

అభ్యాసము- 3.1

1. (a) (i) – 6 (ii) 7 (iii) – 6
2. (i) అసత్యము, ఎందుకనగా $\sqrt{2}$ అనేది x^2 గుణకం కాని పరిమాణం కాదు.
(ii) అసత్యము, ఎందుకనగా x^2 యొక్క గుణకం – 4.
(iii) సత్యము, ఎందుకనగా ఏ స్థిర సంఖ్య యొక్క పరిమాణమైనా సున్నా అవుతుంది.
(iv) అసత్యము, ఎందుకనగా ఇది బహుపదికాదు.
(v) అసత్యము ఎందుకనగా బహుపది యొక్క పరిమాణానికి మరియు దానిలోని పదాల సంఖ్యకు సంబంధం లేదు.
3. p(1) = 0, p (– 1) = – 2, p(0) = – 1, p(2) = 7, p(– 2) = – 9
4. – 2 మరియు 2 అనేవి x^4-16 యొక్క శూన్యవిలువలు అవుతాయి.
5. 3 మరియు – 2 అనేవి $p(x) = x^2 - x - 6$ యొక్క శూన్యవిలువలు అవుతాయి

అభ్యాసము - 3.2

1. (i) శూన్యవిలువలులేవు (ii) 1 (iii) 3
(iv) 2 (v) 4 (vi) 3
2. (i) 0 (ii) – 2, – 3 (iii) – 2, – 3 (iv) – 2, 2, $\pm\sqrt{-4}$
3. (i) 4, – 3 (ii) 3, 3 (iii) శూన్యవిలువలులేవు
(iv) – 4, 1 (v) – 1, 1
4. $p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ మరియు $p(-1) = 0$

అభ్యాసము - 3.3

1. (i) $4, -2$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

 (iv) $0, -2$ (v) $\sqrt{15}\ -\sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

 (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $x^2 - x - 2$ (ii) $x^2 - 3$ (iii) $4x^2 + 3x - 1$

 (iv) $4x^2 - 8x + 3$

4. $-1, -1$ మరియు 3లు ఇచ్చిన బహుపదికి శూన్యాలు

అభ్యాసము - 3.4

1. (i) భాగఫలం $= x - 3$ మరియు శేషం $= 7x - 9$

 (ii) భాగఫలం $= x^2 + x - 3$ మరియు శేషం $= 8$

 (iii) భాగఫలం $= -x^2 - 2$ మరియు శేషం $= -5x + 10$

2. (i) అవును (ii) అవును (iii) కాదు

3. $-1, -1$

4. $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14,\ g(x) = 2,\ q(x) = x^2 - x + 7,\ r(x) = 0$

 (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = x^2 - 1,\ q(x) = x + 1,\ r(x) = 2x + 2$

 (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2,\ g(x) = x^2 - 1,\ q(x) = x + 2,\ r(x) = 4$

అభ్యాసము- 4.1

1. (a) ఖండన రేఖలు

 (b) రెండు రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి

 (c) సమాంతర రేఖలు

2. (a) సంగత సమీకరణాలు (b) అసంగత సమీకరణాలు

 (c) సంగత సమీకరణాలు (d) సంగత సమీకరణాలు

 (e) సంగత సమీకరణాలు (f) అసంగత సమీకరణాలు

(g) అసంగత సమీకరణాలు (h) సంగత సమీకరణాలు

(i) అసంగత సమీకరణాలు

3. ప్యాంట్ల సంఖ్య = 1; షర్టుల సంఖ్య = 0

4. బాలికల సంఖ్య = 7; బాలుర సంఖ్య = 4

5. పెన్సిల్ ధర = 23; పెన్ను ధర = 25

6. పొడవు = 20 మీ; వెడల్పు = 16 మీ

7. (i) $3x + 2y - 7 = 0$

(ii) $3x + 3y - 12 = 0$

(iii) $4x + 6y - 16 = 0$

8. పొడవు = 56 యూనిట్లు; వెడల్పు = 100 యూనిట్లు

9. విద్యార్థుల సంఖ్య = 16; బెంచీల సంఖ్య = 5

అభ్యాసము - 4.2

1. మొదటి వ్యక్తి యొక్క ఆదాయం = ₹ 18000; రెండవ వ్యక్తి యొక్క ఆదాయం = ₹ 14000
2. 42 మరియు 24
3. కోణాలు : 54^o మరియు 36^o
4. (i) స్థిర ఖర్చు = ₹ 40; ఒక కి.మీ. చార్జీ = ₹ 18 (ii) ₹ 490
5. $\frac{7}{9}$
6. 60 కి.మీ/గం; 40కి.మీ/గం.
7. 61^o మరియు 119^o
8. 659 మరియు 723
9. 40 మి.లీ మరియు 60 మి.లీ
10. ₹ 7200 మరియు ₹ 4800

అభ్యాసము - 4.3

1. (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)

(iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

(vii) (3, 2) (viii) (1, 1)

2. (i) పడవవేగం = 8 కి.మి/గం; ప్రవాహ వేగం = 3 కి.మి/గం;
(ii) రైలు వేగం = 60 కి.మి/గం; కారు వేగం = 80 కి.మి/గం;
(iii) పురుష, పనిపూర్తి చేయుటకు పట్టు రోజులు = 18;
పని పూర్తి చేయడానికి స్త్రీలకు పట్టే రోజుల సంఖ్య = 36

అభ్యాసము - 5.1

1. (i) అవును (ii) అవును (iii) కాదు
(iv) అవును (v) అవును (vi) కాదు
(vii) కాదు (viii) అవును

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 8$ (x = వెడల్పు)
(ii) $x^2 + x - 306 = 0$ (x = చిన్న పూర్ణ సంఖ్య)
(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ (x = రోహన్ యొక్క వయస్సు)
(iv) $x^2 - 8x + 1280 = 0$ (x = రైలు యొక్క వేగం)

అభ్యాసము - 5.2

1. (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$
(iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$
(vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$

2. 13, 14
3. 17, 18; – 17, – 18
4. 5 సెం.మీ, 12 సెం.మీ,
5. వస్తువుల సంఖ్య = 6; వస్తువు ఖరీదు = ₹ 15
6. 4 మీ; 10 మీ
7. Base = 12 సెం.మీ; ఎత్తు = 8 సెం.మీ
8. 15 కి.మీ, 20 కి.మీ
9. 20 లేదా 40
10. 9 కి.మీ/గంట

అభ్యాసము- 5.3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\frac{7+\sqrt{-71}}{10}, \frac{7-\sqrt{71}}{10}$ (iv) $-1, -5$

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 సం॥

5. గణితం = 12, ఇంగ్లీషు = 18 (లేదా) లెక్కలు = 13, ఇంగ్లీషు = 17

6. 120 మీ; 90 మీ.

7. 18, 12; $-18, -12$

8. 40 కి.మీ/గం.

9. 15 గం॥, 25 గం॥

10. ప్యాసింజర్ రైలు వేగం = 33 కి.మీ/గం

ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు వేగం = 44 కి.మీ/గం

11. 18 మీ; 12 మీ

12. 6 సెకండ్లు

13. 13 భుజాలు; కాదు

అభ్యాసము- 5.4

1. (i) వాస్తవ మూలాలు లేవు

(ii) సమాన మూలాలు; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) విభిన్న మూలాలు; $\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. అవును; 40 మీ; 20 మీ

4. కాదు

5. అవును; 20 మీ; 20 మీ

8. $\frac{3}{7}$

అభ్యాసము - 6.1

1. (i) అంకశ్రేఢి అవుతుంది. (ii) అంకశ్రేఢి కాదు (iii) అంకశ్రేఢి అవుతుంది
   (iv) అంకశ్రేఢి కాదు
2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2
   (iii) 4, 1, – 2, – 5 (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
   (v) – 1.25, – 1.5, – 1.75, – 2
3. (i) $a_1 = 3;\ d = -2$ (ii) $a_1 = -5;\ d = 4$
   (iii) $a_1 = \frac{1}{3};\ d = \frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6;\ d = 1.1$
4. (i) అంకశ్రేఢి కాదు
   (ii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 4, \frac{9}{2}, 5$
   (iii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు = – 9.2, – 11.2, – 13.2
   (iv) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు = 6, 10, 14
   (v) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$
   (vi) అంకశ్రేఢి కాదు
   (vii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు = – 16, – 20, – 24
   (viii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$
   (ix) అంకశ్రేఢి కాదు
   (x) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 5a, 6a, 7a$
   (xi) అంకశ్రేఢి కాదు
   (xii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$
   (xiii) అంకశ్రేఢి కాదు

అభ్యాసము- 6.2

1. (i) $a_8 = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$
   (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) – 84 (ii) 22

3.	(i)	$a_2 = 14$							
	(ii)	$a_1 = 18;$		$a_3 = 8$					
	(iii)	$a_2 = \frac{13}{2};$		$a_3 = 8$					
	(iv)	$a_2 = -2;$		$a_3 = 0;$		$a_4 = 2;$		$a_5 = 4$	
	(v)	$a_1 = 53;$		$a_3 = 23;$		$a_4 = 8;$		$a_5 = -7$	
4.	16వ పదము								
5.	(i)	34		(ii)	27				
6.	కాదు		7.	178		8.	5	9.	1
10.	100		11.	128		12.	60	13.	13
14.	అంకశ్రేఢి = 4, 10, 16, ...					15.	158		
16.	$-13, -8, -3$					17.	11	18.	13

అభ్యాసము - 6.3

1.	(i)	245	(ii)	-180	(iii)	555	(iv)	$\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$
2.	(i)	$\frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$			(ii)	286	(iii)	-8930
3.	(i)	440			(ii)	$d = \frac{7}{3}, \quad S_{13} = 273$		
	(iii)	$a = 4, S_{12} = 246$		(iv)	$d = 1, \ a_{10} = 22$			
	(v)	$x = 5; \ a_5 = 37$		(vi)	$x = 7; \ a = -8$			
	(vii)	$a = 4$						
4.	$x = 38;$		$S_{38} = 6973$					
5.	5610							
6.	x^2							
7.	(i)	525		(ii)	-465			
8.	$S_1 = 3;$		$S_2 = 4;$		$a_2 = 1;$	$a_3 = -1;$		$a_{10} = -15$
	$a_n = 5 - 2x$							
9.	4920		10.	160, 140, 120, 100, 80, 60, 40				
11.	234		12.	143		13.	16	14. 370

అభ్యాసము - 6.4

1. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును

2. (i) 4, 12, 36, ... (ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, ...$

(iii) 81, – 27, 9, ... (iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, ...$

3. (i) అవుతుంది; 32, 64, 128 (ii) అవుతుంది; $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

(iii) కాదు (iv) కాదు (v) కాదు

(vi) అవుతుంది; – 81, 243, – 729 (vii) అవుతుంది; $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, ...$

(viii) అవుతుంది; $-16,\ 32\sqrt{2},\ -128$ (ix) అవుతుంది; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4. – 4

అభ్యాసము - 6.5

1. (i) $r_a = \frac{1}{2}$; $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $r = -3$; $a_n = 2(-3)^{n-1}$

(iii) r = 3; $a_n = 3(3)^{n-1}$

(iv) $r = \frac{2}{5}$; $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2. $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$

3. (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4. (i) 5 (ii) 12 (iii) 7

5. 2^{12} 6. $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, ...$ 7. 5

అభ్యాసము - 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$
2. 39
3. సరేఖీయాలు కాదు

9. (i) చతురస్రం (ii) ట్రెపీజియం (iii) సమాంతర చతుర్భుజం

10. (7, 0) 11. 7 or -5

12. 3 or -9 13. $2\sqrt{5}$ యూనిట్లు

అభ్యాసము - 7.2

1. (1, 3) 2. $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ మరియు $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$

3. 2 : 7 4. $x = 6$; $y = 3$

5. (3, -10) 6. $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

7. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

8. $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ 9. 24 చ.యూనిట్లు 10. $\left(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5}\right)$

11. (i) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ (ii) $\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

అభ్యాసము - 7.3

1. (i) $2\frac{1}{2}$ చ.యూనిట్లు (ii) 32 చ.యూనిట్లు (iii) 3 చ.యూనిట్లు

2. (i) K = 4 (ii) K = 3 (iii) $K = \frac{7}{3}$

3. 1 చ.యూనిట్లు; 1 : 4 4. $\frac{33}{2}$ చ.యూనిట్లు; 5. $1500\sqrt{3}$ చ.యూనిట్లు;

అభ్యాసము - 7.4

1. (i) 6 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{4b}{a}$ (iv) $\frac{-a}{b}$

(v) $\frac{-25}{19}$ (vi) 0 (vii) $\frac{1}{7}$ (viii) -1

అభ్యాసము - 8.1

4. $x = 5$ సెం.మీ. మరియు $y = 2\frac{13}{16}$ సెం.మీ. లేదా 2.8125 సెం.మీ.

అభ్యాసము - 8.2

1. (ii) DE = 2.8 సెం.మీ.
2. 8 సెం.మీ. 3. 1.6 మీ. 7. 16 మీ.

అభ్యాసము - 8.3

3. 1:4 4. $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$ 6. 96 చ.సెం.మీ. 8. 3.5 సెం.మీ.

అభ్యాసము - 8.4

8. $6\sqrt{7}$ మీ. 9. 13 మీ. 12. 1:2

అభ్యాసము - 9.1

1. (i) ఒకటి (ii) ఛేదనరేఖ (iii) రెండు
   (iv) స్పర్శబిందువు (v) అనంత
2. PQ = 13 సెం.మీ. 4. $\sqrt{306}$ సెం.మీ.

అభ్యాసము - 9.2

1. (i) d (ii) a (iii) b (iv) a (v) c
2. 8 సెం.మీ. 4. AB = 15 సెం.మీ., AC = 13 సెం.మీ.
5. 8 సెం.మీ. 6. $2\sqrt{5}$ సెం.మీ. 9. రెండు

అభ్యాసము - 9.3

1. (i) 28.5 చ.సెం.మీ. (ii) 285.5 చ.సెం.మీ.
2. 88.368 చ.సెం.మీ. 3. 1254.96 చ.సెం.మీ. 4. 57 చ.సెం.మీ.
5. 10.5 చ.సెం.మీ. 6. 9.625 చ.సెం.మీ. 7. 102.67 చ.సెం.మీ.
8. 57 చ.సెం.మీ.

అభ్యాసము - 10.1

1. 5500 చ.సెం.మీ. 2. 124800చ.సెం.మీ. (12.48 చ.మీ.) 3. 264 ఘ.సె.మీ

4. 1 : 2 5. 4772 7. 29645 ఘ.సెం.మీ

8. 188.57 చ.మీ 9. 37 సెం.మీ

అభ్యాసము - 10.2

1. 103.71 చ.సెం.మీ 2. 1156.57 చ.సెం.మీ 3. 220 చ.మీ

4. 160 చ.సెం.మీ 5. ₹ 765.6 6. $4:4:\sqrt{5}$

7. $a^2\left(5+\frac{\pi}{2}\right)$ చ.యూనిట్లు 8. 374 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 10.3

1. 693 కి.గ్రా. 2. శంకువు ఎత్తు = 22.05 సెం.మీ; ఉపరితల వైశాల్యం = 793 చ.సెం.మీ

3. 88.83చ.సెం.మీ 4. 616 చ.సెం.మీ 5. 309.57 చ.సెం.మీ

6. 150 7. 523.9 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 10.4

1. 2.74 సెం.మీ 2. 12 సెం.మీ 3. 0.714 మీ (71.4 సెం.మీ)

4. 5 మీ. 5. 10 6. 57

7. 100 8. 224

అభ్యాసము - 11.1

1. $\sin A = \frac{15}{17}$; $\cos A = \frac{18}{17}$; $\tan A = \frac{15}{8}$

2. $\frac{527}{168}$ 3. $\cos \theta = \frac{49}{25}$; $\tan \theta = \frac{24}{49}$

4. $\sin A = \frac{5}{13}$; $\tan A = \frac{5}{12}$

5. $\sin A = \frac{4}{5}$; $\cos A = \frac{3}{5}$

7.	(i)	$\frac{47}{62}$	(ii)	$\frac{\sqrt{111}+8}{7}$		
8.	(i)	1	(ii)	0		

అభ్యాసము - 11.2

1.	(i)	$\sqrt{2}$	(ii)	$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	(iii)	1
	(iv)	$\frac{-1}{3}$	(v)	-1		
2.	(i)	c	(ii)	d	(iii)	b
3.	1		4.	Yes		
5.	QR = $6\sqrt{3}$ సెం.మీ;		PR = 12 సెం.మీ			
6.	$\angle YXZ = 60^o$;		$\angle YXZ = 30^o$		7. 60^0	

అభ్యాసము - 11.3

1.	(i)	1	(ii)	0	(iii)	0
	(iv)	1	(v)	1		
3.	$A = 24^o$		6.	$\cos 15^o + \sin 25^o$		

అభ్యాసము - 11.4

1.	(i)	2	(ii)	2	(iii)	1
6.	1		8.	1	9.	$\frac{1}{p}$

అభ్యాసము - 12.1

1.	15 మీ.	2.	$6\sqrt{3}$ మీ.	3.	4 మీ.	
4.	60^o	5.	11.55 మీ.	6.	$4\sqrt{3}$ మీ.	
7.	4.1568 మీ.	8.	300 మీ.	9.	15 మీ.	10. 12.99 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 12.2

1. టవర్ యొక్క ఎత్తు = $5\sqrt{3}$ మీ; రోడ్డు వెడల్పు = 5 మీ
2. 32.908 మీ 3. 1.464 మీ 4. 19.124 మీ
5. 7.608 మీ 6. 10 మీ 7. 51.96 అడుగులు; 30 అడుగులు 8. 6 మీ
9. 200 మీ/సె. 10. 24 మీ

అభ్యాసము - 13.1

1. (i) 1 (ii) 0, అసంభవఘటన (iii) 1, ఖచ్చిత/ధృడఘటన
   (iv) 1 (v) 0, 1
2. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును (iv) అవును
3. 0.95 4. (i) 0 (ii) 1
5. 0.008 6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

అభ్యాసము - 13.2

1. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$
2. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{4}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$
3. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$
4. $\frac{5}{13}$ 5. 0.35
6. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1
7. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{26}$
   (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{13}$ (vi) $\frac{1}{52}$

8. $\frac{3}{10}$ 9. $\frac{4}{15}$

10. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{4}$

11. $\frac{11}{12}$ 12. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$

13. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

14. $\frac{11}{21}$ 15. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

16.

రెండు పాచికలపై సంఖ్యల మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

17. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$

అభ్యాసము - 14.1

1. సగటు చెట్ల సంఖ్య = 8.1

2. ₹ 313 3. $f = 20$ 4. 75.9

5. 22.31 6. ₹ 211 7. 0.099 ppm

8. 49 రోజులు 9. 69.43%

అభ్యాసము - 14.2

1. బాహుళకం = 36.8 సం॥, సగటు = 35.37 సం॥.

2. బాహుళకం 65.625 గంటలు

3. బాహుళకం = ₹ 1847.83, సగటు = ₹ 2662.5.

4. బాహుళకం : 30.6, సగటు = 29.2.

5. బాహుళకం = 4608.7 పరుగులు.

6. బాహుళకం = 44.7 కారులు

అభ్యాసము - 14.3

1. మధ్యగతం = 137 యూనిట్లు, సగటు = 137.05 యూనిట్లు, బాహుళకం = 135.76 యూనిట్లు.

2. $x = 8, y = 7$

3. మధ్యగత వయస్సు = 35.76 సం॥

4. మధ్యగతం పొడవు = 146.75 మి.మీ

5. మధ్యగతం జీవితకాలం = 3406.98 గం॥

6. మధ్యగతం = 8.05, సగటు = 8.32, బాహుళకం = 7.88

7. మధ్యగత బరువు = 56.67 కి.గ్రా.

అభ్యాసము - 14.4

1.

సంపాదన (₹లలో)	సంచిత పౌనఃపున్యం
300 కంటే తక్కువ	12
350 కంటే తక్కువ	26
400 కంటే తక్కువ	34
450 కంటే తక్కువ	40
500 కంటే తక్కువ	50

2.

ఎగువ హద్దులు	300	350	400	450	500
సంచింత పౌనఃపున్యం	12	26	34	40	50

3.

దిగువ హద్దులు	50	55	60	65	70	75
అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	100	98	90	78	54	16

ఉపాధ్యాయులకు సూచన

ప్రియమైన ఉపాధ్యాయులారా !

ఆంధ్రప్రదేశ్ విద్యా ప్రణాళికా పరిధి పత్రం (APSCF-2011) లో సూచించిన అనేక సిఫార్సులలో ప్రధానమైనది పాఠశాలలో విద్యార్థుల అభ్యసనం, "పాఠశాల బయట జీవితం (నిజజీవితం)తో ముడిపడి ఉండాలి" దీని కనుగుణంగా మన రాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని పాఠ్యాంశాలలోనూ విద్యా ప్రణాళికను సవరించుటకు నిర్ణయించారు. జాతీయ విద్యా ప్రణాళికా పరిధిపత్రం (NCF-2005)NCERT వారి గణిత ఆధార పత్రం, ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రప్రభుత్వం సూచనల మేరకు గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృత పరచుకోవడానికి, సాధారణీకరణాల ద్వారా అన్వేషణ మరియు గణిత ప్రక్రియలను వారి జీవిత అనుభవాలను జోడించి గణతీకరణం చెందే విధముగా కృషి చేయాలి. ఈ అంశాలు సెకండరీ స్థాయిలో సాధ్యమవుతాయి. 9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంను గణిత విద్యా ప్రణాళిక, విద్యా ప్రమాణాలను ఆధారముగా రూపొందించి, సెకండరీ స్థాయి గణితమును పూర్తి చేసే స్థితిలో యున్నాం. ముందు తరగతులలో విద్యార్థులను అమూర్తకీలక భావనలను, ప్రాథమిక అంశాల గణిత సూత్రీకరణ అవగాహన చేసుకొనే విధముగా కృషి చేశాము. గణిత సమస్యలను సాధించడం, ఋజువు చేయడం, మరియు అందులకు అవసరమయ్యే గణిత పరిభాషను వినియోగించే విధముగా నిష్ణాతులను చేశాము. గణిత ప్రవచనములను, సమస్యా విశ్లేషణా సోపానములను పరిపూర్ణంగా గణిత పరిభాషలో సంకేతములనుపయోగించి రాసే విధముగా అవసరమయ్యే నైపుణ్యములను పెంపొందించాము. అందుచే పదవతరగతి పాఠ్యపుస్తకములో విద్యార్థులు గణిత భావనలను, పూర్తిస్థాయిలో అమూర్త భావనలను అవగాహన చేసుకొనే విధముగా పాఠ్యపుస్తక రచనకు ప్రాధాన్యత నిచ్చాము.

పదవతరగతి పాఠ్యాంశముల బోధన, అభ్యసనకు దోహదమయ్యే విధముగా 6వ తరగతి నుండి 10వ తరగతి వరకు గణిత పాఠ్య ప్రణాళికను శీర్షిక మరియు సర్పిల విధానాలపై ఆధారపడి రూపొందించబడినవి. కీలక అమూర్త భావనల స్వభావము, పరిధి మరియు గణిత పరిభాష స్థాయి క్రమేపి పెంచబడినది. స్వీకృతాధార పద్ధతిలో అధ్యయనంను విద్యార్థులకు అలవాటు చేసి, ఈ పద్ధతిలో విద్యార్థుల సౌలభ్యతను పొందే విధంగా కృషిచేశాము. అభ్యసన ప్రక్రియలో విద్యార్థులు ఎదుర్కొనే క్లిష్టతలలో అధిక ప్రాధాన్యము కల్గినది. స్వీకృతాధార అధ్యయనం, గణిత సంకేతముల పరిభాష. అందుచే ఈ పాఠ్యపుస్తకములోని అంశాలు అన్నీ విద్యార్థులు చక్కని స్వేచ్ఛాయుత వాతావరణంలో నేర్చుకొనే విధముగా, విద్యార్థులు చిన్న, చిన్న బృందాలుగా మారి, చర్చించి సమస్యలు సాధించుటకు వీలుగా "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" వంటి శీర్షికలను చేర్చాము.

ఈ సిలబస్ నందు పాఠ్యవిషయాలు అన్ని ప్రాథమిక గణిత భావనలు, సాధారణీకరణాల ద్వారా అన్వేషణ, అవగాహనలపై ఊహించి మౌలిక నిర్మాణ విధాన పద్ధతిలో రూపొందించాము. ఈ విధానము బృంద చర్చ, కృత్య ఆధారిత అభ్యసమునకు ప్రాధాన్యత కల్పిస్తుంది.

10వ తరగతి సిలబస్ ప్రధానముగా 1) సంఖ్యావ్యవస్థ 2) బీజగణితం 3) రేఖాగణితం 4) క్షేత్రమితి 5) సాంఖ్యక శాస్త్రం 6) నిరూపక రేఖాగణితము 7) త్రికోణమితి అను 7 రంగాలుగా విభజించబడినది. ఈ రంగాలలోని అంశాలను బోధించుట ద్వారా విద్యార్థులలో సమస్యా సాధన, తార్కిక ఆలోచన, గణిత భాషలో వ్యక్త పరచడం, ఇచ్చిన దత్తాంశమును వేర్వేరు రూపాలలో ప్రాతినిధ్య పరచడం, గణితమును ఒక పాఠ్యాంశముగా మాత్రమే కాకుండా నిజ జీవితమునకు ఆవశ్యకమైన శాస్త్రముగా గుర్తించడమును విద్యార్థులు పొందుతారు.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో సరళమైనభాష, పదజాలం కలిగి వుండి పిల్లల మేధస్సు, గణిత భావాలను ఉపయోగించుకోవడానికి తద్వారా తామే స్వయంగా గణిత స్వరూపాలను ఏర్పరచుకోవడానికి అవకాశాలను కల్పిస్తుంది. పుస్తకంలో పొందుపరచిన ఇవిచేయండి, ప్రయత్నించండి. ప్రకల్పనలు వంటి అంశాలకు అధిక ప్రాధాన్యత ఇచ్చి పిల్లలు సొంతముగా నేర్చుకొనేలా చేయడానికి, జట్లలో ప్రయత్నించడానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం అవకాశం కల్పిస్తోంది.

"ఇవి చేయండి" ప్రయత్నించండి శీర్షికలతో ఇచ్చిన అభ్యాసములో విద్యార్థులు ఆ పాఠ్యాంశమును ఎంతమేరకు అవగాహన చేసుకున్నారు అనే అంశమును తెలుసుకొనేందుకు దోహదపడతాయి. 'ఇవి చేయండి' శీర్షికలో ఇచ్చిన సమస్యలు పాఠ్యాంశములో చర్చించిన భావనలపై ఆధారపడియుంటాయి. "ప్రయత్నించండి" అను శీర్షికలో ఇచ్చిన సమస్యలు నైపుణ్యములు, భావనల సాధారణీకరణం, భావన సత్యశోధన మరియు ప్రశ్నించుట అను అంశాల ఆధారముగా తయారు చేయబడ్డాయి. 'చర్చించు – ఆలోచించు' అను శీర్షికలో విద్యార్థులు కొత్త భావనలను అర్థము చేసుకొంటారు. వారి సొంత మాటలలో వ్యక్తపరుస్తారు.

10వ తరగతి సిలబస్‌ను 14 అధ్యాయాలుగా విభజించారు. విద్యార్థులు ప్రతి అంశాన్ని కూలంకషముగా అవగాహన చేసుకొనుటకు, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించుటకు, అంశాలపై సమగ్రంగా పట్టు సాధించుటకు, సులభముగా నేర్చుకొనుటకు, గణిత అధ్యయనం పట్ల ఆసక్తిని పెంచడానికి దోహదపడుతాయి. రంగుల వర్ణచిత్రాలు, పటాలు, చదవగలిగేలా అక్షరాల సైజు, తగ్గిన పాఠ్య పుస్తకం పేజీల సంఖ్య విద్యార్థులను గణిత పాఠ్యపుస్తకం పట్ల భయం పోగొట్టి స్వయం అభ్యసనానికి ప్రేరేపిస్తుంది.

అధ్యాయం 1 : వాస్తవ సంఖ్యలలో అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం, అకరణీయ సంఖ్యలు, వాటిని దశాంశ రూపములో విస్తరణ, ఆవర్తిత అకరణీయ సంఖ్యలు వివరించబడినవి. కరణీయ సంఖ్యలను గూర్చి సవివరముగా చర్చించాము. మొట్టమొదటిసారిగా ఈ పాఠ్యాంశములో సంవర్గమానములు పరిచయం చేశాం. సంవర్గమానముల ప్రాథమిక న్యాయములు మరియు వాటి అనువర్తనములు వివరించబడినవి.

అధ్యాయము 2 : సమితులు, సెకండరీ స్థాయిలో పూర్తిగా నూతన అధ్యాయం. పూర్వ సిలబస్‌లో 8వ తరగతి నుండి "సమితులు" అధ్యాయం ఉన్నప్పటికీ నూతన విద్యాప్రణాళికలో 10వ తరగతిలో పరిచయం చేయబడింది. ఈ అధ్యాయంలో సమితి నిర్వచనం, సమితులలో రకాలు, వెన్ చిత్రాలు, సమితుల పరిక్రియలు, సమితుల మధ్య వ్యత్యాసములు వివరించబడినవి.

అధ్యాయము 3 : బహుపదులు, 'బహుపది అనగానేమి?' మరియు బహుపదుల పరిమాణము, విలువలను గూర్చి వివరించబడినది. రేఖీయ బహుపదులు. మరియు వర్గ బహుపదులను గ్రాఫు ద్వారా సూచించడం. బహుపది శూన్యాలు మరియు బహుపదిలోని చరరాశి గుణకములు మధ్య సంబంధం గూర్చి వివరించబడినది. ఘన బహుపదిని గూర్చి మరియు భాగహారన్యాయం గూర్చి వివరించబడినది.

అధ్యాయము 4: రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణముల జతతో రేఖీయ సమీకరణముల సాధన, గ్రాఫుతో బీజీయ పద్ధతులనుపయోగించి రెండు చరరాశుల రేఖీయ సమీకరణములను సాధించడం వివరించబడినది.

అధ్యాయము 5 : వర్గ సమీకరణములు, వర్గసమీకరణము భావన, అర్థము, సాధనలు వివరించడమైనది. పరావలయం నుపయోగించి మూలాల స్వభావమును తెలుసుకోవడము వివరించడమైనది.

అధ్యాయము 6: శ్రేఢులు, సెకండరీ స్థాయిలో మొదటిసారిగా ఈ అధ్యాయం పరిచయం చేయడమైనది. ఈ అధ్యాయంలో అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలను గూర్చి వివరించడమైనది. శ్రేఢిలో పదముల సంఖ్య, nవ పదము, పదాల మొత్తం చర్చించడమైనది.

అధ్యాయము 7 : నిరూపక జ్యామితి, ఈ అధ్యాయములో రెండు బిందువుల మధ్య దూరం, విభజన సూత్రం (Section formula), త్రిభుజకేంద్రభాసం, త్రిధాకరణ బిందువులను గూర్చి వివరించడమైనది. త్రిభుజవైశాల్యమును 'హెరాన్‌సూత్రము" నుపయోగించి కనుగొనుట వివరించబడినది. సరళరేఖ యొక్క వాలును గూర్చి వివరించడమైంది.

అధ్యాయము 8 : లో సరూప త్రిభుజ ధర్మాలను గురించి, ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం వివరించడమైనది. రెండు త్రిభుజాల సరూపతకు కావల్సిన నియమాలను హేతుబద్ధంగా నిరూపించుటకు తగిన ప్రేరణ కల్గించడమైనది. పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను, దాని విపర్యయమును నిరూపించే పద్ధతులు కూలంకషంగా చర్చించడమైనది.

అధ్యాయం 9 : లో వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ, ఛేదన రేఖలను గూర్చి వివరించడమైనది. ఛేదన రేఖ వలన ఏర్పడిన వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుట చర్చించడమైనది.

అధ్యాయం 10 : క్షేత్రమితిలో ఘనకార వస్తువుల సముదాయము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను గూర్చి చర్చించడమైనది.

అధ్యాయం 11 మరియు 12 లను సెకండరీ స్థాయిలో నూతనముగా పరిచయము చేయడమైనది. కర్ణము, భుజాల మధ్య సంబంధము ద్వారా త్రికోణమితి నిష్పత్తులను వివరించడము, ఎత్తులు, దూరాలు భావనను దాని అనువర్తనములు వివరించడమైనది.

అధ్యాయము 13 : సంభావ్యత, 9వ తరగతిలో చర్చించిన సంభావ్యతను పరిపుష్టి చేస్తూ నూతన పదముల వివరణ, వాటి భావనలను చర్చించడమైనది.

అధ్యాయము 14: సాంఖ్యాకశాస్త్రంలో, దత్తాంశసేకరణ, దానిని వర్గీకృత దత్తాంశముగా మార్చుట, అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకమును కనుగొనుట. అదేవిధముగా వర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములను కనుగొనుట వాటి మధ్య సంబంధం వివరించడమైనది. అనుబంధంగా చేర్చిన "గణితనమూనా విధానాలు" అధ్యయనం ద్వారా విద్యార్థులలో గణిత సమస్యలు సాధనకు తగిన వివిధ నమూనాలను ఎంపిక చేసుకునే అవకాశం కలుగుతుంది. సమస్యలను నిజజీవిత సంఘటనలతో పోల్చి నమూనాలు రూపకల్పన చేయగలుగుతారు.

ఏ పాఠ్యవిషయంలోనైనా విజయసాధన అనేది పాఠ్యప్రణాళిక కంటే ఎక్కువగా ఉపాధ్యాయుడు అవలంభించే బోధనా పద్ధతులపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక మంచి పాఠ్యపుస్తకంతో మాత్రమే విద్యార్థులలో గుణాత్మకమైన మార్పులను ఆశించలేం. తరగతి గదిలోనూ ఉత్తమ బోధన మాత్రమే పాఠ్యప్రణాళికకు నూతన అర్థాన్ని కల్పించి వాంఛనీయమైన మార్పులను తేగల్గుతుంది. అందువల్ల గణిత బోధన అంటే అభ్యాసాలను సాధింపచేయడమే కాకుండా మౌలిక భావనలను అవగాహన పెంచడం ద్వారా సమస్య సాధన నైపుణ్యాలు పెంపొందుతాయని గ్రహించాలి. ఇటువంటి మార్పు గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో రావాలని ఆశిద్దాం.

ప్రతీ పాఠ్యాంశము చివరలో 'మనము నేర్చుకొన్న అంశాలు' అను శీర్షిక ద్వారా 'పునఃశ్చరణ'కు సొంతంగా మరికొన్ని సమస్యలను తయారు చేసి ఇవ్వటము ద్వారా ఈ ప్రక్రియ పరిపుష్టము అవుతుంది.

విద్యార్థులందరూ గణితమును ఆనందంతో నేర్చుకోవడానికి, వారి జీవిత అనుభవాలను జోడించి సమస్యలు రూపొందించడానికి, సాధించడానికి ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో మౌలిక భావనలు తోడ్పడుతాయని ప్రగాఢముగా విశ్వసిస్తున్నాము.

"సంతోషదాయకమైన బోధనకు అంకితమయ్యే మీ అందరికీ శుభాకాంక్షలు"

సిలబస్

I. సంఖ్యా వ్యవస్థ (23 పీరియడ్లు)

(i) **వాస్తవ సంఖ్యలు** (15 పీరియడ్లు)

- అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలతో మరికొన్ని ధర్మాలు
- అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము – ప్రచనాలు
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ .... మొ॥లగు కరణీయ సంఖ్యలపై ఉపపత్తులు మరియు అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపాలు (అంతమొందే దశాంశాలు, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలు)
- వాస్తవ సంఖ్యల దశాంశాలు (పూర్వజ్ఞానం మరియు ఉదాహరణల ద్వారా నిరూపణలు)
- సంవర్గమానాల పరిచయం
- సంఖ్య యొక్క ఘతాంక రూపం నుండి సంవర్గమాన రూపంలోనికి మార్పు
- సంవర్గమానాల ధర్మాలు $\log_a a = 1;\quad \log_a 1 = 0$
- సంవర్గమాన న్యాయాలు

$$\log xy = \log x + \log y;\ \log \frac{x}{y} = \log x - \log y\ ;\ \log x^n = n \log x$$

- సంవర్గమానాలకు ప్రామాణిక ఆధారాలు, సంవర్గమానాల నిత్యజీవిత అనువర్తనాలు (పరీక్షలకు ద్దేశించబడినవి).

(ii) **సమితులు (8 పీరియడ్లు)**

- సమితులు మరియు వాటి రూపాలు
- శూన్యసమితి, పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులు, విశ్వసమితి
- సమసమితులు, ఉపసమితి, కార్డినల్ సంఖ్య, వియుక్త సమితులు
- వెన్ చిత్రాల ద్వారా సమితులను సూచించుట
- సమితులలో ప్రాథమిక పరిక్రియలు
- సమితుల సమ్మేళనం, ఛేదనం, భేదం

II. బీజగణితము (46 పీరియడ్లు)

(i) బహుపదులు (8 పీరియడ్లు)

- బహుపది యొక్క శూన్యాలు
- బహుపది శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావనలు; రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులకు రేఖాచిత్రాలు
- బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య సంబంధము
- బహుపది భాగాహారనియమము (పూర్ణసంఖ్యలు గుణకాలుగా గల సమస్యల సాధన)

(ii) **రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు** (15 పీరియడ్లు)

- నిత్యజీవిత సందర్భాలద్వారా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలను రూపొందించుట
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలకు రేఖా చిత్రాల ద్వారా సాధనలు కనుగొనుట. వ్యవస్థీకరించబడిన సందర్భాలు గుర్తించుట
- సమీకరణాల సాధనకు తగిన బీజీయ సందర్భాలను తెలుసుకొనుట
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు బీజీయ పద్ధతులలో సాధన కనుగొనుట – ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి, చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చగలిగే నిత్యజీవిత సందర్భాలు, సరళ సమస్యలను రూపొందించి, సాధించుట
- బహుపది యొక్క శూన్యాలు

(iii) **వర్గ సమీకరణాలు** (12 పీరియడ్లు)

- వర్గసమీకరణానికి ప్రామాణిక రూపం $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$.

- వాస్తవ సంఖ్యలు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణాలను సాధించుట
  - కారణాంక పద్ధతి - సంపూర్ణ వర్గ పద్ధతి (సూత్రము ఉపయోగించి)
- వర్గ సమీకరణ విచక్షణి ద్వారా మూలాల స్వభావలను తెలుసుకొని సంబంధాలు ఏర్పరచుట
- నిత్యజీవిత సంఘటనల ఆధారమైన వర్గ సమీకరణాల సాధన

(iv) **శ్రేఢులు** (11 పీరియడ్లు)
- అంకశ్రేఢి నిర్వచనం
- అంకశ్రేఢిలో n వ పదము, మొదటి n పదాల మొత్తం కనుగొనుట.
- గుణశ్రేఢి పరిచయం
- గుణశ్రేఢిలో n వ పదము కనుగొనుట.

III. రేఖాగణితం (33 పీరియడ్లు)

(i) **సరూప త్రిభుజాలు** (18 పీరియడ్లు)
- సరూప పటాలు, సర్వసమానత్వంనకు సరూపతకు మధ్యగల తేడా
- సరూప త్రిభుజ ధర్మాలు
- (నిరూపణ) ఒక త్రిబుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరు వేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.
- (ప్రేరణ) ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖా, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా నుండును.
- (ప్రేరణ) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా వుంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానముగా వుంటాయి మరియు ఆ రెండు త్రిబుజాలు సరూపాలు (కో.కో.కో)
- (ప్రేరణ) ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు, రెండవ త్రిభుజంలోని అనురూప భుజాలు అనుపాతములో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.భు.భు)
- (ప్రేరణ) ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణానికి సమానమై, ఆ కోణాలను కలిగి వున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.కో.భు)
- (నిరూపణ) రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.
- (ప్రేరణ) ఒక లంబ త్రిభుజములో లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆలంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు మరియు అవి ఒకదానికొకటి సరూపాలు.
- (నిరూపణ) ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన, మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము మరియు ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజము అవుతుంది.
- (నిర్మాణం) దత్త రేఖా ఖండంను కోరిన నిష్పత్తిలో విభజించుట (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం ఉపయోగించి)
- (నిర్మాణం) దత్త త్రిభుజానికి ఇచ్చిన స్కేలు ప్రకారము సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మించడం.

(ii) **వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖాలు (15 పీరియడ్లు)**
- వృత్త స్పర్శరేఖకు, ఛేదన రేఖకు గల భేదం
- ఛేదన రేఖలచే ఏర్పడు జ్యాలు వృత్తములపై బిందువుకు జరుగుతున్నప్పుడు ఏర్పడే సందర్భాల ద్వారా స్పర్శరేఖను తెలుసుకొనుట.
- (నిరూపణ) ఒక వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శబిందువు వద్ద వ్యాసార్ధానికి లంబముగా ఉంటుంది.
- (నిరూపణ) వృత్తానికి బాహ్యబిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.
- (నిర్మాణము) వృత్తంపై గల దత్త బిందువు నుండి, ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడం
- ఛేదన రేఖతో ఏర్పడే వృత్త ఖండము
- వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుట (అల్పవృత్తఖండం, అధిక వృత్త ఖండము)

IV. నిరూపక జ్యామితి (12 పీరియడ్లు)

- రేఖీయ సమీకరణాల రేఖాచిత్రాల పునర్విమర్శ ద్వారా నిరూపక రేఖాగణిత భావాలను ఏర్పరుచుట
- రెండు బిందువులు $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ మధ్యదూరము $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

- దత్తరేఖాఖండంను కోరిన నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనుట (అంతర నిష్పత్తి m : n)
- నిరూపక తలంపై ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యము కనుగొనుట.
- రెండు బిందువులను కలిపే రేఖావాలు

V. త్రికోణమితి (23 పీరియడ్లు)

(i) **త్రికోణమితి** (15 పీరియడ్లు)

- లంబకోణ త్రిభుజములో అల్పకోణానికి త్రికోణమితి నిష్పత్తులు అనగా sine, cosine, tangent, cosecant, secant మరియు cotangent.
- 30^0, 45^0, 60^0 కోణాలకు (నిరూపణలతో) త్రికోణమితీయ విలువలు కనుగొనుట.
- త్రికోణమితి నిష్పత్తుల మధ్యసంబధం – పూరక కోణాలకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు
- త్రికోణమితి సర్వసమీకరణాలు

  (i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, (ii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, (iii) $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$.

(ii) **త్రికోణమితి – కొన్ని అనువర్తనాలు** (8 పీరియడ్లు)

- ఊర్థ్వకోణము మరియు అధ:కోణము (నిమ్నకోణం)
- ఎత్తులు – దూరాలకు సంబంధించిన నిత్యజీవిత సరళసమస్యలు
- ఒక సమస్యలో రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలకు మించకుడాను, ఊర్థ్వ లేదా నిమ్నకోణాలు 30^0, 45^0 మరియు 60^0 లకు పరిమితమయ్యే వ్రాత సమస్యల సాధన.

VI. క్షేత్రమితి (10 పీరియడ్లు)

(i) **ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు**

- ఏవైనా రెండు ఘనాల కలయికతో ఏర్పడే నూతన ఘనాల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణాలను కనుగొనుట

  (అనగా సమఘనము, దీర్ఘఘనము, క్రమస్థూపము, క్రమ శంఖువు, గోళము మరియు అర్థగోళములలో ఏవైనా రెండింటితో ఏర్పడేవి)
- రెండు ఘనాకృతులతో ఏర్పడే లోహపు ఘనాలను కరిగించి ఏర్పడే నూతన ఘనాకృతుల ఘనపరిమాణా లను కనుగొనుట.

VII. దత్తాంశ నిర్వహణ (25 పీరియడ్లు)

(i) **సాంఖ్యక శాస్త్రము (15 పీరియడ్లు)**

- అంకగణిత సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకము యొక్క పునర్విమర్శ (అవర్గీకృత దత్తాంశంతో పౌన:పున్యవిభాజనం)
- వర్గీకృత దత్తాంశంనకు అంకగణిత సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకముల భావనలు
- వర్గీకృత / అవర్గీకృత దత్తాంశములకు అంకగణిత సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములను వివిధ పద్ధతులలో కనుగొనుట.
- కేంద్రీయ స్థాన విలువలను వివిధ సందర్భాలలో వినియోగించుట మరియు సంచిత పౌనఃపున్యరేఖా చిత్రాలు

(ii) **సంభావ్యత (10 పీరియడ్లు)**

- సంభావ్యత భావము, నిర్వచనముల పునర్విమర్శ
- నిత్యజీవిత సంఘటనలకు సంబంధించిన సంభావ్యత సమస్యలు (ఏక సంఘటనలను సమితుల భావనతో గణించుట)
- పూరక ఘటనలకు సంబంధించిన భావనలు.

అనుబంధం

గణిత నమూనా విధానాలు (8 పీరియడ్లు)

- గణితంలో నమూనా విధానాల భావన
- నిత్యజీవిత సంఘటనల ఆధారంగా గణిత నమూనాల రూపకల్పన

  (ఉదా: బారువడ్డీ, వాయిదాలు చెల్లించుట మొ॥నవి).

విద్యాప్రమాణాలు

విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసి యుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది.
గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.

1. **సమస్యా సాధన** గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

(అ) సమస్యలలో రకాలు

పజిల్స్, పదసమస్యలు, పటసమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ – పట్టికలు– గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

సమస్యా సాధన – సోపానాలు

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం

(ఆ) **సంక్లిష్టత**

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలోఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం

2. **కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణ చేయడం**

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రకల్పనలను అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.

- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్చలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం

3. **వ్యక్తపరచడం**

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం – రాయగలగడం.

  ఉదా : $3+4=7$

  $n_1+n_2= n_2+n_1$

  త్రిభుజములోని మూడుకోణముల మొత్తం = 180°

- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంతమాటల్లో వివరించడం.
  ఉదా:చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా: రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదటి ఒకట్లస్థానం అంకెలను కూడడం/స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

4. **అనుసంధానం**

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను – భావనలను అనుసంధానం చేయడం.
  ఉదా: గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి – నిష్పత్తికి – భాగహారానికి; అమరికలకు – సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/ అంతరాళం
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం, ఉదా: దత్తాంశసేకరణ మరియు అంక గణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం

5. **దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్య పరచడం**

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం, 2D–పటాలు, 3D–పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.